平坦流形

平　斯

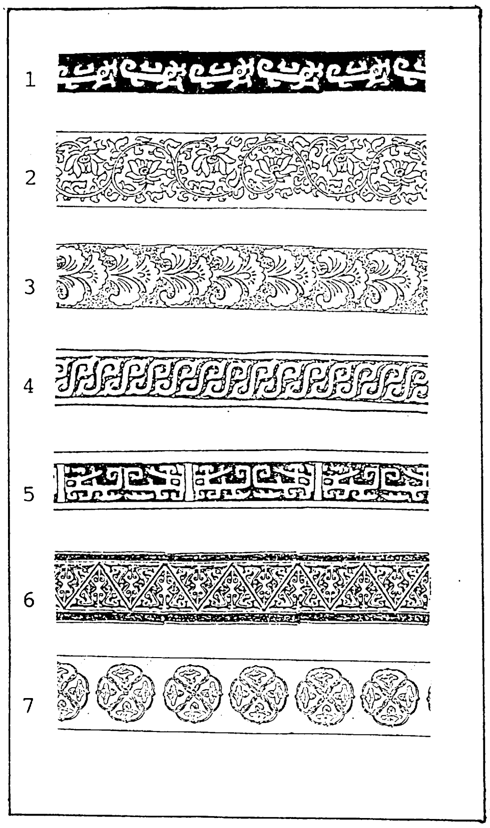
初中時的平面幾何, 求證兩個三角形全等, 高中時的解析幾何, 化約截錐曲線方程式, 在這些時候操作的運算有三種: 平移、旋轉和鏡射。所有這類坐標轉換, 綜合而成平面的等度群 $E(2)$ 。依照克難 (F. Klein) 的厄南庚綱領 (Enlangern Program) 看來, 被這個群保持的不變量, 如長度, 夾角等就是歐基里德幾何所界定的範圍。然而有些對稱的美術圖案卻不在歐氏幾何裡討論, 因此實在屬於另外一種幾何。取 $E(2)$ 裡的一個離散子群 G, 其中的平移, 構成可能是一秩或二秩的加法子群 Γ。而所有的旋轉或鏡射部分, 另外構成一個有限的點群 H, 結構上可能是循環群或是雙面群 (dihedral group)。這時 G 是 Γ 透過 H 的一個擴充, 彼此之間用下列的式子表示其中的關係:

$$0 \to \Gamma \to G \to H \to 1$$

首先若 Γ 是一秩, 符合這種群的對稱圖案, 只有單向的週期性, 散見於古董瓷器碗盤, 官服的下擺或是袖口, 甚至於更古老的玉器等。它們普遍用在邊緣的裝飾, 所以叫做飾邊群 (Frieze Group) 仔細的分析出七種情形。

若 Γ 是二秩的, 則對稱圖案有四方連續的週期, 好像舖瓷磚似的, 可以無限拓展出整個平面, 所以叫做壁紙群 (Wallpaper group)。這種群的個數, 豈只成千上萬? 但是如果忽略大小或正斜的差異, 數學來說是約去了仿射群 (affine group) 的作用之後, 其類別只剩下十七種。走一趟故宮博物院, 或是古老的寺廟如行天宮, 就會全看到這些群下對稱的圖案。這些圖案的最小單位是可以仔細研究的。用拓樸的行話來說, 平面被這樣的對稱群約了之後, 得到一個帶有稜角或稜邊的曲面, 通稱爲角形 (orbifold)。以下一系列的十七個圖裡, 有普通的正方形, 三角形等, 也有一些如環面, 柱面的曲面, 還有各式各樣, 完整或不完整的三角包, 其中唯有環面 P1 和克難瓶 Pg 是特別不帶稜的平滑曲面 (註一)。

