集合論與現代數學

胡作玄

恐怕沒有人反對, 集合論是現代數學的基礎。但是, 現代集合論, 特別是公理集合論, 已經成爲一個同拓樸學、同調代數、代數幾何或隨機過程理論一樣的十分專門的分支, 其中的符號及術語已經令外行望而生畏。人們不禁要問: 這樣的集合論眞是現代數學的基礎嗎? 它同現代數學還有什麼關係嗎?

從歷史上來看, 1900年以前的數學幾乎沒有集合論的容身之地。在當時的文摘雜誌上, 集合論是作爲哲學的一個部門。G. Cantor 的集合論從一開始就被當成異端。當時的數學對象主要是幾何圖形、量 (無理數) 和數以及由它們衍生出來的函數, 算子等。Cantor的集合論在數學中引進兩種新事物, 一個是集合, 一個是無窮。前者給20世紀數學帶來一大批新學科, 它們可以統稱爲結構數學, 如抽象代數 (包括群論、環論、域論、格論、布爾代數理論)、拓樸學、泛函分析、測度論等, 它們都研究整體結構, 從而必須建立在集合的基礎上, 而在19世紀, 除了置換群, Lie 變換群等個別例子之外, 是不從這個角度來研究數學的, 現在說集合論是數學的基礎也是從這個意義上講的。後者是 Cantor 的最重要創造, 但由此也帶來一系列麻煩, 因此遭到許多數學家的反對。儘管如此, 由此產生出數學中一個特殊的領域 — 數理邏輯。20世紀最初30年, 主要數學家都重視這個基礎領域, 而後來則正如 J. Dieudonné 所講, 現在很少有人關心它, 除非他專精這一行。

難道無窮的理論 — 無窮集合論眞正是可有可無, 與眞正的數學研究不相干呢? 實際情況並非如此。

1. 無窮集合論來源於數學分析

Cantor在研究集合論之前, 首先研究三角級數理論, 其中一個重要問題是唯一性集問題, 所謂唯一性集是指實數集合 E, 如果每個在 E 外均收斂於 O 的三角級數均恆等於 O 。Cantor在1870年證明任何可數閉集是唯一性集。W. H. Young 在 1909 年證明任意可數集是唯一性集。N. K. Bary 在1923年證明任意可數個閉唯一性集的併集也是唯一性集, 這個問題至今沒有完全解決。這就引出對實數集合的刻劃問題, 最早是 E. Borel, R. Baire, Lebesgue 等人研究, 他們沒有走得太遠。這與他們在哲學上觀點有關。他們反對選擇公理, 到1916年以 Lusin 爲首的莫斯

科學派創立了描述集合論, 引進了解析集合及射影集合, 這一套層系後來在遞歸函數論中也很有用。至今三角級數論的這方面結果與描述集合論的成就不可分割, 而描述集合論是集合論最密切相關的數學分支之一。最近這方面的一個成就是 G. Debs 及 J. Saint Raymond在1987年證明閉唯一性集的 σ 理想沒有 Borel 基, 顯示其結構十分複雜難以用簡單的組分來刻劃。

2. 與集合論密切有關的數學領域

集合論來源於數學分析, 而分析的基礎是實數集合以及實函數。其中主要的問題除了屬於描述集合論之外, 還有點集拓樸、測度與綱性 (或范疇性) 等方面的問題。因此, 不難看出這些學科中有些問題與集合論有關。再進一步, 一般拓樸學, 一般測度論, 泛函分析等領域雖然不局限於實數集合, 仍有許多性質與集合論有關。首先維數已經不是有限維, 而是無窮維, 甚至是不可數維。泛函分析中的空間大都是無窮維的, 證明它們的定理往往在一般的集合論公理之外, 還需要選擇公理或連續統假設。線性泛函分析最基本的定理 Hahn-Banach 定理, 必須有選擇公理來保證。Banach 空間的一種推廣是桶式 (barrelled) 空間, 其中一些定理, 例如每個眞、可分桶式空間具有桶式可數擴大, 證明要假定連續統假設成立。桶式空間的直和定理需要有廣義連續統假設才行。

另一些需要集合論的領域是無窮組合論。Ramsey 理論是鴿洞原理的推廣, 而把 Ramsey 理論推廣到無窮基數, 則是無窮組合論主要內容之一。其它有關的理論是“樹” (tree) 理論及分拆理論。

