

# 數學思維研究與數學思維訓練

## 王 前

近年來，數學教育界表現出對數學思維研究的濃厚興趣，這方面已有很多著述問世。本文作者與大連理工大學徐利治教授，從1988年起合作進行數學思維研究。這期間徐利治教授提出了一系列思想觀點，經與本文作者討論並加以闡發，於是形成若干初步研究成果。我們又以此為基礎，進一步思考對大、中學生進行數學思維訓練的問題，並已著手實踐的準備。下面先來簡要介紹我們的數學思維研究的初步成果。

---

數學思維研究可以從不同角度入手。我們選擇的角度是考察數學思維與大腦兩半球功能的關係，並將這種考察置於東西方文化比較的 background 上進行。

根據現代神經生理學的研究結果，人們知道大腦兩半球具有不同功能。左半球主要擔負抽象思維和邏輯推理的任務，右半球主要擔負形象思維和審美的任務。左、右半球在生理機制上互相聯繫，互相促進。一個半球的發展明顯有助於另一個半球機能的改善。過去人們常常強調數學思維的抽象性和邏輯性，這是同左半球的思維功能相聯繫的，有人甚

至稱大腦左半球為“數學半球”。然而，數學思維同時還具有“實驗、猜測、想像、直覺、美感”等特點，這是同右半球的思維功能相聯繫的。數學中的探索性和創造性思維在很大程度上取決於右半球潛能的開發。而這是以往數學教育中常常忽視的。現在人們越來越多地討論已往數學教學的某些弊端，如過份強調死記硬背大量的規則，做大量的經驗性練習，忽視思想內容和能力訓練，等等。應該說，這些弊端的產生主要是過於強調大腦左半球的思維功能，或者說“左腦思維”，而相應地忽視了“右腦思維”的結果。近年來這種情況有所變化。討論“猜測、想像、直覺”等右腦思維功能的著述逐漸多了起來。但同時出現另一種偏向，即認為數學中的創造性思維就是“猜測、想像、直覺”等思維形式，甚至過份誇大數學中右腦思維作用，以為單純開發右腦就會導致數學教育水平的提高。我們認為，無論單純強調左腦思維還是單純強調右腦思維，都是片面的，不正確的。大腦兩半球是相互聯繫的有機整體，同樣，數學中左腦思維和右腦思維也是相互聯繫的有機整體。它們只有處於相互促進而不是相互抑制的狀態中，才有可能充分發揮大腦的整體功能，從整體上提高數學思維能力，進而提高數學教育水平。

我們強調數學左腦思維和右腦思維的有機聯繫，是基於以下認識：數學中的左腦思維和右腦思維都有其限度，都不能單獨完成所有數學認識和實踐活動。徐利治教授曾提出“關於抽象形式思維的不完全性原理”，這一原理指出，數學中的左腦思維，包括數學的抽象、形式化、公理化，作為人腦反映機制的一種本能，總是在對事物存在關係形式的映象加以“分解和綜合”(概括)，追求某種嚴格的、確定的東西。這就決定了抽象形式思維往往是對實際存在的諸環節實行了不可分離的分離，一方面抓住其本質，視之為特徵，概括為普遍屬性，形成為概念，作為精確邏輯思維的出發點，另一方面徹底揚棄其它環節，使這些環節再不出現在以後的形式推理內容中。抽象形式思維在本質上是單相的、僵化的、靜止的。它不可避免地要割裂數學對象之間的某些有機聯繫，忽略數學理論體系的某些整體特徵，而這些被一度忽略掉的東西積累起來，恰恰可能成為後來數學發展中極為重要的東西。可見，數學的抽象形式思維總具有不完全性。而數理邏輯中著名的哥德爾不完全性定理，只是這種不完全性在一個方面的表現。

由此可知，數學左腦思維的限度是，它只在抽象領域、邏輯領域和數學符號語言所及的領域裡通行無阻，但無法處理形象領域裡的、非邏輯的以及尚不能明確用符號語言表達，而只能依賴直覺處理的問題。與此相應，數學右腦思維的限度是，它只能做左腦思維做不到的那些事情，與左腦思維形成互補的關係。運用思維科學和心理學的術語來說，數

