複動力系統的理論及研究進展淺介

楊重駿 • 潘建強

引言:

複動力系統理論對了解混亂 (Chaos)、碎形幾何 (Fractal Geometry) 和結構穩定性 (Structural Stability) 等的研究及進展有著重大的幫助。本文主要是報告複變函數的動力系統的基本知識及技巧和它的一些新研究成果及問題。

歷史和發展經過:

自然界中常出現一些隨時間或位置而演變的體系, 如行星系、流體運動等。它們的運動通常可用一些變數及參數的函數或微分方程來表示。我們稱之爲系統。動力系統論是研究系統其自身演化規律的理論。研究中涉及了不少數學中主要的技術領域, 包括代數、分析拓樸和微分方程等。

複動力系統是動力系統的一類。簡單地說, 它就是研究任給複平面 $\mathcal{C}$ 上一點 z_0 , 在複函數 f 不斷遞代 (Iterate): $f(z_0), f(f(z_0)), \cdots$ 的終極性態, 此一序列又稱爲 f 在點 z_0 的軌道。

早在本世紀初, Julia (1918) 和 Fatou (1919) 已經開始研究複數域的有理函數的遞代的性質。但直至80年代, 這門學問才重新被人們注視和作廣泛的研究。由於有了現代電腦圖像和其它數學工具如拓撲 (Topology)、擬共形映照 (Quasi-conformal mapping) 等的幫功, 一些從前人們認爲不能解決的問題, 現今已找到了答案。電腦圖像更豐富了碎形幾何的發展。(簡單地說, 碎形幾何是極不規則的圖形, 如雲層, 雪片等。一個碎形是歐氏空間的一子集, 其 Hausdorff- Besicovitch 維數大於其拓撲維數 (Topological Dimension)。近年來, 這方面的研究已擴展至超越整函數 (Transcendental entire functions) 和亞純函數 (Meromorphic function)(兩整函數的商) 的遞代。這方面的研究雖然和有理函數的理論有同處, 但兩者也有相當明顯的差別。因爲有理函數是複球面到自身的一種“有限個點對應於一點”的映射, 而超越函數則是“無窮個點對應於一點”的映射, 並且在本生奇點 (Essential singularity) 附近, 其性態非常複雜 (在大 Picard 定理中可見)。近年來, I.N. Baker, R.C. Devaney, A.E. Eremenko, M. Yu Lyubich, L.R. Goldberg, L. Keen, C. McMullen, M. Misiurewicz, D. Sullivan, J.H. Hubbard, B.W. Bergweiler 及呂以輦 (Lü Yinian) 等對超越函數的動力系統作出了很重要的貢獻。

現在從基本定義和記號開始:

定義1: 設 $\{g_m\}$ 爲一函數族, $z_0 \in \mathcal{C}$, 如果存在一個領域 $V, z_0 \in V$, 使得序列 $\{g_m\}$ 中任意一個子序列都存在一個子序列在 V 的任意緊緻子集 (compact subset) 上一致收斂, 我們稱 $\{g_m\}$ 在 z_0 上正規。我們稱 $\{g_m\}$ 在領域 V 內正規, 如果對所有點 $\tilde{z} \in V, \{g_m\}$ 在 $\tilde{z}$ 上正規。

應用正規族的知識, 我們可以證明大 Picard 定理: 設 f 爲一解析函數, a 爲 f 的本性奇異點。則在 a 的任一鄰域 V , 除了可能一個例外値外, f 在 V 中可無窮多次取得其它任何值。

簡證: 設 $a=0$, 設有一個 R 使有兩個複數不在 $\{f(z): 0<|z|<R\}$ 內, 我們將導出矛盾。不妨設 $f(z) \neq 0,1; 0<|z|<R$ 。令

$$G=B(0;R)\backslash\{0\}, \text{及}$$
$$f_n(z)=f(\frac{z}{n}); n=1,2,\cdots$$

每個 f_n 皆爲解析及不取 $0,1$, 由 Montel 定理得知, $\{f_n\}$ 爲 G 內正規。設 $\{f_{nk}\}$ 爲 $\{f_n\}$ 中一子序列及 f_{nk} 在 $\{z: |z| \leq \frac{R}{2}\}$ 一致收斂於 φ , 則 φ 在 G 中解析或 $\equiv \infty$ 。若 φ 爲解析, 設

$$M=\max\{|\varphi(z)|: |z|=\frac{1}{2}R\}$$

則

$$\begin{aligned}\left|f(\frac{z}{nk})\right| &= |f_{nk}(z)| \\ &\leq |f_{nk}(z)-\varphi(z)|+|\varphi(z)| \\ &\leq M \text{ 當} nk \text{充份大}\end{aligned}$$

由最大值原理, f 在一以原點爲同心的圓環, 就可導至 f 在除去原點鄰域內爲有界, 這與 $z=0$ 爲 f 的眞性奇異點不符, 剩下是 $\varphi \equiv \infty$ 。這時, f 在 $z=0$ 有一極點亦不符, 所以 $f \neq 0$ 及 $f \neq 1$ 是不可能的。至於在 V 中可無窮多次取值, 是並不難推證的。

記號 1: 記 f^m 是 f 的 m 次遞代 (iterates), 也即

$$f^m=\overbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}^{m} \quad f_0=id \text{ 爲恆等映射,}$$
其中 $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \cup\{\infty\}$是一複變函數。

以下所指的函數族除特別聲明外, 都是一給定的函數遞代產生的。

定義2: 設 $\{f^m\}$ 是由記號1所指的函數族, 全體 f 的正規點所組成的集合稱爲正規集合或 Fatou 集合, 記爲 $F(f)$ 。Fatou集合的補集 $\mathcal{C}-\mathcal{F}(\{)$ 稱爲 Julia 集合, 記作 $J(f)$ 。

顯然, Fatou 集合是開集, 而 Julia 集合是閉集。

動力系統 $\{f^m\}$ 的基本問題是研究任給一點, $z \in \mathcal{C}$ 的軌道 $z, f(z), f^2(z), \cdots$ 的性態, 尤其是當遞代趨向無限時的最終性態。當起始點取在 Fatou 集中與取在 Julia 集中, 軌道的性態有著很大的差異。前者的軌道爲收縮的, 故爲"穩定"的, 後者則向外擴散而顯得異常"紊亂"。Fatou 和 Julia 在研究過