代數結構也有許多分支與集合論有關。最簡單的代數結構是 Abel 群或交換群。如果交換群是有限的或有限生成的, 則已有非常完整的結果, 但一過這條界限, 進入無窮 Abel 群的領域, 集合論的味道就越來越濃了。另一種代數結構是 Boole 代數, 它與集合論有著血緣關係。Stone 表示定理指出, Boole代數都可以表示成集代數。Boole 代數中的基本定理 — 素理想定理, 實際上是弱的選擇公理。

越過這些與集合論血肉相連的數學分支, 進入數學主流領域, 現在也開始更多見到集合論的身影了。例如代數拓樸學、算子理論、算子代數、數論和如調和分析、勢論等分析領域。

3. 公理集合論

Cantor樸素集合論並非公理化的理論。由於 Russell 悖論的出現, 1908年 Zermelo 首先提出集合論的公理系統, 以避免悖論。Zermelo公理系統中包含他在1904年提出的選擇公理, 而這個公理從一開始有很大爭議。其後 A. Fraenkel 等人改進這個公理系統形成了 ZF 表示的標準的公理系統, 其中不包括選擇公理和連續統假設。數學家心目中的集合論大體上就是公理集合論 ZF, 隨著工作領域不同, 他們有的接受選擇公理, 個別的也接受連續統假設。

但是, 這種接受是建立在兩個樸素的信念基礎上:

A. 集合論公理系統 ZF 沒有矛盾。

B. 由 ZF 中可以推出不少“好”數學來。

但是, 按照 Gödel 第二不完全性定理, 集合論公理系統 ZF 的無矛盾性不能在 ZF 內得到證明。因此, ZF 無矛盾是一種信念, 或是一種哲學。另外, 正如 P. Cartier 指出的, 也不排除由 ZF 經過很長很長的證明推出一個矛盾。屆時我們還可以對 ZF 再加上某種限制, 到那時又該對數學基礎另眼相看了。

第二點更重要也更有哲學味。數學中有許多公理系統, 它們沒有矛盾, 但是從中只能推出某一狹窄領域的數學命題, 例如平面幾何中直線和圓的理論。雖然也可以證明相當複雜相當“深刻”相當難的定理, 但是現在誰也不把它們當成正經的數學了。什麼是“好”數學, 這不是個數學問題, 而是個哲學問題。一般以爲與各個領域各個分支關係密切的數學分支要比孤立的狹小數學分支要“好”。數學家希望這些好的數學都能儘可能多地由 ZF 中推出來。當然, 這也只是希望或信念而已。

實際上, 許多命題在 ZF 中既不能證明, 又不能反證。這種命題我們稱之爲獨立性命題, 要想得到一個肯定的結論, 必須在 ZF 中加上新的公理, 當然新的公理不是隨便加的, 它必須滿足兩個條件: 一是它與 ZF 相對協調, 也就是假如 ZF 無矛盾, 則 ZF 加上新公理也無矛盾; 二是它與 ZF 相對獨立, 也就是它是獨立性命題。在 ZF 中最常加入的公理是選擇公理以及連續統假設, 因爲它們一直是 Cantor 集合論的自然組成部分, 而且許多數學命題的證明或反證非有它們不可。不過, 它們也有固有的弱點。因此也有把它們變成較弱的或較強的形式甚至其否定的形式, 來作爲新的公理, 這些是公理集合論的一個主要內容。在這些研究過程中, Gödel的內模型方法與 P. Cohen 的外模型方法是公理集合論的主要技術, 它們在證明相對協調性和相對獨立性方面有重要作用。

4. 選擇公理與連續統假設

選擇公理 (AC) 是 ZF 公理系統以外與數學關係最密切的公理。特別在本世紀20年代、30年代發展起來的抽象代數學中更是必不可少的。由下面這個故事可以看出數學家對 AC 的分岐。B.L. van der Waerden 在1930-1931年出版的“近世代數學”標誌著抽象代數學正式建立。書中正式引入選擇公理並用它得出許多代數結論。但這種觀點受到邏輯學家的攻擊, van der Waerden 在1937年出版的第二版中完全取消 AC 及其推論, 這又大太削弱了代數的內容而引起代數學家的抗議。van der Waerden 眞是左右爲難。但他畢竟是一位代數學家, 還是不願意因邏輯的理由砍掉大部分有意思的代數學。1950年第三版時, 他再次把 AC 請回來。爲什麼會這樣呢? 其實 AC 在 Zermelo 的公理系統中本是其中之一。但是, AC 在1904年正式提出後, 就已經遭到法國函數論專家 E. Borel, Baire, Lebesgue等人的反對。他們反對的根據更多的是哲學上的; 也就是從