當然壁紙群只是二維的特殊例子, 到三維時, 則正好是一般化學結晶物質的對稱群, 因此一般來說在 n 維的歐氏群 $E(n)$ 裡, 平移具 n 秩的離散子群, 全都稱爲結晶群 (crystallographic group)。這個世紀初, 德國人希伯特 (D. Hilbert) 提出著名的二十三個難題來考當代的數學家, 其中第十八道題, 問 n 維結晶群的種類是有限多個嗎? 十年後畢柏巴赫 (L. Bieberbach) 解決這個問題, 證實果然, 但是確切的個數卻不容易計算。竭衆人和超級電腦之力, 目前僅知的數據是: 二維 17 個, 三維 219 個, 四維 4783 個。(註二)



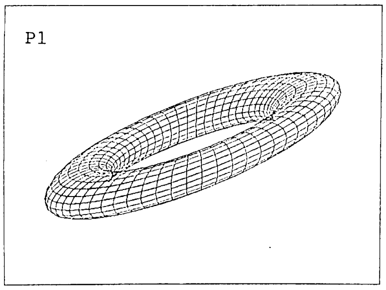
圖一

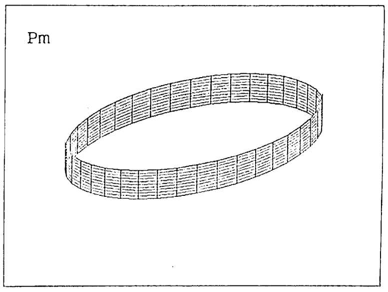
正如二維時的環面和克難瓶, 在 n 維時也有平滑的角形, 他們借用了歐氏空間的度量, 使得曲率爲零, 所以通稱爲平坦流形, 所對應的結晶群就叫畢柏巴赫群 (Bieberbach group), 它們的種類, 目前知道的個數是二維2個, 三維10個, 四維75個。大致來說, 如上述幾何的限制, 平坦流形完全由畢柏巴赫群決定, 是相當拘謹的。然而1983年項武忠證明任何流形若與平坦流形同倫, 則必同胚 (註三), 所以撇開了幾何的條件不論, 光只是拓樸來看, 即使條件放寬, 還是十分局限。這樣子的刻劃問題: 同倫則同胚, 與球面上的龐加萊猜測頗有相同的趣味。

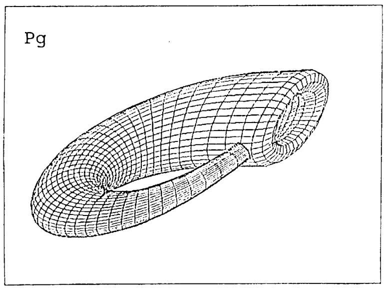
三十年前和現在一樣, 大學聯考放榜之後, 頭一件事是收拾行李上成功嶺去。我們的連隊有個剛從鳳山來的步排, 踐的狠, 平時立正稍息等基本教練或臥倒出槍的單兵攻擊且不說了, 震撼教育時, 他帶頭爬的連野戰服都磨穿了, 從來沒看過有人這樣子玩眞的。有一天收操回營, 吃過晚飯後大伙結伴坐下來乘涼, 當他知道我們這一幫人即將進數學系, 就挨著也坐下來問: 「拓樸學聽過沒有? 」聯考會考嗎? 當然沒有。說著說著他就拿出一片紙條, 這樣比, 那樣比, 比出各式各樣的曲面, 一邊還描述每個曲面的精妙之處, 說的眞是舌燦蓮花, 頑石點頭, 直樂得衆猴搔耳抓腮, 手舞足蹈。最後在即將風雲起, 山河動的時候, 他站了起來說: 「上了大學, 還有好多要學啦。」眞是說不盡的多少期待。其他人我不知道, 就我而言, 這席話就是我拓樸學的啓蒙教育了。