程中, 發覺 Fatau 集和 Julia 集與週期點和定點 (不動點) 有著重要的關係。

定義 3: 一點 $z_0 \in \mathcal{C}$ 被稱爲 周期點(periodic point), 如果有一個正整數 n , 使得 $f^n(z_0) = z_0$ 。周期軌道被稱爲循環 (cycles)。當 $n = 1$ 時, z_0 稱爲定點 (或不動點), 若點 $z_0 \in \mathcal{C}$ 是一個周期點 (周期爲 n), 則值

$$\begin{aligned}\lambda &= \left[\frac{d}{dz}f^n(z)\right]_{z=z_0}\\ &= \prod_{j=1}^{n} f'(f^j(z_0))\end{aligned}$$

稱爲 z_0 (或其循環) 的特徵值。點 z_0 (或其循環) 稱爲

吸收性(attracting) $\Leftrightarrow |\lambda| < 1$
排斥性(repelling) $\Leftrightarrow |\lambda| > 1$
中性(neutral) $\Leftrightarrow |\lambda| = 1$

定理 1: 排斥型周期點屬於 Julia 集合, 而吸收型周期點屬於 Fatou 集合。中性周期點兩種可能性都存在, 但 $\lambda = \exp(2\pi i\alpha)$, 且 α 是有理數時, z_0 一定屬於 Julia 集。

有理函數 $(deg \geq 2)$ 和超越亞純函數 f 的 Julia 集合有如下相同的性質:

(i) $J(f) \neq 0$ 且是完全集 (pertect set)。

(ii) 在 f 的作用下完全不變, 即 $f(J) = J = f^{-1}(J)$
其中 $f^{-1}(J) = \{z \in \overline{\mathcal{C}} : f(z) \in 0\ J(f)\}$。

(iii) J=closure{repelling periodic points}。

(iv) 對於任意一點 $z_0 \in J$ 及其一領域 V, $z_0 \in V$, 存在一正整數 n, 使得 $m \geq n$ 時, $f^m(V \cap J) = J$。

(v) 對任意一點 $z_0 \in J$,
$J = \text{closure}\{f^{-m}(z_0)\}_{m=1}^{\infty}$。

超越函數的證明比有理函數複雜。1968 年, I.N.Baker 證明了超越整函數性質 (iii) 成立。其中用到了 Ahlfors 的一個深刻但不爲大家所熟知的定理。

設 $f(z)$ 在 $|z| < R$ 內解析; E_1, E_2, E_3 是在 W -平面上的單連通域。(simply connected region), ∂E_i 是 sectionally analytic Jordan 曲線, $i = 1, 2, 3$ 。$\overline{E}_i \cap \overline{E}_j = \phi$ 當 $i \neq j_0$ 這樣, 存在只依賴 E_i 而不依賴 $f(z)$ 的常數 c , 使

$$\frac{R|f'(0)|}{1 + |f(0)|^2} > c$$

在 $|z| < R$ 裡, 存在一領域 (Domain) K 使 f 將 K $1-1$ 地全映到 E_i 中之一個。

由 (i) 和 (iii) 可推出 f 有無窮個排斥型週期點。應用 Nevanlinna 的值分佈理論, 同樣也可推出這個結果。由於 Nevanlinna's 理論比較成熟, 同時更可以作出一函數族的正規條件。故我們相信這理論可應用在複動力系統中, 從而得出一些新的結果。

Chi-Tai Chuang(莊圻泰)[8]利用 Nevanlinna's 理論證明了性質 (i) 在超越整函數 (Transceucleutal entire fuuction) 時成立。他引用了 Zhang Guang - hou 的引理:

引理 1: 設 $f(z)$ 爲超越整函數, 記 $f^n = \overbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n}$, 再設 $k > 1$; 那樣,

存在數 $r_0 = r_0(f,k) > 1$, 對所有 $n \geq 1$ 和 $r > r_0$ 時, 有

$$T(r,f^n) > \frac{1}{2}(\frac{k}{3})^{n-1}T(r,f)。$$

這裡 $T(r,f)$ 是 Nevanlinna 特徵函數 (Characteristic function)。

此外, Nevanlinna 理論可用來證明 Fatou 的一個結果:

設 f 爲超越整函數, 除了最多一個正整數 n 外, $f(z)$ 有無限多個週期爲 n 的週期點。

性質 (iv) 告訴我們, 在 Julia 集合上遞代 f_m 對初始值的依賴性是極端敏感的, 並且 Julia 集合的局部與整體有自相似性 (Self-Similiaity)。

性質 (v) 是目前電腦生成 Julia 集合的方法之一。

在複解析動力系統中, Julia 集合的面積及 Hausdorff 維數也是一個重要問題。在有理函數上, 利用 Weierstrass $\wp$ - 函數可以證明出函數

$$f(z) = \frac{(z^2+1)^2}{4z(z^2-1)}$$

其 Julia 集是整個複平面。事實上大多數情形下, 有理函數的 Julia 集都不是整個複平面。在超越函數方面, 早先有 Fatou 一著名的猜想: 函數 e^z 的 Julia 集是全平面。這一猜想, 於 1981 年被 Misiurewicz 證明。後來, Devaney 將此推廣並證明了函數 $f_\lambda(Z) = \lambda e^Z$, 當 $\lambda > \frac{1}{e}$ 時, $J(f_\lambda) = \mathcal{C}$ 。更一般的結果請參看定理18,19。

一般來說, 若 $J(f) \neq \mathcal{C}$, 則它是無處稠密的。因此, 自然會問, 在 $J(f) \neq \mathcal{C}$ 時, $J(f)$ 的面積是否會是零? 人們猜想, 對於有理映射而言, Julia 集的面積爲零。這個問題甚至對於最簡單的非線性映射 $f_c : z \to z^2 + c \quad c \in \mathcal{C}$, 也是未完全解決的。最近, M. Lyubich [30] 利用拓撲方法, 給出了一些結果。由於所要求的數學工具很多, 有興趣的讀者請看該文章。

至於在 Fatou 集的研究上, 我們首先有以下的定義:

定義 4: 設 $F(f)$ 是 Fatou 集, $D \subset F(f)$ 是 $F(f)$ 的一個連通分支 (connected conponent), 如 $f^m(D)$ 也是 $F(f)$ 的一個連通分支, 並且當 $n \neq m$ 時有 $f^m(D) \cap f^n(D) = \phi$ 。我們稱 D 爲遊盪域 (Wandering Domain)。不然的話就稱 D 爲最終週期的。(Eventually Periodic)。