他們的構造主義觀點出發, 完整的選擇是不可行的。後來從數學角度反對 AC 的來源於 F. Hausdorff、S. Banach 及 A. Tarski先後獨立發現的由 AC 導出的“悖論”, 其中最簡單的是所謂“分球悖論”, 即可把一個球面經過剖分, 可再拼成同半徑的兩個球面。這樣一來, AC的可靠性受到質疑。但是從數學家看來, AC 是必不可少的。許多重要代數定理由與 AC 等價的 Zorn 引理得出。線性泛函分析中的基本定理 Hahn-Banach 定理, 一般拓樸學中的 Tychonov 定理, Boole代數中的 Stone 表示定理等等也是如此。從這個意義上講, 數學家大都傾向於接受它。在 ZF 公理系統中再加上 AC, 稱 ZFC , 從中可以推出不少數學, 它要比 ZF 單獨推出的定理多不少, 不過仍然有許多命題不能由 ZFC 判定, 也就是既不能證明, 也不能否證。其中連續統假設就是最重要的一個。

連續統假設可以說是 ZFC 外與數學關係最密切的重要公理了, CH它實際上是問, 一條直線上有多少點。1878年 G. Cantor 猜想, 實數集的無窮子集只有可數無窮子集和與實數集等勢的子集。在有 AC 的條件之下, 每個無窮集的勢都是 $\aleph$, 從而可表爲 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ 。1908年 Hausdorff 把這個等式推廣爲對所有序數 α 都成立, 即 $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, 後稱爲廣義連續統假設, 簡記爲 GCH。在沒有 AC 情形下, 可表示爲, 對所有無窮基數 k, 不存在基數 m , 使得

$$k < m < 2^k$$

連續統假設被 D. Hilbert 列在他23個著名問題中的首位而受到大家的重視, 但是一直沒有能夠證明或反證。第一個突破是 K. Gödel, 他證明如 ZF 無矛盾, 則 $ZF + GCH$ 也無矛盾 (同樣證 $ZF + AC$ 也無矛盾), 他的方法是構造內模型, 由此可引進所謂可構成性公理 ($V = L$), 即一切集合都是可構成的, 這樣, 他證明

$$ZF + (V = L) \Rightarrow AC$$
$$ZF + (V = L) \Rightarrow GCH$$

但是 $V = L$ 實在太強了, 不太像是眞的, 因此 Gödel 本人早就懷疑它, 而且他也最早試圖證明 CH 的獨立性。這最終於1963年由 P. Cohen 完成。從公理集合論的角度看 Cohen 的方法給集合論帶來重大突破, 使集合論產生方向性的轉折。

Cohen 的結果的重大意義在於, 它明確指出 ZF 或 ZFC 的局限性: 數學中許多問題, 它們是不能給出一個明確性答案的。要想證明或反證某個命題, 必須加上新的公理。這種命題稱爲獨立性命題, CH 是其中第一個, 而且30年來在代數、拓樸、分析等數學領域發現許多這種獨立性命題。

那麼 CH 是否爲眞這個問題是否解決了呢? 這就不是個數學問題而是哲學問題了。Gödel 等柏拉圖主義者以爲這問題沒有解決, 將來會有一個明確的結果。而 Cohen 等形式主義者則認爲, 這個問題已經解決。集合論正如幾何學中有歐氏幾何和非歐幾何一樣, 除 Cantor 集合論之外, 還可以有 CH 不成立的各種非 Cantor 集合論。除 Cantor 集合論 (滿足 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$) 之外, 還有滿足 $2^{\aleph_0} = \aleph_2, 2^{\aleph_0} = \aleph_3, \ldots$ 的非 Cantor 集合論, 現在也有許多數學家在討論這類問題。

在 CH 的獨立性結果證明之前, 波蘭數學家 Sierpinski, 在1934年出版《連續統假設》一書, 其中列舉由 CH 推出的82個推論。但是, 其中79個可由 Martin 公理 (MA) 及 $\neg CH$ ($\neg$ 表示否定) 推出, 這樣 CH 的推論往往單靠 MA 可以推出, 同樣, 也有許多情形, 在 CH 下成立的命題, 在 $MA+\neg CH$ 下被否證。Martin 公理等一大批看來“不自然”的公理產生出來。

