談談一則不定積分問題及其解法

王中烈 •楊玉坤 •丁轉初

一、緒言

數學傳播季刊選輯 (10):「數學問題百則」第17題是解答正割函數 $\sec x$ 的不定積分 (Indefinite Integral) 問題。這一則不定積分的解法公式是:

$$I = \int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C \tag{1}$$

或

$$I = \int \sec x \, dx = \ln|\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})| + C \tag{2}$$

這問題及其解法以 (2) 之形式出現, 來自航海地理學製圖之需要而產生。它是微積分學 (Calculus) 還沒有正式發明以前的積分問題, 並且受到十七世紀歐洲某些數學家的注意 [參閱 [5]以明史實]。由於本題 (1) 的解法過於「技術」化, 十年多前曾在數學傳播季刊第五卷上熱列討論 [見 [1]-[4]]。

本文試作有雙重動機: (一) 試圖消減 (1) 的解法過於「技術」的困擾, (二) 對積分代換法 (Substitution) 作一較廣泛的探討, 以期彰顯微分與積分之互補性而有利教學。

二、不定積分代換法之探討

就不定積分的被積函數 (Integrand) 而言, 姑勿論, 反應實際問題的也好 (如 (1)), 教科書上所列舉例題 (或習題) 的也好; 多數是簡單形式。例如被積函數是 $\sec x$ 或 $1/\sqrt{x^2+1}$, 它們分別與其積分後的反導函數 (Antiderivative)(或積分函數) 之關係並非顯而易見, 因此在積分過程中必須藉助於一些代換技巧以顯淵源而達求解之目的。事實上, 我們知道與函數 $\sec x$ 恆等的三角函數無數; 同樣, 與函數 $1/\sqrt{x^2+1}$ 恆等的代數函數無窮, 而且兩者之間可以相互代換。本此, 如果教學能掌握少數提綱挈領的基本代換方法, 觸類旁通, 一隅三反則事半功倍。一般積分代換, 多應用畢氏定理的關係, 因爲畢氏定理所產生的三角函數關係最簡型爲單位圓

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{3}$$

其變化無窮, 對代數函數化簡約繁有一定的作用。質言之, 代換的目的是使被積函數轉化後可以直接或間接應用微積分基本定理

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad \text{若且唯若} \quad \int f(x)dx = F(x) + C \tag{4}$$

完成求解。所謂間接應用定理 (4) 就是便於直接查積分表或進一步演化。

談起積分表, 衆所周知的有如下公式$(a>0)$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln|\frac{a+u}{a-u}|+C, \quad \left(\int \frac{du}{u} = \ln|u|+C\right) \tag{5}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}} = \ln|u+\sqrt{u^2\pm a^2}|+C \quad (= \sinh^{-1}\tfrac{u}{a}+C \text{ 取正號情形}) \tag{6}$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2\pm u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2\pm u^2}}{u}\right|+C \tag{7}$$

其實 (5) 到 (7) 式是可以相互變換的 (容後闡明)。

一般教科書上對於積分代換法過於墨守, 舉例來說, 有人認爲世界上最詭秘之代換爲半角代換: $u = \tan(x/2)$ 或 $x = 2\tan^{-1}u$ [看 [6]360頁]。可是半角代換仍是畢氏定理的結果: 以C爲圓心 AB(大於2單位長度) 作直徑畫半圓, 再在 AB 的 Q 點上作$PQ \perp AB$交半圓於 P, 且令$AQ=u$, $PQ=1$, 如是$PA=\sqrt{1+u^2}$, $QB=1/u$, $PC=((1/u)+u)/2=(1+u^2)/2u$, $QC=((1/u)-u)/2=(1-u^2)/2u$ 按圖索驥

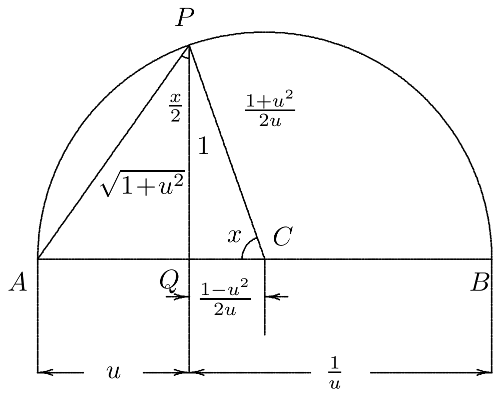

圖 1

則 $\sin x = PQ/PC$, $\cos x = QC/PC$ 一目了然; 亦即

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \tag{8}$$

(至於$dx=2du/(1+u^2)$乃代換函數微分的結果)。若我們僅應用圖一左方半角關係與常用的三角函數恆等式

$$\begin{aligned} \sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \\ \cos x &= \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} \end{aligned}$$

