從“分牛傳說”引發的聯想

殷堰工

四大文明古國之一的印度流傳著這樣一段趣事: 古代有一個老人在彌留之際, 對三個兒子說: “我辛苦了一輩子, 祇有19 頭牛, 你們自己去分吧! 老大得總數的 $\frac{1}{2}$, 老二得總數的 $\frac{1}{4}$, 老三得總數的 $\frac{1}{5}$”。說完便與世長逝了, 按照印度的教規, 牛被視作神靈, 是不允許屠宰的, 必須整頭的分, 但先人的遺囑更是要遵從的。那麼, 這 19 頭牛應該怎麼分呢? 這可難住了三兄弟。他們爲之請教了衆多的行家高手, 仍不得其解, 官府對此也無能爲力。最後, 倒是一個牽牛老農解決了它。老農的方法是: 把自己的一頭牛借給三兄弟, 湊成 20 頭牛, 老大分 $\frac{1}{2}$ 得 10 頭, 老二分 $\frac{1}{4}$ 得 5 頭, 老三分 $\frac{1}{5}$ 得 4 頭, 餘下的 1 頭再還掉。

眞是個絕頂聰明的辦法。一個曾使多少人絞盡腦汁無法解決的問題, 竟這樣乾脆利落地被圓滿解決了, 此段佳話, 自然廣爲傳頌, 成爲美談。

問題是解決了, 但很快有人對這個分牛方案提出了疑議: 老大似乎只該分 9.5 頭, 最後他怎麼得了 10 頭呢? 讓我們來作一個分析:

我們知道, 19 頭牛中, 老大分 $\frac{19}{2}$ 頭, 老二分 $\frac{19}{4}$ 頭, 老三分 $\frac{19}{5}$ 頭, 加起來是 $19(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})=\frac{19\times 19}{20}<19$, 兄弟三人並沒有把牛分完, 還餘下了 $19\times(1-\frac{19}{20})=\frac{19}{20}$(頭)。若對餘下的 $\frac{19}{20}$ 頭牛按照遺囑再分的話, 老大分 $\frac{1}{2}\times\frac{19}{20}$ 頭, 老二分 $\frac{1}{4}\times\frac{19}{20}$ 頭, 老三分 $\frac{1}{5}\times\frac{19}{20}$ 頭, 這樣, 又餘下 $\frac{19}{20}\times(1-\frac{19}{20})=\frac{19}{20^2}$ (頭) 沒有分完。於是, 按遺囑再分下去, 老大分 $\frac{1}{2}\times\frac{19}{20^2}$ 頭, 老二分 $\frac{1}{4}\times\frac{19}{20^2}$ 頭, 老三分 $\frac{1}{5}\times\frac{19}{20^2}$ 頭, 仍未分完, 還餘 $\frac{19}{20^2}(1-\frac{29}{20})=\frac{19}{20^3}$ (頭) $\cdots\cdots$

從理論上來說, 這樣分下去, 萬世不竭。但每次所餘的越來越少。這在當時人來說, 是無法解釋的, 正如古希臘的龜兎賽跑一樣, 祇是我們知道龜兎賽跑是齊諾悖論而已。這個問題涉及到了被稱作“數學家的迷宮”的“無限”問題。隨著數學的進步, 人們對齊諾悖論的認識不斷深化, 澄清了疑問。齊諾悖論利用了人們常識性的無限段時間的總和以及無限段路程的總和祇能爲無限的錯誤觀念, 否認了無限可以轉化爲有限, 因而把當時的人誘入陷井。同樣, 上面的分牛問題也可以變無限爲有限, 無限個數相加可以得到有限的和。這只需利用無窮遞縮等比數列的求和公式。即對於數列 $a, aq, aq^2, \cdots, aq^{n-1}, aq^n, \cdots |q|<1$, 通過公式 $\frac{a}{1-q}$ 便可求得它的無限多項之和。現在,