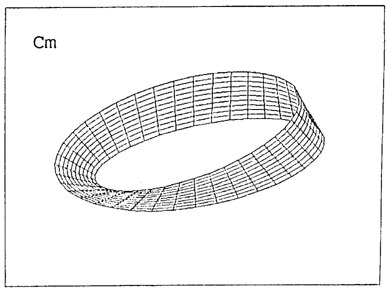
大學二年級時修高微, 繆龍驥曾漫不經意的說: 「變分法很重要, 是研究拓樸很麻利的工具。」像彌勒佛一樣的老繆, 說話時笑嘻嘻的, 但是說什麼是什麼, 不聽準吃虧。於是下學期王志毅開變分法, 就急忙去選了。結果學到如何計算積分到小數第三位, 這個招式或許會讓高斯讚賞, 但是拓樸則一點影子也沒有看到。一直要若干年後, 學了微分拓樸, 才眞體會老繆之言的眞切。三年級正式修拓樸學, 在阮希石的調教下, 把杜公謹 (J. Dugundji) 的前半部點集拓樸結實的讀完, 這樣可以算是入門了。僥倖大學四年, 間中海外高人如陳省身, 楊宗道等掌門護法也不

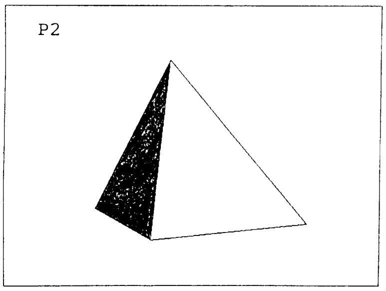
時回來鼓吹, 然而對整個拓樸學拼湊出來的印象, 正如樊璣被他舅舅訛的:「就像代數一樣。」老排長吹噓的都到那去了? 服完兵役之後, 留校當助教, 這天艾倫伯 (S Eilenberg) 來演講, 叨陪午飯。席間他問諸人讀些什麼? 當然是拓樸, 再問:「什麼樣的拓樸? 」這當場可把衆人愣住了: 老先生不務正業也罷了, 怎麼老本行吃飯的傢伙也丟了呢? 於是逐漸心存疑惑, 或許還有不曾見過牌子的拓樸。同時憶起王志毅曾說:「美國南方有批人做很奇怪的拓樸。」好像在宣示那門邪教一般。其實指的是摩耳 (R.L. Moore) 的徒子徒孫們。曾有這麼個時代, 凡做拓樸的嘴裡不夾些歐洲土音, 就被人認爲肚子裡學問不大。這些人卻埋首搞自己的一套, 討論起拓樸, 比手畫脚, 塗塗抹抹, 寫起文章, 圖雖有趣, 更多切口。這種明心見性, 直指成佛的做法, 令人歎爲觀止。從前學拓樸時, 要滿足直觀畫個圓圈代表鄰域, 還要遮遮掩掩的, 那能像這樣大筆大筆的畫。兩者之差眞不可以道里計。回頭仔細看這些曲面, 當年老排長所說的, 這不都回來了嗎?