(8) 的關係同樣建立。與其說半角代換是世界上詭秘代換之最, 毋寧說是幾何、代數與分析方法的精巧配合。如認爲類似下列不定積分

$$J = \int \frac{dx}{3+5\sin x}$$

必須求助於半角代換法 [看 [6]360頁]才能得解, 似乎言過其實。事實上

$$\begin{aligned}
J &= \int \frac{3dx}{9-25\sin^2 x} + \int \frac{-5\sin xdx}{9-25\sin^2 x} \\
&= \int \frac{3\sec^2 xdx}{\sec^2 x(9-25\sin^2 x)} \\
&\quad + \int \frac{-5\sin xdx}{9-25(1-\cos^2 x)} \\
&= \int \frac{3d\tan x}{9-16\tan^2 x} + \int \frac{5d\cos x}{25\cos^2 x-16} \\
&= \frac{1}{8}\int \left[\frac{d(4\tan x+3)}{4\tan x+3} - \frac{d(4\tan x-3)}{4\tan x-3}\right] \\
&\quad + \frac{1}{8}\int \left[\frac{d(5\cos x-4)}{5\cos x-4} - \frac{d(5\cos x+4)}{5\cos x+4}\right] \\
&= \frac{1}{8}\ln\left|\frac{4\tan x+3}{4\tan x-3}\right| \\
&\quad + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{5\cos x-4}{5\cos x+4}\right| + C \qquad (9)
\end{aligned}$$

(9) 的結果看上去是將被積函數之分母與分子分別乘以 $(3-5\sin x)$ 後, 應用三角函數公式順乎自然推導而來。若我們注意下列恆等式

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(3+5u)\sqrt{1-u^2}} \\
&= \frac{\frac{3}{1-u^2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}}{9-\frac{16u^2}{1-u^2}} + \frac{\frac{-5u}{\sqrt{1-u^2}}}{25(1-u^2)-16}
\end{aligned}$$

則 (9) 可視作 $u=\sin x$ 的代換而產生的結果。本乎 (9) 我們可以引進任何相關代換, 半角代換乃相當多 (或無窮無盡的) 有關代換中之一罷了。當然我們可以延著這個方向, 舉出更多的實例以闡明我們所強調的事實, 可是不定積分 J 並非本文所要探究的主題。爲了兼顧上述事實並避免不必要的重複, 讓我們再回頭看看積分 (1)(或 (2))。誠然, 用 $u=\sec x+\tan x$ 的函數代換過於技術, 若取 $u=\ln(\sec x+\tan x)$ 直接了當, 微積分基本定理 (4) 得到應用, 一切勿須再假外求 (或旁敲側擊)。積分應用廣闊, 中外古今、科技典章無所不載, 可是最重要應用之一乃解微分方程, 此爲微積分基本定理 (4) 所付予之使命。

綜合上述, 利用積分公式 (5)-(7), 我們很容易推導出一組有關 (1) 之結果, 昭彰不定積分解法之多元化:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos xdx}{\cos^2 x} = \int \frac{d\sin x}{1-\sin^2 x} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C \qquad (10) \\
I &= \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\sin xdx}{\cos x\sin x} \\
&= \int \frac{-d\cos x}{\cos x\sqrt{1-\cos^2 x}} \\
&= \ln\left|\frac{\cos x}{1+\sqrt{1-\cos^2 x}}\right| + C \qquad (11) \\
I &= \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\sec x\tan xdx}{\tan x} \\
&= \int \frac{d\sec x}{\sqrt{\sec^2 x-1}} \\
&= \ln|\sec x+\sqrt{\sec^2 x-1}| + C \qquad (12) \\
I &= \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\csc x\cot xdx}{\cot^2 x} \\
&= \int \frac{d\csc x}{1-\csc^2 x} = \ln\left|\frac{1+\csc x}{1-\csc x}\right| + C \qquad (13) \\
I &= \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\sec^2 xdx}{\sec x} \\
&= \int \frac{d\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} \\
&= \ln\left|\tan x+\sqrt{1+\tan^2 x}\right| + C \qquad (14) \\
I &= \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\csc^2 xdx}{\csc^2 x\cos x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{-d\cot\ x}{\cot\ x\sqrt{1+\cot^2 x}} \\
&= \ln\left|\frac{1+\sqrt{1+\cot^2 x}}{\cot\ x}\right| + C \qquad (15)
\end{aligned}
$$

上列六種解也可以視作分別用六個基本三角函數代換法求得; 事實上, 該六解法只是直接應用有關三角函數運算, 免除 (或節省) 了來回代換罷了。此外, 關於積分 (1), 我們還有三則解法

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{\cos\ x} = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x+\sin\ x}{\cos\ x(1+\sin\ x)}dx \\
&= \int \frac{\cos\ xd(1+\sin\ x)-(1+\sin\ x)d\cos\ x}{\cos\ x(1+\sin\ x)} \\
&= \int \left[\frac{d(1+\sin\ x}{1+\sin\ x} - \frac{d\cos\ x}{\cos\ x}\right] \\
&= \ln\left|\frac{1+\sin\ x}{\cos\ x}\right| + C \qquad (16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{\cos\ x} = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x-\sin\ x}{\cos\ x(1-\sin\ x)}dx \\
&= \int \frac{(1-\sin\ x)d\cos\ x-\cos\ xd(1-\sin\ x)}{\cos\ x(1-\sin\ x)} \\
&= \int \left[\frac{d\cos\ x}{\cos\ x} - \frac{d(1-\sin\ x)}{1-\sin\ x}\right] \\
&= \ln\left|\frac{\cos\ x}{1-\sin\ x}\right| + C \qquad (17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{dx}{\cos\ x} = \int \frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{2}+x)} \\
&= \int \frac{dx}{2\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})} \\
&= \int \frac{\sec^2(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})d(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})} \\
&= \int \frac{d\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})} \\
&= \ln\left|\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\right| + C \qquad (18)
\end{aligned}
$$