我們無妨設老大分得 S_1 頭牛, 則

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{19}{2}+\frac{19}{2\cdot 20}+\frac{19}{2\cdot 20^2}+\frac{19}{2\cdot 20^3}+\cdots \\ &= \frac{\frac{19}{2}}{1-\frac{1}{20}}=10, \end{aligned}$$

這說明老大分 10 頭符合遺囑。

同樣, 設老二分牛 S_2, 則

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{19}{4}+\frac{19}{4\cdot 20}+\frac{19}{4\cdot 20^2}+\frac{19}{4\cdot 20^3}+\cdots \\ &= \frac{\frac{19}{4}}{1-\frac{1}{20}}=5, \end{aligned}$$

這樣, 老二分 5 頭也是合理的。

再設老三分牛 S_3 頭, 則

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{19}{5}+\frac{19}{5\cdot 20}+\frac{19}{5\cdot 20^2}+\frac{19}{5\cdot 20^3}+\cdots \\ &= \frac{\frac{19}{5}}{1-\frac{1}{20}}=4, \end{aligned}$$

可見, 老三分 4 頭是公平的。

雖然, 老農並沒有用這種方法處理, 但他的答案卻是不容置疑的。"分牛傳說"給我們的啓示是"無限"中有"有限"時, 它使人聯想到我們接觸過的有關問題。

例1: 假若要證明一個命題對於所有的自然數都成立, 如果我們分別對 $n=1,2,3,\cdots$ 進行驗證, 這個證明是永遠無法完成的。即使你證明了 n 從 1 到 1000 都成立, 那麼 $n=1001$ 呢? 仍然沒法保證。我們不能對無限多個自然數逐一加以驗證, 只能通過有限的步驟來完成這個證明。實際上, 只需要兩步: (1) 證得 $n=1$ 時命題成立; (2) 假設 $n=k$ 時命題成立, 則可推出 $n=k+1$ 時也成立。第 (2) 步的實質是建立一種遞推關係。這樣, 由 $n=1$ 成立 $\Rightarrow n=2$ 成立 $\Rightarrow n=3$ 成立 $\cdots\Rightarrow$ 任何自然數成立。這正是數學歸納法的方法和原理。

例2: 現在的小學生都知道圓周長公式 $C=2\pi r$, 圓面積公式 $S=\pi r^2$。可是, 最初並沒有計算公式, 古希臘的阿基米德和我國魏晉時代的劉徽等人爲了計算圓周長這個有限量, 不得不作出一系列圓內接正多邊形, 隨著正多邊形邊數的增多, 多邊形的周長越來越逼近圓的周長。當多邊形的邊數無限增大時, 其周長也就趨於圓周長了。人們正是通過計算邊數逐漸增加圓內接正多邊形的周長這一無限過程, 來認識圓周長這一有限量的, 並由此算出了圓周率 π 的近似值。

圓面積公式的推得我們延用十五世紀的紅衣主教尼古拉斯的方法, 推證於下:

首先, 尼古拉斯通過無窮分割得出了無窮小三角形 OAB (其中 $\widehat{AB}$ 是無窮小量)。

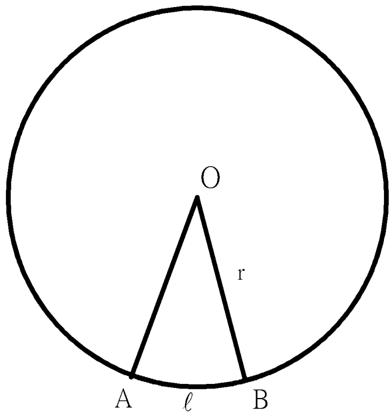

圖1

其次, 尼古拉斯指出, 由於AB是無窮小量, 無窮小三角形就既可看成直邊三角形, 又可看成曲邊三角形。由於 $\triangle OAB$ 是直邊三角形, 它的面積就等於 $\frac{1}{2}\ell r$ (其中, ℓ 是 AB 的長, r 是圓半徑); 又因它是一個曲邊三角形, 它的無窮累積就是圓, 因此圓的面積就等於 $\sum_\ell \frac{1}{2}\ell r = \frac{r}{2}\cdot\sum_\ell \ell = \frac{r}{2}\cdot 2\pi r = \pi r^2$