學左腦思維是一種“收斂思維”，而右腦思維是一種“發散思維”。收斂思維注重一絲不苟的邏輯分析和論證。無論多麼龐雜的現象或素材，最終都被壓縮在簡潔明瞭的邏輯框架裡。發散思維則強調海闊天空自由創造，由此及彼浮想聯翩。徐利治教授曾指出，數學創造往往開始於不嚴格的發散思維，而繼之以嚴格的邏輯分析思維，即收斂思維。因此，真正具有數學創造力的科研工作者，必定是既善於嚴格思維又善於不嚴格思維的人。

我們在數學思維研究方面的另一項工作，是對各種數學思維形式開展量化、層次化研究。徐利治教授開創了“數學抽象度分析法”，[1]其實質是把定量分析方法引入對數學抽象程度本身的研究，揭示數學抽象物的層次性。這方面已有專門論述，本文就不展開了。我們還研究了數學形象思維的層次性，即把數學形象思維分為幾何思維（以各種平面和空間圖形為研究對象的最直接的形象思維）、類幾何思維（可以借助幾何空間關係進行想像的較為間接的形象思維，如關於非歐幾何、高維空間、泛函空間等空間關係的思維）、數覺（對各種數量關係的形象化的感覺）、數學觀念的直覺（對各種數學觀念的性質、相互聯繫以及重新組合過程的形象化感覺）。龐卡萊（H.Poincare）曾對數學觀念的直覺有過生動描述，將其比喻為“觀念原子”在空中翩翩起舞，相互組合成新的觀念原子的過程。[2]上述數學形象思維層次的劃分當然還是初步的，它們之間的內在聯繫還有待進一步探索。

還應提到我們對數學直覺思維的層次性的認識。這種認識是與徐利治教授關於數學

抽象物的層次性認識直接相關的。我們認為，所謂數學直覺的層次性，指的是人們獲得數學直覺的能力存在層次上的差異。這是由數學認識活動中主體和客體兩方面來決定的。從認識主體方面來看，由於數學直覺產生於已有的經驗和知識素材，而經驗有深度和廣度上的差別，所以對於同一數學對象，不同的人可以獲得不同層次的直覺。事實上，中學生的數學直覺層次顯然低於大學生和研究生的數學直覺層次，而有經驗的數學家可以通過直覺思維發現尋常人們看不到的東西。從認識客體方面來看，由於數學抽象物有層次之分，對不同層次的數學抽象物的認識可獲得不同層次的數學直覺。數學直覺層次性的兩個方面是互相聯繫的。認識主體的數學直覺能力層次，要根據認識客體的抽象程度加以衡量。而對數學認識客體抽象程度的理解，取決於主客體不斷的相互作用。這方面的詳細論述，可參見文獻 [3]。

對數學與思維關係的討論，在數學教育改革和發展中有十分重要的意義。我們注意到，由於中國傳統文化的影響，人們往往只是從工具的角度理解數學的功能，強調其算法性質，以往數學教育中比較注意計算和應用，而對邏輯思維和創造能力的培養不甚注意。換言之，數學與左腦思維和右腦的關係都未能得到深入研究。應該看到，現代數學發源於西方注重分析、理性和審美意識的文化環境中，因而與東方的注重綜合、經驗、直觀、領悟的文化氛圍有一定距離。東方的藝術（音樂、繪畫、雕塑等等）與數學的關係，不如西方藝術與數學的關係那樣密切。這就使得一

些數學工作者為了追求數學而捨棄對其他文化形態的興趣。他們熱衷於就數學鑽數學，把數學單純當做一種技術性活動而不是當做一種文化形態來對待，因而他們只是按常規要求和方法去“做”數學，卻不願考慮數學與現實生活其他方面的有機聯繫。其結果，使他們不自覺地加倍使用左腦思維，特別是其中能行性的、可程序化的部分，卻忽視了自覺保持左腦思維和右腦思維的平衡發展及相互作用。在數學史上，最優秀的數學家可以說都是思想家，而不是只會“做”數學的能工巧匠。這些人學識淵博、興趣廣泛、見解深刻、能力超群。笛卡兒、萊布尼茨、龐卡來、羅素既是一流的數學家，又是一流的哲學家。希爾伯特、愛因斯坦、馮·諾伊曼等人在數學、物理和音樂方面都達到了精湛的水平。達·芬奇既是數學家，又創造出“蒙娜麗莎”這樣的傳世之作。無數事例表明，數學工作者的知識和才能必須全面發展，才能使左右腦的配合達到較高水平，獲得創造性的數學發現。那些只是不自覺地加倍使用左腦思維的人，都希望獲得龐卡萊、希爾伯特那樣舉世矚目的成就，為此不停奮鬥，卻成效很少，這正是由於沒有意識到思維結構和方法上的差距的緣故。