比較積分公式 (5)-(7) 與 (10)-(15) 所列舉的結果, 我們不難得到下列積分公式的關係 (此處令$a=1$以便於比較)

$$
\begin{aligned}
&\text{若 } v = \frac{u}{\sqrt{u^2-1}}, \\
&\text{則 } \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \int \frac{dv}{1-v^2} \qquad (19)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{若 } v = \sqrt{u^2+1}, \\
&\text{則 } \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dv}{\sqrt{v^2-1}} \qquad (20)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{若 } v = \frac{1}{u}, \\
&\text{則 } \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{-dv}{v\sqrt{1+v^2}} \qquad (21)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{若 } v = \sqrt{u^2+1}-u, \\
&\text{則 } \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{-dv}{v} \qquad (22)
\end{aligned}
$$

爲了進一步申述 (19) 到 (22) 四恆等式之驗證且顯示代數運算之功能, 藉以說明被積函數及其反導函數之成因與淵源, 茲列舉二恆等式作爲終結, 以彌補上面申論之不足:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{u^2\pm a^2}} &= \frac{\frac{\sqrt{u^2\pm a^2}+u}{\sqrt{u^2\pm a^2}}}{u+\sqrt{u^2\pm a^2}} \\
&= \frac{\frac{-u+\sqrt{u^2\pm a^2}}{\sqrt{u^2\pm a^2}}}{\sqrt{u^2\pm a^2}-u} \\
&= \frac{1+\frac{u}{\sqrt{u^2\pm a^2}}}{u+\sqrt{u^2\pm a^2}} \\
&= -\frac{\frac{u}{\sqrt{u^2\pm a^2}}-1}{\sqrt{u^2\pm a^2}-u} \qquad (23)
\end{aligned}
$$

$$\frac{\frac{\pm v}{\sqrt{a^2\pm v^2}}}{a+\sqrt{a^2\pm v^2}}-\frac{1}{v}=\frac{-a}{v\sqrt{a^2\pm v^2}}$$
$$=\frac{-\frac{a^2}{v^2}}{\sqrt{(\frac{a^2}{v})^2\pm a^2}} \tag{24}$$

最後, 縱觀 (19) 到 (24) 六等式的推導表現, 積分表列公式 (5)、(6)、(7) 三位一體之事實, 不言可喻, 不證自明了。

三、結論

研發演進了三百多年之微積分學是一切有關高等數學之基礎, 也是工程科技之應用寶典。不容忽視的是: 近十多年來小型電腦硬體出神入化的發展, 符號數學軟體製作得多彩多姿 [參看 [7]]; 諸如函數作圖, 符號運算 (包括不定積分解), 這一類曾經是難度頗高且費時費思的微積分問題, 而今是彈指之事。今後面臨所謂軟硬體兼長的超級電腦帶動超工程與高科技研發之挑戰, 微積分學仍是必備的理論基礎。

電腦 (大型、小型、迷你型、包括計算器) 仍會繼續快速發展, 符號運算與數值計算將同爲移指之勞, 難易互見 [參看 [7]]。不管我們利用電腦教學與否, 電腦畢竟在那裡直接影響我們的教學。我們認爲本文沒有什麼新的發現與創意; 可是我們要強調的是, 協調整合微積分的基本內容以彰顯微分與積分之互補性, 使其相關應用靈活; 從而不定積分問題與解法方便了有關微分方程之教學, 乃順理成章之事。

參考文獻

1. 朱建正編:「數學問題百則」, 數學傳播季刊選輯 (10)(七七年), 48-51。
2. 林東棋, 黃啓瑞,「數播信箱」, 本刊五卷二期 (七十年), 124。
3. 朱建正,「數播信箱」, 本刊五卷三期 (七十年), 107。
4. 楊維哲,「數播信箱」, 本刊五卷四期 (七十年), 100。
5. V. F. Rickey and P.M. Tuchinsky, "An Application of Geography to Mathematics : History of the Integral of the Secant", Math. Magazine 53 (1980), 162-166。
6. Spivak, N. "Calculus", 2nd ed. W. A. Benjamin, Inc, New York, 1980.
7. Barry Simon, "Symbolic Math Software, It's Not Just for Mainframes Anymore", PC Magazine, 1992, 405-433.

—王中烈, 加拿大國雷吉那大學榮譽教授, 現任教於中正理工學院兵器系。楊玉坤, 任教於中正理工學院基礎課程系。丁轉初, 任教於中正理工學院兵器系。—