尼古拉斯方法的核心還是變“無限”爲“有限”。

例3: 計算: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$

這個問題的實質是求極限, 假如設 $S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \cdots, S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}, \cdots$ 於是, 當項數 n 無限增大時, S_n 與“1”無限趨近。我們先看一下該問題的幾何解釋:

先作一個正方形的 $\frac{1}{2}$, 再作出正方形的 $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots$ (如圖2), 此時可見這個加式越來越接近於 1。

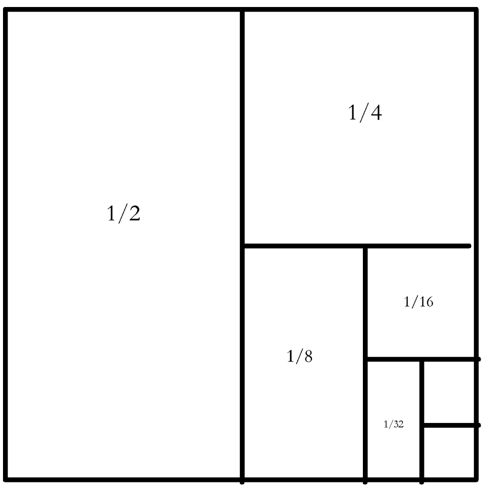

圖 2

然後, 我們用代數中的解方程的方法予以驗證。

設 $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=x$$

則 $$\begin{aligned} x-\frac{1}{2} &= \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \\ &\quad +\frac{1}{2^n}+\cdots) \\ &= \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

解之 $x=1$

幾何解釋是清晰的, 驗證也是合乎邏輯的。問題是 S_n 與 1無限趨近的過程是一個無限的過程, 轉無限爲有限必須首先確定極限是否存在。倘若我們不考慮極限的存在性, 就有可能導致錯誤。譬如, 計算 $1-1+1-1+1-1+\cdots$, 如果不考慮其和是否存在, 就假設其和爲 S, 則 $S=1-1+1-1+1-1+\cdots \Rightarrow S = 1-(1-1+1-1+1-1+\cdots) \Rightarrow S = 1-S \Rightarrow S=\frac{1}{2}$, 顯然, 這是個非常荒謬的結論。造成錯誤的原因在於該算式不存在極限。

下面的關鍵是證明 S_n 的極限是 1。所謂 S_n 與“1”無限趨近, 即是說 S_n 與“1”之差要多小有多小 (指絕對值)。我們可以指定一個任意小的 ε, 使得 $|S_n-1|<\varepsilon$, 則

$$|(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})-1|$$

$$= \ |\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}-1| = |(1-\frac{1}{2^n})-1| < \varepsilon$$

即 $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, $2^n > \frac{1}{\varepsilon}$, 兩邊取對數得 $n > \log_2\frac{1}{\varepsilon}$, 若記 $N = [\log_2\frac{1}{\varepsilon}]$, 則從 $n = N+1$ 項起, 以後各項都能滿足不等式 $|S_n - 1| < \varepsilon$。

由於 ε是預先指定的任意小的正數, 因此上面不等式就保證了 S_n 與"1"的差的絕對值要多小就有多小。在這個證明過程中, 我們借助於"ε"和"N", 通過解一個不等式 (僅含有限步運算), 就完成了極限定義所要求的無限過程。令人驚訝, 折服。因此, 有人把極限方法稱爲是"人類思想文化中的一塊瑰寶"實不爲過。

無限的王國就是那樣的神秘莫測而又魅力無窮。還是讓我們以數學大師希爾伯特一段發人深省的話語結束這篇短文吧! "從來就沒有任何問題能像無限那樣, 深深地觸動著人們的情感, 沒有任何觀念能像無限那樣, 曾如此卓有成效地激勵著人們的理智; 也沒有任何概念能像無限那樣, 是如此迫切地需要予以澄淸"。

—本文作者任教於中國江蘇省蘇州教育學院數學系—