Fatou曾有一個猜想, 當 f 爲有理函數時 ($\deg f \geq 2$) ; f 的任意一個穩定域都不是遊盪域。這個猜想在80年代才被 D. Sullivan [34]證明。這定理的證明用到了 Teichmüller 理論及擬共形映射理論。至於超越函數而言, Bakcr[15]曾舉出一個超越整函數, 具有遊盪域的例子。

事實上, 有理映射與超越函數的動力系統的性質主要差別是遊盪域的存在性。

設 D 爲最終週期穩定域。在超越亞純函數上, I.N Baker[20]有了以下的分類:

(i) Fatou**域**: 域中點的軌道爲一個吸收型或中性循環所吸收。

(ii) Siegel**盤** : 穩定域共形等價 (Conformally Equivalent) 於一個單位圓而 f^n 在穩定域上的限制共軛於一個無理旋轉。

(iii) Herman**環**: D共形等價於環 $\Delta(r,1)=\{z:0<r<|z|<1\}$, f^n共形共軛於無理旋轉 $\xi\to e^{2\pi i\theta}\xi$, θ 是無理數, 即有交換圖表:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f^p"] \arrow[d, "\varphi"'] & D \arrow[d, "\varphi"] \\ \Delta(r,1) \arrow[r, "\xi = e^{2\pi i\theta}\xi"'] & \Delta(r,1) \end{tikzcd}$$

$\varphi:D\to D$ 是共形映照。

(iv) Baker**域**: 設 $z_0\in\partial D, f^{np}$ 在 D 內收斂於 z_0 , 但 f^{np} 在點 z_0 上不解析 (non-analytic)。

註: 有理函數最終週期穩定域的分類稱爲Sullivan 分類。

注意: (1) 有理函數的 Fatou 集中沒有 Baker 域; 而在超越整函數上, Baker 域中的點 z_0 唯一的可能就是無限遠點。

(2) 多項式中的 Fatou 集更加沒有 Herman 環。

證明 (2): 記 $P(z):\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 是一多項式。我們主要應用最大模原理, 假設存在一個 Herman 環 D_0, 及周期爲 p 的穩定域循環 $\{D_0,D_1,\cdots,D_{p-1}\}$, 則 D_0 共形共軛於圓環 $\Delta(r,1)$ 的無理旋轉, 且對 $0\le k\le p-1, P^k:D_0\to D_k$, 是共形映照。取 Jordan 閉曲線 ℓ , 分離 D_0 的兩個邊界分支, ℓ 的內部是有界域 V , V 內包含有 Julia 集 $J(p)$ 的點, 並且 $P^{np+k}(\ell)$ 在有界穩定域 D_k 內, 因此 $P^{np+k}(\ell)$ 一致有界。根據最大模原理, 定義於 V 的全純函數族 $\{P^{np+k}\}$ 在 V 一致有界。於是 $\{P^{np+k}\}$在V 內正規。$V\subset F(p)$, 這便與 V 內有 $J(p)$ 的點矛盾。$F(p)$ 不能有 Herman 環。

Herman環是 70 年代 M. Herman 發現的。要構造有理函數具有 Herman 環的例子是一個比較困難的問題。典型的例子是對有理函數

$$R(z)=\frac{e^{2\pi i\alpha}}{z}\left(\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right)^2$$

適當選取參數 α 與 a , 則 $R(z)$ 有包含單位圓周的 Herman 環。更多的例子可以於 Herman[23]中找到。

1987 年, Shischikura[26] 配合擬共形映射技巧地解決了 Sullivan 問題。他證明了有理函數的穩定域周期循環的個數 $\le 2(d-1)$ 。排斥性週期循環的個數 $\le 2(d-1)$ 。其中, $d=\deg(f)$ 。

定義 5: 設 f 是複函數。當 $f'(z_0)=0$ 時, $z_0\in\mathcal{C}$ 稱爲 f 的一臨界點 (critical point)

由 Sullivan 對於有理函數最終週期穩定域的分類, 我們有

定理 2: 如果有理函數 R 的臨界點都是預週期 (Pre-periodic), 則 $J(R)=\mathcal{C}$ 。

至於吸收性週期軌道和有理中性週期軌道的局部動力學性質, 請參看 Beardon.[5]。

有理函數動力系統的最新研究:

雖然有理函數動力系統發展了很久, 可是還有很多問題是尚未解決的。

人們對於二次映射族 $\{f_c(z) = z^2 + c : c \in \mathcal{C}\}$ 有著特殊的興趣。事實上, 這類函數可算是最簡單的函數了, (一次式沒什麼可研究)。我們希望知道這一函數族所形成的動力系統的結構穩定性, 分枝及其它性質。設 $h(z) = \alpha z + \beta \quad (\alpha \neq 0)$

$h^{-1} \circ f_c \circ h(z)$
$= (\alpha^2 z^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + c - \beta)/\alpha$

選取數 α, β和c , 就可以代表任意, 一個二元方程。所以研究這函數族就等價於研究任意一個二元方程的動力系統。

定義 6: $M = \{c \in \mathcal{C} : J(f_c)$是連通$\}$ M 稱爲 Mandelbrot 集。
Hubbard 與 Douady[21]對於 Mandelbrot 集得出了:

定理 3: (i) M 是連通的。
(ii) $\mathcal{C}|M$ 是連通的。
(iii) M 是緊致的。

他們更有以下的拓撲猜想

猜想:
(i) M 是局部連通?
(ii) 記 ∂M 是 M 的邊界, ∂M 是否局部連通?
(iii) ∂M 是否 Lebesgue 測度爲零?

可是直至現在還未能解決以上猜想。

考慮逆問題很多時都是很難解決的。我們在前一節裡, 知道有理函數 R 的臨界點全是預週期時, $J(R) = \mathcal{C}$ 。Herman 提出了一逆問題:

Herman猜想: 記R是所有有理複函數集, 設$L = \{f \in \mathcal{R}$: 所有的臨界點全是預周期點$\}$ 如果 f 是有理函數, $J(f) = \mathcal{C}$, f 是否屬於 L 或 closure(L)?

我們知道, 若 f 和 g 是有理函數, $\deg(f)$ 和 $\deg(g) \geq 2$ 。如果 f 和 g 可交換 (commute), 它們的 Julia 集一定相等。另一個逆問題就是研究兩有理函數 f 和 g , 如果它們的 Julia 集相等, 它們是否可交換?