當然，這並不是說，東方傳統文化對數學思維能力的培養毫無裨益。其實，數學右腦思維中的猜測、想像、直覺等形式，與東方傳統思維方式有很多相通之處，值得仔細探究。中國的數學水平在歷史上曾一度居領先地位，產生了很多傑出理論成果和高超算法，它們大都是經驗總結和直覺的結果。印度數學家拉瑪努賈 (S.Ramanujan) 依靠自學掌握了

相當專門的數學知識，並且憑藉數學直覺猜出了一些相當重要的數論定理。他的卓越才能和獨特思維方式令人嘆服。應該看到，東方傳統文化影響下的人們，在猜測、想像、直覺方面有著根深蒂固的習慣和本能的優勢，可惜這些方面的思維活動過去與數學聯繫比較少，因而在培養數學思維能力方面並無明顯的作用。然而潛力是存在的，是值得大力開發的。今後的數學思維研究，應抓住這一課題。它對數學哲學的研究和數學教育的革新，都具有十分重要的意義。

我們關於數學思維研究的初步成果，主要體現在文獻 [4]和相關的一些論文之中。我們認為，數學思維研究今後的重點，一是要深入探索各種數學思維活動自身的特殊規律，不能滿足於僅僅用思維科學、心理學的術語來闡釋數學教育的認知現象；二是要將數學思維研究同數學教育結合起來，使理論研究逐步得到應用，產生社會實際效益。這就導致對數學思維訓練的思考。

## 二

約翰·杜威 (John Dewey) 早在本世紀初，就在“我們怎樣思維”一書中討論了一般意義上的思維訓練問題。(中譯本見文獻 [5]) 英國的德波諾 (Edward de Bono) 使思維訓練逐漸走向專業化、技術化。[6]而數學思維訓練的問題，似乎近年來才引起人們注意。徐利治教授對數學思維訓練提出過原則性的指導意見。經過我們的討論，逐漸形成對數學思維訓練的含義、原則、程序、方法、評價的初步認識。受這一工作影響，1991年杭州大學

出版社出版了“中學數學思維訓練”一書 (本文作者參與了該書寫作)，這是把數學思維訓練引入中學數學教學的一種嘗試。後來“數學思維訓練”作為一項科研課題，開始在部分中學和高等師範院校著手實驗，目前尚在進行之中。我們認為，數學思維訓練在理論及其實踐上都剛剛起步，有很多細節需要更深入探討，反覆實驗，使之逐漸成熟。目前尚未達到實用和推廣的階段。因此，這裡只能談談我們的一些基本的認識，以便與學術界同仁交流思想，共同推進這方面的研究和實驗活動。

先說數學思維訓練的含義。我們認為，數學思維訓練是指根據數學思維發展規律，針對思維活動中的關鍵環節或薄弱環節，有意識地進行訓練，以便使思維活動正常開展，克服思維障礙，從而達到改善思維品質，提高思維能力，掌握思維方法之目的的一種智能開發活動。思維訓練好比人的大腦的一種“智力體操”，其作用是增強大腦功能和活力，提高其工作效率。無論大學生還是中小學生，都可進行數學思維訓練，但其方式和要求應有所不同。

數學思維訓練的一般原則主要有：

第一，知行合一的原則。數學思維訓練需要一定的理論基礎，如數學哲學、數學教育學、數學心理學、數學方法論等，它們可以提供數學思維訓練所需的知識背景、思維規律、方法技巧。然而數學思維訓練從根本上說是一種實踐活動，要密切聯繫數學教學和不同學生的學習情況，解決實際問題。數學思維訓練應同正常的數學教學活動有機地結合起來，促進正常教學活動，減輕學生學業負擔。只有

在數學教學過程中行之有效，數學思維訓練才有其存在的價值，才能得到師生的認可和社會的承認。因此，將知與行、理論與應用兩方面結合起來，是數學思維訓練的關鍵。

第二，自覺實踐的原則。從廣義上講，一般的數學教學活動都或多或少包含思維訓練的成分，但那是不自覺的。自覺的思維訓練要在具體分析不同人的思維特點、不同的思維過程的基礎上，按照科學的方式方法進行訓練，包括自覺選擇訓練素材，自覺強化訓練環節，自覺評估訓練效果。