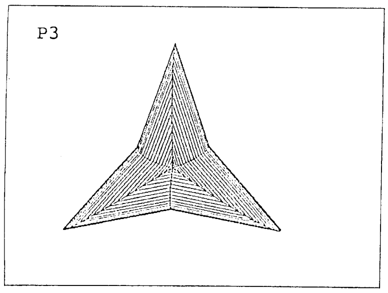




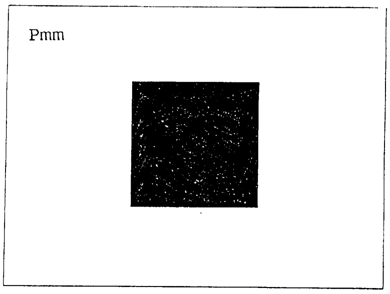




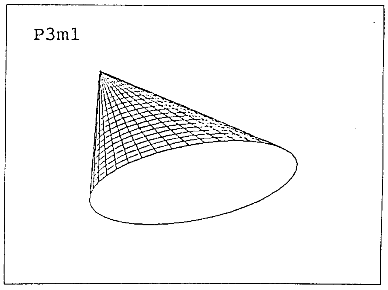
P2



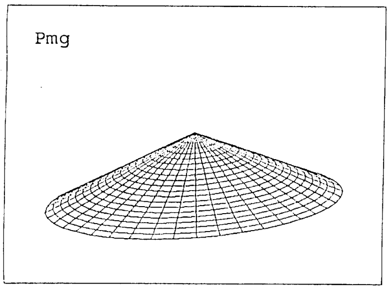
P3



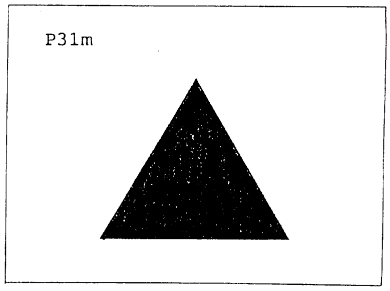
Pmm



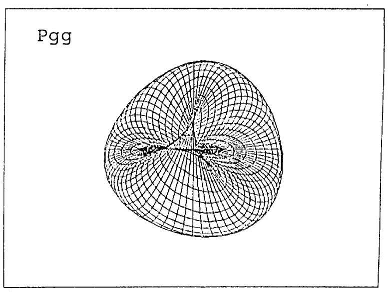
P3m1



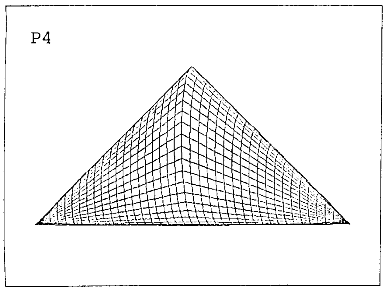
Pmg



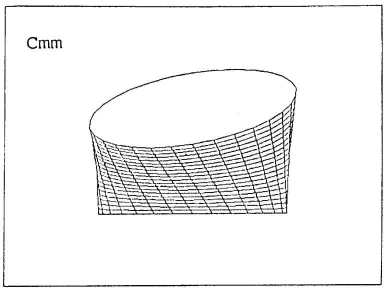
P31m

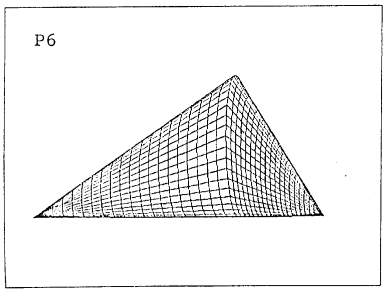


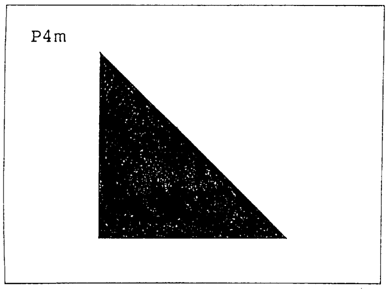
Pgg

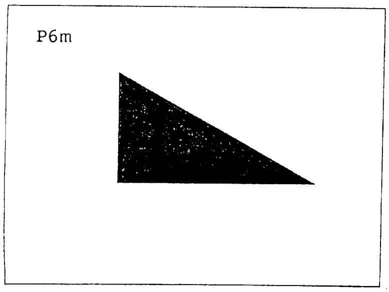


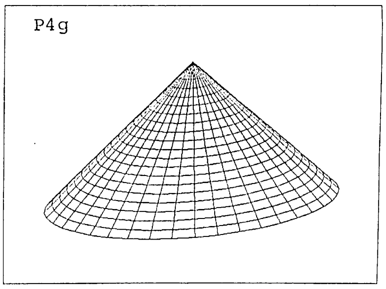
P4











參考資料

1. J.M. Montesinos:Classical tessellations and 3-manifolds (1987), Springer - Verlag.
2. R. Schwarzenberger : N dimensional crystallography, 1980, Pitman.
3. 項武忠: American Journal of Mathematics (105), 1983, 641-672.

—本文作者任教於東吳大學數學系—