這個逆問題顯然是未必成立的。 但 Baker 和 Eremenko [17] 給出了一個對於多項式時的結果。

記號 2:
(i) 記 $\mathcal{C}(P)$是所有和P可交換的多項式的集:
$\mathcal{C}(P) = \{Q \in P : PQ = QP\}$
(ii) 記 $\mathcal{F}(P)$是所有和P有相同 Fatou 集的多項式 : $\mathcal{F}(P) = \{Q \in P : F(P) = F(Q)\}$
(iii)$\Sigma(P)$是$J(P)$的對稱群 (Symmetry graup)
我們再記$\{Z \to aZ + b : |a| = 1\}$爲$\xi$。
則$\Sigma(P) = \{\sigma \in \xi : \sigma(J(P)) = J(P)\}$

定理 4: 如果 P 是多項式, 且 $\deg(P) \geq 2$, 我們有
(i) $\mathcal{C}(P) \subset \mathcal{F}(P)$
(ii) $\mathcal{C}(P) = \mathcal{F}(P)$ 如果當 $\Sigma(P)$ 是一平凡群 (trivial group)。

(i) 是我們已知的。(ii) 表明在逆方向上, 成立與否就依賴於 Julia 集的對稱性。

由於 Eremenko 和 Baker 又給了逆方向的必要條件。其後, A.F. Beardon [6] 推廣了他們的定理, 給出了逆方向一個充份條件。

定理 5: 設 P 和 Q 是多項式, $\deg(P) \geq 2$。$J(P) = J(Q)$ 的充份必要條件就是存在 $\sigma \in \Sigma(P)$, 使 $PQ = \sigma QP$ 。這樣,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(P) &= \{Q : QP = \sigma PQ \text{對某一} \sigma \in \\ &\quad \Sigma(P)\} \end{aligned}$$

證明用到了 Boettcher 函數和一些多項式中的 Julia 集的性質。在該篇文章中, 還有一有趣的結果:

推導: $J(z^2 + c) = J(z^2 + d)$ 的充份必要條件是 $c = d$ 。

證明:

$$\begin{aligned} \text{設 } P_1(z) &= z^2 + c, P_2(z) = z^2 + d\text{。} \\ P_1 \circ P_2 &= z^4 + 2z^2 d + d^2 + c \qquad \text{(i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma \circ P_2 \circ P_1 &= a(z^4 + 2z^2 c + c^2 + d) + b, \\ & \quad |a| = 1 \qquad \text{(ii)} \\ & \quad \text{比較(i) 和 (ii), 得} \\ & \quad a = 1, c = d, b = 0 \end{aligned}$$

在不是多項式的情形下, 逆方向還未有結果呢! 對於應用數學家而言, 求解方程的根是一個很重要的問題。事實上, 利用 Newton 法, 就能把求解方程等價於函數迭代而找其定點。我們應用已知對 Fatou 集和 Julia 集的理論, 就可以更加清楚其收斂性。Douady 和 Hubband[21]就是應用複變動力系統理論於有理函數上來處理求根的問題。1986年, M.Hurley[35]得出了對所有整數 $d \geq 3$, 存在多項式 $P, \deg(P) = d$, 其 Newton's 方法有 $d - 2$ 附加 (additonal) 的吸收點。這就說明, 在最簡單的多項式中, Newton's方法也不能保證收斂於其根。

後來, 發展了 Relax - Newton's 方法, 就是遞代

$$N_{p,h}(z) = z - h\frac{P(z)}{P'(z)} \quad 0 < h < 2$$

1989年, M.Flexor 和 P.Sentenac[36]證明了對差不多所有多項式 $P, \deg(P) = d \geq 2$, 存在 $h^* \in (0, 2)$, 除了 Lebsegue 測度爲 0 的點外, Relax - Newton's方法收斂於其根。

最近 Walter Bergweiler 等人 [33]推廣了以上結果到超越亞純函數上。有興趣的讀者請看該文章。

中國數學家對研究複變動力系統理論也有一定的貢獻。任福堯 (Fuyao REN)[12]研究函數類 $f_{d,c}(z) = z^d + c$ 的 Julia 集的最終性態。我們知道多項式和超越函數 λe^z 的動力系統有著很密切的關係。從 Devaney, R.L;Goldberg, L.R. & Hubbard 等人 [11] 對多項式逼近指數函數的動力系統的研究得知, 研究函數類 $f_{d,c}(z)$ 就更能清楚超越函數的性質。任福堯給了以下的定理:

定理 6: 設 c 爲固定值 ($|c| \neq 1$) 。在 Hausdorff 維中, Julia集 $J(f_{d,c})$ 趨向於 S^1, 當 d 趨向無限大。

如果 $|c| = 1$ 時, 有下列的性質:

定理 7:設 $c = e^{2\pi i\theta}$,$\theta = p/q$,$(p, q) = 1$ 。在 Hausdorff 維中, Julia集 $J(f_{d,c})$ 不是趨向於 S^1, 當 d 趨向無限大時的充份和必要條件是下列任意一 條件成立:

1. $p = 3p' + 1 \quad q = 3(6q' + 5)$
2. $p = 3p' + 2 \quad q = 3(6q' + 1)$
3. $p = 3p' + 1 \quad q = 3(6q' + 1)$
4. $p = 3p' + 2 \quad q = 3(6q' + 5)$ p', q' 是任意非負整數。

在動力系統中, 多個函數迭代的思想是由周維元和任福堯 [29]首先發展的。他們記 $\mathcal{F} = \{\{_\infty, \cdots, \{_\Updownarrow\}$ 是有理函數的有限集。

$$\Sigma m = \{(j_1, \cdots, j_n, \cdots) : j_1 \in \{1, 2, \cdots, m\}$$
$$i = 1, 2, \cdots\}$$

定義迭代序列 $\{W^n_\sigma\}, \sigma = (j_1, \cdots, j_n, \cdots) \in \Sigma m$ 爲

$$\begin{aligned} W^1_\sigma(z) &= f_{j1}(z) \\ W^2_\sigma(z) &= f_{j2} \circ f_{j1}(z) \\ &\vdots \\ W^{n+1}_\sigma(z) &= f_{jn+1} \circ W^n_\sigma(z) \\ &= f_{jn+1} \circ f_{jn} \circ \cdots \circ f_{j1}(z) \end{aligned}$$

和定義逆序列 (Inverse Sequence) $W^{-n}_\sigma(z)$ 爲

$$\begin{aligned} W^{-n}_\sigma(z) &= (W^n_\sigma)^{-1}(z) \\ &= f^{-1}_{j1} \circ f^{-1}_{j2} \circ \cdots \circ f^{-1}_{jn}(z) \end{aligned}$$