第三，循序漸進的原則，即遵循數學思維發展的一般規律，由簡單到複雜，由低級到高級，逐步深入進行思維訓練。思維發展的順序既不能顛倒，也不能跳躍。不過，循序漸進並不意味著任其自然。在遵循數學思維發展順序的前提下，通過採取適當的措施，可以使思維發展的速度大大加快，使思維發展的水平迅速提高。數學思維訓練的意義和價值也就在於此。

在歷史上，曾出現過企圖跳躍或顛倒思維發展順序來進行思維訓練的事情。這就是50年代末開始出現的“新數學”運動。“新數學”運動的倡導者受法國布爾巴基學派影響，強調數學知識體系的邏輯性和公理化特徵，卻忽視了數學抽象思維能力循序發展的規律。他們把歐幾里得幾何學扔在一邊，企圖跳躍幾何思維發展階段，把一個極度抽象化形式化的知識體系硬塞到學生腦子裡去，這是必定要失敗的。這樣的“思維訓練”實際上是在“幫倒忙”。數學思維中各種思維品質、思維能力和思維方法的具體發展過程及其規

律，還沒有研究得很充分，這方面研究應該為貫徹循序漸進的原則提供一個科學的依據。

第四，全面發展的原則，即全面進行思維訓練，全面提高數學思維活動的水平，使數學思維品質、思維能力、思維方法各方面發展相互促進、相互滲透，從而達到全面發展智力，提高教學質量之目的。在選擇數學思維訓練素材時，要考慮到不同方面、不同角度思維訓練的需要，在不同問題上要有所側重。比如，有些數學題材比較適合訓練思維的靈活性，有些題材比較適合訓練抽象思維能力，有些題材更適合訓練化歸方法或模型方法的使用，等等。但這並不等於說，解決此類問題時不涉及其它的數學思維品質、能力和方法。一般說來，具有一定綜合性質的數學題材都可能涉及數學思維的各主要方面，都適於進行全面的思維訓練。在思維訓練初期，注重不同方面、不同角度的專門訓練是必要的。但有了一定的基礎之後，就應強調全面發展的原則，使各方面的專門訓練相互促進，相得益彰。

關於數學思維訓練的程序和方法，我們想著重討論這樣幾個問題：

第一，數學思維訓練的主要環節。我們認為，思維訓練涉及思維科學、心理學的有關知識，而這些知識是常規數學教學不討論的。為保證思維訓練的質量，適當講一些這方面的有關知識，是完全必要的。思維訓練又是技術性的活動，要通過實例演示，說明思維訓練的目的、內容和方法，並給出一定數量的練習題，輔以必要的提示，因此，數學思維訓練應由理論準備知識、思維訓練實例和訓練題三個主要環節組成。這種模式受波利亞

(G.Polya) 所著“數學與猜想”(Mathematics and Plausible Reasoning)[7]一書的啓發和影響,並力圖同正常教學活動更密切地結合。

第二,教師在數學思維訓練中應有的作用。教師應該根據數學思維訓練的理論基礎和一般原則,結合自己的教學內容,設計具體的思維訓練方案,包括1. 選擇並向學生講授必要的,他們能夠接受的思維訓練理論知識;2. 說明數學內容中各知識點的思維順序,幫助學生形成正確的思路;3. 提出數學活動中與思維訓練有關的重點和難點問題,引起學生們的興趣;4. 結合學生們在思維過程中常見的錯誤,說明思維障礙的形成原因及消除辦法,從反面來說明重視思維規律和思維訓練的必要性;5.根據教學需要著重講評思維訓練實例,幫助學生選擇適當的訓練題;6.對不同學生的思維狀況進行分析,因材施教,並對思維訓練效果進行評估,等等。總之,教師在數學思維訓練過程中要發揮主導作用,創造性地設計和實施思維訓練方案,引導學生的思維沿著正確方向順利發展。對於剛剛接觸數學思維訓練的教師來講,這樣做是有一定難度的。為此要開展適當的師資培訓,幫助教師儘快適應這項工作。

第三,學生在數學思維訓練中應有的作用。學生是數學思維訓練的接受者和受益者。然而在對數學思維訓練意義和效果沒有充分理解的時候,也有可能視這項活動為額外負擔,不願投入精力或積極配合。如果學校和教師過於強調數學的計算和實用功能而忽視對思維能力的培養,則會使學生的這種傾向更