我們稱這遞代爲隨機遞代。

在隨機遞代中, $z_0 \in \overline{\mathcal{C}}$ 稱爲穩定點, 如果存在一領域 $V, z_0 \in V$, 對所有 $\sigma \in \Sigma m$和$n \geq 1, W^n_\sigma(z)$ 在 V 上是可妥當的 (Well-defined) 和 $\{W^n_6(Z)|_V\}$ 是正規族。我們稱這是 Fatou 集, 記 $F(\mathcal{F})$ 。$F(\mathcal{F})$ 的補集記 $J(\mathcal{F})$, 稱爲 Julia 集。

$z_0 \in \overline{\mathcal{C}}$ 稱爲週期點, 如果存在 $\sigma \in \Sigma m$ 和整數 $n, W^n_\sigma(z_0) = z_0$ 。記 $\lambda = (W^n_\sigma)'(z_0)$ 。λ 稱爲系統 $\mathcal{F}$ 的特徵值。當 $|\lambda| > 1$ 時, 我們稱 z_0 爲排斥性週期點。周和任在該文章內有下幾個結果:

定理 8: 對所有 $\sigma \in \Sigma m, n \geq 1$,

$$W^n_\sigma(F(\mathcal{F})) = \mathcal{F}(\mathcal{F})$$
$$W^{-n}_\sigma(J(\mathcal{F})) = \mathcal{J}(\mathcal{F})$$
其中, $F(\mathcal{F})$爲開集, $\mathcal{J}(\mathcal{F})$爲閉集。

定理 9:$J(\mathcal{F})$ 是完全集。

定理 10:當 $J(\mathcal{F})$ 不是複平面時, $J(\mathcal{F})$ 可以有內點。

定理 11:$J(\mathcal{F})$=closure{排斥性週期點}。

定理8,9,11和以往的理論是相似的。但定理9表明, 隨機遞代的動力系統和普通遞代的動力系統有著一定的不同。隨機遞代比普通的遞代更爲複雜。很多基本的問題還是未解決的。

超越函數動力系統的最新研究:

超越函數動力系統是現今最熱門研究的課題之一。研究這門學問的人, 不單是分析學家, 還有拓撲學家, 應用數學家等。他們有著不同的方法來研討, 使這門學問更爲豐富, 同時更產生了更多的問題。

事實上, 研究超越函數動力系統有幾個大方向, 其主要是研究一些有理函數動力系統中沒有發生的問題, 如遊盪域 Baker 域等。超越函數的性質和有理函數是有很大分別的。如在超越函數中, 可以存在無限多的漸近值 (asymptotic value) 和臨界值 (critical value), 但有理函數就只得有很多這類型的值。除此之外, 超越函數還有 Picard 例外值。數學家針對這些不同, 給超越函數動力系統作了些較全面性的研究。

自從 I.N Baker[15]建造出一超越函數具有遊盪域後, 數學家自然希望可以找到一類超越函數沒有遊盪域的。以下是一些記號及定義:

定義 7: (i) 一個值 $a \in \overline{\mathcal{C}}$ 被稱爲 f 的漸近值 (asymptotic value), 如果存在一曲線 Γ 伸向 ∞ , 使得 $a = \lim_{\substack{Z\to\infty \\ Z\in\Gamma}} f(z)$ 。

(ii) 一個值 $c \in \overline{\mathcal{C}}$ 被稱爲 f 的臨界值 (critical value), 如果有一點 $z_0 \in \mathcal{C}$, 使得 $f(z_0) = c$, 且 $f'(z_0) = 0$ 。

(iii) 設 f 是超越整函數, f^{-1} 的奇異值是指 f 的漸近值或臨界值。f^{-1} 的奇異值全體記作 sing f^{-1} 。

(iv) 一個超越整函數稱爲 Σ 類, 如果 sing f^{-1} 是有窮的 (finitely many)。(注意這性質和有理函數是相同的)。

Σ 類包括了很多熟知的函數, 如 $\exp(z)$, $\cos z$ 等都是 Σ 類的。若 g 與 h 都是多項式, 則

$$f = \int^z g(\xi) \exp h(\xi) d\xi \in \Sigma。$$

定理 12: 設 $f \in \Sigma$, 則 $F(f)$ 沒有遊盪域 (Wandering Domain)。

這重要的定理是1986年由 Goldberg 和 L. Keen [22]給出的。他們用到了擬共形映照的理論來證明。較早前, Baker [16]曾對範圍較窄的一類函數給出了證明。

現在, 數學家希望得到更廣的函數類使定理12成立。

定義 8: 一個超越整函數稱爲 B 類, 如果 sing f^{-1} 有界。顯然, $\Sigma \subset B$ 。

猜想: 如果 $f \in B$, 則 $F(f)$ 沒有遊盪域。

最近, Walter Bergweiler 等人 [32]應用了基本的複分析理論, 證明了如果 $f \in B \cap A$, 則 $F(f)$ 沒有遊盪域。函數 A 類是 $J(f) \cap E' = \phi$, 其中 E' 是 $\cup_{n=1}^{\infty} f^n(\text{sing} f^{-1})$ 的derived 集。

雖然以上猜想還未完全證實, 但這促使數學家增加了對 Σ 和 B 類函數的興趣, 同時更發現了很多它們的性質。

首先, 假設 f 是超越整函數, $F(f)$ 可以有無限多個或一個無界分支 (Unbouuded component) 也沒有, 而當 $F(f)$ 的有界分支同時是複連通時, 它一定是遊盪域。I.N.Baker[14]證明了:

定理 13: 設 f 是超越整函數, D 是 Futou 集的複連通分支, 這樣

(i) f^n 在 D 內的任意緊緻集一致收斂於無限大。

(ii) 對所有在 D 內不可收縮的 Jordan 曲線 γ, 當 n 足夠大時, $\mathrm{Ind}_0(f^n\gamma) \neq 0$

定理 14: 設 f 是超越整函數, $F(f)$ 的所有無界分支一定是單連通的。

定理 15: 設 f 是超越整函數, $D \subset F(f)$ 不是遊盪域, 這樣 D 一定是單連通的。

證明: 如果 D 是無界分支, 由定理14, 得知 D 是單連通的。假設 D 是有界分支, f^n 在 D 內一致有界, 由定理13得知 D 是單連通。

Baker在同一篇文章中給了一個猜想。

Baker**猜想**: 設 f 爲超越整函數, D 是 $F(f)$ 的分支, 如果 $f(D) = D = f^{-1}(D)$, 則 $F(f) = D$ 。

A.E. Eremenko 和 M. Yu Lyubich [1] 在函數類 Σ 時給出了證明, 而更廣的函數類是正待研究中。

對於函數類 B, 有這樣的性質:

定理 16: 設 $f \in B$, 有

(i) 在 $F(f)$ 內的所有分支都是單連通的。

(ii) $Z \in F(f)$,$\{f^m(Z)\}_{m=0}^{\infty}$ 不會趨向無限大。

推導: $f \in B, F(f)$ 是沒有 Baker 域的。

這推導由定理16(i) 和 Baker 域的定義中立即推出。

在亞純函數上, 是否存在函數類是沒有遊盪域也是研究的重點。最近, Devaney 和 L. Keen[10]有了一些結果。

定義 9: 設 f 是超越亞純函數, f 的 Sch- warz 導數是

$$\{f, z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

定理 17: 設 f 是超越亞純函數, 如果 f 具有多項式 Schwarz 導數, 則 $F(f)$ 是沒有遊盪域。

備註:

(i) 此函數包括了很廣的函數, 如 $\lambda \tan z$, $\lambda \exp z$ 和 $\int^z \exp(R(u))du, R$ 是多項式等。

(ii) 如果函數具有多項式 Schwarz 導數, f 就只有有限多漸近值和沒有臨界值。

(iii) 首先研究此函數類的是值分佈論創始人 Navanlinna[24]。在値分佈理論中, 函數具有多項式 Schwarz 導數的研究也是很重要的。

在 Fatou 猜想 ($J(e^z) = \mathcal{C}$) 的推動下, 人們對函數的 Julia 集合是整平面具有一定的興趣。加上對 Σ 類函數的廣泛研究, 1986 年, Goldberg 和 L.Keen[22]證明了:

定理 18: 設 $f \in \Sigma$, 如果對所有 $a \in \mathrm{sing}\ f^{-1}$, $f^n(a) \to \infty$ 時, 則 $J(f) = \mathcal{C}$。

其後, 很多的數學家對某些特別的函數也作了很深入的研究。Xiao Ying Dong[28]於1991 年, 研究函數

$$E(z) = e^{\lambda_1 e^{\lambda_2 \cdots e^{\lambda_n z}}}, \text{ 得}$$

定理 19: (i) 如果a ∈sing(E^{-1}),$E^n(a)$ $\to \infty$ 時, 有 $J(E)=\mathcal{C}$。

(ii) 如果所有 $\lambda_i>0$, $E^n(0)\to\infty$ 時, 有 $J(E)=\mathcal{C}$。

事實上, 由於 $E(z)\in\Sigma$, (i) 是定理18的例子。爲了簡單起見, 我們對定理19作一扼要的證明; 定理18的證明方法是大致相同的。

要證明定理19, 我們要引用 I.N.Baker[14]的一些結果。

定理 20: 設 D 爲一有界開域。假設 $f:D\to D$

(i) f 在 $\overline{D}$ 內解析。

(ii) $\{f^n\}_{n=0}^{\infty}$ 沒有子序列趨向於恆等函數 (identity map), 則 $\{f^n\}_{n=0}^{\infty}$ 在 D 內趨向於常數 $\alpha\in\overline{D}$ 。

記號 3: (i) $E=\{S\in \text{sing}(f^{-1}):f^n(S),\, n=0,1,2,\cdots\}$。

(ii) $\mathcal{L}=\overline{E}\cup\{\infty\}$。

定理 21: 如果 $\{f^n\}_{n=0}^{\infty}$ 的子序列在 Fatou 集 $F(f)$ 的分枝內趨向於常數 α , 則 $\alpha\in\mathcal{L}$。

定理 22: 如果 $\mathcal{L}$ 沒有內點, 同時 $C|\mathcal{L}$ 是連通的。這樣, 所有 $\{f^n\}_{n=0}^{\infty}$ 的子序列在 $F(f)$ 的任何分支中都趨向於常數。

證明定理 19: 由於 $E^{-1}(z)$

$$=\frac{1}{\lambda_n}\ln\left(\frac{1}{\lambda_{n-1}}\ln\left(\cdots\left(\frac{1}{\lambda_1}\ln z\right)\cdots\right)\right)$$

所以 sing$E^{-1}=\{0,1,e^{\lambda_1},e^{\lambda_i e^{\lambda_2}},\cdots,$ $e^{\lambda_1 e^{\cdots e^{\lambda_{n-1}e^{\lambda_n}}}}\}$ 是有限的。

所以$E\in\Sigma$。

$\mathcal{L}=\text{closure }\{E^k(S),S\in\text{sing}E^{-1}:k=1,2,\cdots\}$

$$E^k=\overbrace{E\circ E\circ\cdots\circ E}^{k}$$

顯然, $\mathcal{L}$ 是沒有內點, 和 $\mathcal{C}\backslash\mathcal{L}$ 是連通的。

由定理21和22, 得知 $\{E^k\}_{k=0}^{\infty}$ 在 Fatou 集內趨向常數 β, $\beta\in\mathcal{L}$ 或 ∞。

假設 $F(E)\neq\infty, V$ 是 $F(E)$ 的分支, 定理12得知 E 沒有遊盪域。所以存在非負整數 ℓ 和 m, 使 $G=E^m(V), g=E^{\ell}, g(G)=G$ 。應用定理20, $\{g^k\}_{k=0}^{\infty}$ 在 G 內趨向一常數 $\alpha\in\overline{G}$。所以$g(\alpha)=\alpha, ie, \alpha$ 是週期點。現在, 設 α 是有限數, $\Rightarrow$ $\alpha\in\mathcal{L}$, 所以 $\lim_{k\to\infty}E^k(\alpha)=\infty$ 。所以, α 不可能是週期的, 矛盾。, 故 $\alpha=\infty$。$\Rightarrow$ $\lim_{k\to\infty}E^{k\ell}(z)=\lim_{k\to\infty}g^k(z)=\infty$ 在 G 上一致收斂, 當 $j\geq 0$ 時, 我們有

$$\lim_{k\to\infty}E^{k\ell-j}(z)=\infty,\ \text{在}G\text{上一致收斂},$$

對所有序列 $\{E^{km}\}_{m=0}^{\infty}\subset\{E^k\}_{k=0}^{\infty}$, 存在整數 $j\geq 0$, 使子序列 $\{E^{kmt}\}_{t=0}^{\infty}\subset\{E^{km}\}_{m=0}^{\infty}$ 是 $\{E^{k\ell-j}\}_{k=0}^{\infty}$ 的子序列, 所以有 $\lim_{t\to\infty}E^{kmt}\,(z)=\infty,\, z\in G$。