為嚴重。數學思維訓練的效果在很大程度上取決於學生的參與程度。學生們應自覺意識到,數學思維訓練從根本上有助於減輕而不是加重學業負擔,有助於提高而不是降低學習成績。因此,應按照教師設計的方案,結合自己的思維狀況,自覺進行思維訓練,包括反省和發現自己思維品質、思維能力、思維方法上的弱點,主動加以改善;加強師生之間、學生之間思想交流。可以通過適當的討論、辯論,讓學生們互相檢查對方在思維中的邏輯缺陷和不足之處,互相提問題,互相反駁,在心理上起到互相激勵的作用。討論和辯論能夠改善學生們的表達能力、流利程度、自信心和思維速度,可以成為思維訓練的良好場地。一些計算能力較強而邏輯思維或形象思維能力較弱的學生,則應根據數學思維規律的特點,自覺開發數學左腦思維和右腦思維的潛力,改善自己的整體思維結構,為思維訓練奠定必要的基礎。

第四,數學思維訓練效果的評價指標。很多數學教師習慣於從考試分數角度來評價學生的學習效果和思維水平,這樣做是有很大大片面性的。考試分數只反映解題的正確程度,無從表現學生思維品質、能力和方法上的差異。當然,數學思維訓練的總體效果可以而且應該從考試分數上得到反映。同時,還應針對思維訓練的不同內容,提出數量上和質量上的具體要求,作為衡量思維訓練效果的指標。比如,在訓練數學思維靈活性時,應有對解題速度的要求。不僅要求答案正確,而且要求解題迅速。在訓練數學思維批判性時,應對發現自己和他人的錯誤的能力有一定的要求。

比如設計一些包含若干隱蔽的邏輯錯誤的判斷和推理，讓學生自己去發現，並以發現邏輯錯誤的多少，作為衡量思維批判性的指標。此種方法也可以用於考察思維嚴謹性訓練，但這時要求需進一步提高，不僅要發現各種邏輯錯誤，而且要求迅速加以改正。恰如劍橋大學心理學教授巴特利特 (Frederic Bartlett) 爵士所提出的：測定智力技能的唯一最佳標準可能是檢測並摒棄謬誤的速度。[8]還可以考慮用一題多解的能力來衡量數學思維廣闊性的訓練效果，用解題時所達到的抽象度和抽象難度來衡量數學抽象思維能力的訓練效果。對於收斂思維和發散思維各種能力的訓練，也可提出類似的衡量指標。關於數學思維方法的各方面訓練，其具體要求主要是看運用這些方法的準確程度。這方面的定量指標很難精確，一般可採取定性考察和定量考察相結合的方法，把準確和熟練程度大體上分幾個等級加以評估。

數學思維研究與數學思維訓練有著內在的聯繫，後者以前者為基礎，並為前者提供研究素材。本文前半部分著重談我們在數學思維研究方面的初步成果，後半部分著重談數學思維訓練的技術性問題。由於以介紹情況為主，所以未專門討論前後的邏輯聯繫。顯然，數學思維訓練的進一步發展，需要充分吸

收學術界關於數學思維的豐富研究成果，充分利用數學教學活動中自覺或不自覺進行思維訓練的實踐經驗，更需要廣大數學教育工作者的積極參與。數學思維研究與思維訓練的開展，預示著數學教育改革的一個新的動向，它的前景是充滿希望的。它將帶來人們數學思維水平的提高，因而有著十分重要的社會意義和價值。

## 參考資料

1. 徐利治：“數學方法論選講”，華中工學院出版社1988版，第183-195頁。
2. 彭加勒：“科學的價值”，李醒民譯，光明日報出版社1988年版，第385頁。
3. 徐利治，王前：“數學直覺層次性初探”，載“棗莊師專學報”(自然科學版)1990年第4期。
4. 徐利治，王前：“數學與思維”，湖南教育出版社1990年版。
5. 約翰·杜威：“我們怎樣思維、經驗與教育”，姜文閱譯，人民教育出版社1991年版。
6. 愛德華·德波諾：“思維的訓練”，何道寬等譯，生活、讀書、新知三聯書店1987年版。
7. G. 波利亞：“數學與猜想”，李心燦等譯，科學出版社1984年版。
8. 轉引自 W.I.B. 貝弗里奇：“科學研究的藝術”，陳捷譯，科學出版社1979年版，第63頁。

—本文作者任職於遼寧教育學院—