這樣, 我們可以總結 $\{E^k\}_{k=0}^{\infty}$ 趨向無限大。

記 $E_{\lambda i-\lambda n}(z)=e^{\lambda_i e^{\lambda_{i+1}\cdot^{\cdot^{e^{\lambda_n z}}}}}$

$(E')(z)=\prod_{i=1}^n\lambda_i E_{\lambda_i\cdots\lambda_n}(z)$

同時,

$$\begin{aligned}(E^k)'(z) &= \prod_{j=1}^{k}(E_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n})'(E^{j-1}_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}(z))\\ &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{k-1}\lambda_i^k E_{\lambda_i,\cdots,\lambda_n}(E^{j}_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}(z))\end{aligned}$$

所以,

$$\ln|(E^k)'(z)| = k\sum_{i=1}^{n}\ln|\lambda_i| + \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n}\ln\left|E_{\lambda_i,\cdots,\lambda_n}(E^j_{\lambda_i,\cdots,\lambda_n}(z))\right|$$

由於

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left|E^{k+1}(z)\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|E(E^k(z))\right| \\ &= \lim_{k\to\infty}\left|e^{\lambda_1 E_{\lambda_2,\cdots,\lambda_n}(E^k(z))}\right| \\ &= \infty\end{aligned}$$

對所有 $z\in G$, 我們有

$$\lim_{k\to\infty}\left|E_{\lambda_2,\cdots,\lambda_n}(E^k(Z))\right| = \infty。$$

同樣的, 我們有

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\left|E_{\lambda_i,\cdots,\lambda_n}(E^k(z))\right| = \infty \quad i=1,\cdots,n \\ &\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\ln\left|(E^k_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n})'(z)\right| = \infty。\end{aligned}$$

現在, Bloch - Landau 定理給出, 如果 $D\subset G$, $E^k(D)$ 包括了任意大的圓。由於 $J(E)\neq\phi$, 所以存在整數 $k_0>0$, 使

$$E^{k_0}(D)\cap J(E)\neq\phi$$

這是不可能的, 由於 $D\subset G\subset F(E)$
所以 (i) 完全證實。
證明 (ii) 是顯然的。

其後, Cheol Min Jang[7]對函數類 $f_\mu(z) = z\exp(z+\mu)$, 得了以下結果

定理 23: 如果 $\mu\in(-\infty,2)\cup(2,\mu_*)$, 其中 $\mu_*<2.5$, 我們有 $J(f_\mu)=\mathcal{C}$ 。

現在, 人們正研究很多更複雜函數類如 e^{az+b^2}, $(a+b)e^z$ 等的動力系統及在什麼情形下, Julia 集是整平面等的問題。

另一類研究就是製造具有遊盪域的超越函數。雖然我們知道存在超越函數其具有遊盪域, 但是對其幾何或拓撲性質是所知很少的。例如是否存在單連通、複連通、有界、無界的遊盪域等問題, 在數年前還是未知的。於是, 最近人們便嘗試找出或製造出超越具有特定拓撲性的遊盪域。

例如 Herman[23]給出了一個具有單連通遊盪域的例子。

他考慮函數 $g(z)=z-1+e^{-z}$ 。

不難看見, $z_n=2\pi in$ 是 g 的吸收性定點。

定義 $D_n=\{z\in\mathcal{C}: g^k(z)\to z_n k\to\infty\}$

由初等的理論得知 D_n 是單連通的。

由考慮函數 $T(z)=z+2\pi i$, 可得 $T(g)=g(T)$, ie, T 和 g 是可交換的。

同時 $\begin{cases}T(F(g))=F(g)\\ TD_n=D_n+1\end{cases}$

$F(g)$ 是 g 的 Fatou 集。

現在, 設 $f(z)=g(z)+2\pi i$, ie $f=T\circ g$。於是 $fD_n=D_{n+1}$。

如果 z_0 是 g 的排斥性週期點, 則 $g^p(z_0)=z_0$, 同時它的特徵值 $\lambda=\left[\frac{d}{dz}g^p(z)\right]_{z_0}$, $|\lambda|>1$。

$$\begin{aligned}f^{p_n}z_0 &= T^{p_n}\left(g^{p_n}(z_0)\right)=T^{p_n}z_0 \\ &= z_0+(2\pi i)pn=O(n)\end{aligned}$$

$n\to\infty$(註:p爲 g 的一週期)

$$\text{和 } (f^{p_n})'(z) = (T^{pn})'(z)(g^{pn})'(z) = \lambda^n$$

所以它的球導數 (Spherical derivative)

$$\frac{|(f^{pn})'|}{1+|f^{pn}|^2} \to \infty \text{ 當 } n \to \infty$$

所以, $\{f^m\}$ 在 z_0 的附近不正規,

$$z_0 \in J(f) \quad , ieJ(g) \subset J(f)\text{。}$$

反方向的證明, 其方法也是差不多的。最後, 可得 $J(g) = J(f)$ 。

由此可知, D_n 是 f 的單連通遊盪域。

注意: 在 D_n 內, 任意一 $z' \in D_n$, $f^n(z') \to \infty$ 當 $n \to \infty$。I.N. Baker[16]證明存在一超越整函數具有複連通遊盪域。同時, 在域內任意一點 z', $f^n(z') \to \infty$ 當 $n \to \infty$ 。這證明就是結合了定理13和定理15得出的。所以,很自然的問題就是希望找出一超越函數具有遊盪域, 但在域內存在使得 $\{f^n\}$ 不趨向於無限的點。

A. E. Eremenko 和 M. Yu Lyubich[2]證明了。

定理 24: 存在一超越整函數具有遊盪域 V , 使所有起源於 V 的軌道 $\{f^n z\}_{n=0}^{\infty}$ 有無限多的極限點。

在這定理中, $\{f^n\}$ 在 V 內的極限函數是常數, 而這些極限常數的集是一無限集。證明引用了 Runge's 定理和一些逼近理論。

最近, I.N. Baker, J Kotus 和 Lü Yinian [19] 在超越亞純函義上, 製造出一些遊盪域的例子。

定理 25: 設 $k \in N$, 存在 f_i (此 f_i 不表示函數的 i 次遞代) 是超越亞純函數 $(1 \le i \le 4)$, 同時, f_i 至少有一個極點 (pole)。則

(i) 在 $F(f_1)$ 內, 存在一有界 $k-$連通的遊盪域。

(ii) 在 $F(f_2)$ 內, 存在一無界 $k-$連通的遊盪域。

(iii) 在 $F(f_3)$ 內, 存在有界遊盪域同時是無限連通性 (Infinite connectivity)。

(v) 在 $F(f_4)$ 內, 存在無界遊盪域, 同時是無限連通性。

證明也是用了 Runge's 定理和一些逼近的理論。

複動力系統理論還存在著很多未解決的問題。如 $f \in \Sigma$, g 是超越整函數使 $g(f) = f(g)$; g 是否會是 Σ 類函數, 同時, $J(f)$ 是否等於 $J(g)$? 我們在超越整函數上, 得到了如果 f, g 的 Fatou 集全是遊盪域, 同時對 $F(f)$和$F(g)$ 上所有的點的遞代不趨向無限大, 這樣, 有 $J(f) = J(g)$ 。一個很自然的問題就是是否存在一超越整函數其 Fatou 集全是遊盪域。

又設 V 是一連通域, $f^n|_v \to \infty$ 當 $n \to \infty$ 。是否存在 $\xi \in \text{sing}(f^{-1})$ 使 $f^n(\xi) \to \infty$?

更多的問題請參看由楊重駿主編的1993年, 香港國際複分析及其應用會議的論文專輯,[37]

參考資料

1. A. E. Eremenko and M. Yu. Lyubich, Iterates of entire functions, Doke, Akad, Nauk SSSR, 279(1984), 25-27.
2. A. E. Eremenko and M. Yu. Lyubich, Examples of entire functions with pathological dynamics, J. London Math. Soc. (2), 36 (1987), 458-468.
3. A. E. Eremenko and M. Yu. Lyubich, The dynamics of analytic transformations, Leningard Math, J. Vol 1 (1990), No 3.
4. A. E. Eremenko and M. Yu. Lyubich, Dynamical properties of some classes of entire functions, preprint; State Univ. of New York Stony-Brook, 1990/4.
5. A. F. Beardon, Iteration of Rational functions, Springer, 1991.
6. A. F. Beardon, Symmetry of Julia sets, Bull, London Math. Soc. 22 (1990), 576-582.
7. Cheol Min Jang, Julia set of the function $exp(z+m)$, Tôhoku Math. J. 44 (1992), 271-277.
8. Chi - Tai Chuang, A Simple proof of a Theorem of Fatou on the iteration and fix-points of transcendental entire functions, Contemporary Mathematics, Vol 48, 1985.
9. Devaney R. L. and Krych M, Dynamics of $exp(z)$, Ergodic theory and dynamical system 4 (1984), 35-52.
10. Devaney R. L and Linda Keen, Dynamics of Meromorphic maps: maps with polynomial Schwarzian derivative.
11. Devaney R. L, Golaberg L. R. and Hubbard J, Dynanical approximation to the exponential maps by polynomials, Technical report MSRI, 10019-86, 1986.
12. Fuyao REN, Some results in complex dynamics and related poblems, Preprint.
13. I. N. Baker, Repulsive fixpoints of entire functions, Math. Z, 104 (1968), 252-256.
14. I. N. Baker, Limit functions and set of non-normality in itereation theory, Ann. Acad. Sci. Fenn (ser A I), 467 (190), 1-11.
15. I. N Baker, An entire function which has wandering domains, J. Austral Math. Soc. (Ser A), 22 (1976), 173-176.
16. I. N Baker, Wandering domains in the iteration of entire functions, Proc. London Math. Soc. (3), 49 (1984), 563-576.
17. I. N. Baker and A. Eremenko, A Problems on Julia sets, Ann. Acad. Sci. Fenn, 12 (1987), 229-236.
18. I. N Baker, J. Kotus and LüYinian, Iterates of meromorphic function I, Ergod Th. & Dynamical System (1991), 11, 241-248.
19. I. N. Baker, J. Kotus and Lü Yinian, Iterates of meromorphic function II: Examples of Wandering Domains, J. London Math. Soc., (2) 42 (1990), 267-278.
20. I. N. Baker, J. Kotus and Lü Yinian, Iterates of meromorphic function III: Preperiodic Domains, Ergod Th. & Dynam Sys. (1991), 11, 603-618.
21. J. Hubbard, A. Douady, Iteration der polynômes quadratiques complexes, C. R Acad Sci Paris, 294 (1982), 123-126.
22. L. Goldberg and L. Keen, A finiteness theorem for a dynamical classes of entire functions, Ergod Theony Dynamical Systems 6 (1986), 183-192.

23. M.R. Herman, Exemples de fractions rationnelles ayant ure orbite dense sur la sphere de Riemann, Bull. Soc. Math. France 112 (1984), 93-142.
24. Nevanlinna R, Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten, Acta Math 58 (1932).
25. P. Blanchard, Complex analytic Dynamics on the Riemann Sphere Bull. Amer. Math. Soc., 11 (1984), 85-141.
26. Shischikura, On the quasi-conformal surgery of rational functions, Ann. Sci. École Norm Supp. (4) (20) 1987, 1-29.
27. Xiao Ying Dong, Iteration of a compostion of exponential functions, Tran. Amer Math Soc Vol 328 No 2, 1991.
28. Misiurewicz, M. On Itertes of e^z, Ergodic Theony and Dynamical system 1 (1981), 103-106.
29. Zhou, W and Ren F, The Julia set of random iteration system, Preprint.
30. M. Lyubich, "On the Lebesgue measure of the Julia set of a quadratic polynomial, Preprint.
31. B. Bielefeld and M. Lyubich "Problems in Holomorphic Dynamics", Preprint.
32. Walter Bergweiler, Mako Haruta, Hartje Kriete, Hans-Günter meier and Norbert Terglane, "On the limit functions of iterates in wandering domains" Preprint.
33. Walter Bergweiler, F. Von Haeseler, H. Kriete, H. G. Meier and N. Terglane, "Newton's Method for Meromorphic functions", Compley Analysis and its Applications, Proc. Hong Kong International Conference, Jan 1993, Vol. 305, Pitnam Research Note of Mathematics, 1994.
34. D. Sullivan, "Quasi-conformal homeomorphisms and dynamics I. Solution of the Faton-Julia Problem on wandering Domains". Ann. of Math. (2), 122 (1985), 401-418.
35. M. Hurley "Multiple Attractors in Newton's Method", Ergodic Theory and Dynamical Systems 6 (1986), 561-569.
36. M. Flexor, P. Sentenac "Algorithmes de Newton's généralises" CRAS 308 (1989), 445-448.
37. C. C. Yang and etc., Complex Analysis and its Applications, Vol. 305, Pitnam Research Note of Mathematics series, 1994.

—本文第一作者任教於香港科技大學數學系，潘建強爲博士班學生—