5. 新公理

近30年來, 新公理沿著兩條路線產生, 一條增大廣度, 一條增高高度。前一條路線可以說是力迫方法的繼續, 產生的公理不太像公理, 往往是方法上的原則, 最典型的是 Martin 公理, 以及後來 S. Shelah 引進的眞力迫公理 (PFA), 半眞力迫力理 (SPFA) 等。後一條路線是 Gödel 可構造性公理 ($V=L$) 衍生出來的, 可概括爲大基數公理, 也就是假設越來越大的基數的存在性。這兩條路線間也有不少關係, 並且與數學有密切聯繫。除了這兩套公理之外, 還有從 AC 衍生出來的決定性公理 (DA), 從某種意義上講, 它是 AC 的對立面。

Martin公理與其說是公理, 勿寧說是假設, 實際上 它是一個弱連續統假設, 即由 CH 可以推出 MA。另一方面, 如果 ZFC 無矛盾, 則 MA 甚至 $MA+\neg CH$ 也同 ZFC 相對無矛盾, 或相對協調。從 MA 出發, 並不能確定 $2^{\aleph_0}$ 等於 $\aleph_2$ 還是 $\aleph_{17}$, 它只是說 $2^{\aleph_0}$ 以下的無窮基數性質同 $\aleph_0$ 一樣。

Martin公理最早應用於證明 Suslin 假設 (SH)。它斷言, 實數集 (實數直線) 作爲一個全序集合, 由下列四個性質來刻劃:

(1) 序稠密性, 即如果實數 a,b 滿足 $a<b$, 則存在實數 c , 使得 $a<c<b$。

(2) 序完備性, 即每個有上界的集合有一上確界 (即最小上界)。

(3) 無最小元及最大元。

(4) 任何兩兩不相交的開區間族最多是可數的。

SH 的另一表述是不存在 Suslin 樹。它同 CH 一樣, 與 ZFC 相對協調, 又與 ZFC 相對獨立。但是, 可以證明

$$ZFC+MA+\neg CH \Rightarrow SH$$

另一方面, Jensen 證明

$$ZFC+V=L \Rightarrow \neg SH$$

實際上, 他由 $V=L$ 推出一個強組合原理, 記作 $\diamond$, 然後得出 $\neg SH$ 。

用類似的方式還解決了另一個數學猜想, 即 Whitehead 問題: 如果 Abel 群 G, 滿足 $Ext(G,Z)=0$, 則稱爲 W 群, 其中 Z 是整數加法群。已知每自由 Abel 群均爲 W 群, Whitehead問題是問, 反過來每個 W 群是否自由群? (注: Abel 群稱爲自由群如存在一個基。$\overline{W}$ 群 G 表示對任何滿同態 (映上同態) $\pi: B\to G$, π 的核 $\ker\pi$ 爲映到 0 元素的 B 的所有元素構成的群, 如果 $\ker\pi$ 同構於 Z , 則 Z 分裂, 即, 存在同態 $\rho: G\to B$, 即 $\pi\rho=1_G, 1_G$ 表示 G 到 G 自身的恆同映射)。1951年 K. Stein 證

明, 如 $\overline{W}$ 群 G 是可數的, 則 G 是自由的, 現在 G 如不可數, 例如 G 的所數 $|G| = \aleph_1$ 如何呢? 這個問題在 ZFC 中也是不可判定的, 甚至於加上 CH 也不行。1974年, S. Shelah 得到

$$\begin{aligned} & ZFC + \diamond(\text{或 } V = L) \\ \Rightarrow \quad & \text{所有階數}\aleph_1\text{的}W\text{群是自由群。} \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} & ZFC + MA + (2^{\aleph_0} > \aleph_1) \\ \Rightarrow \quad & \text{存在}W\text{群不是自由群。} \end{aligned}$$

Martin公理在一般拓樸學、無窮組合論中起著關鍵的作用。更進一步, 由 MA 的推廣 — Martin 極大公理 (MM) 可以推出 $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, 接著, S. Todorcevic 證明 PFA 已經可推出 $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, 而這正是 Gödel 極力想確認的結果。

在 ZF 中加入某種大基數存在的公理可以說是 Gödel 的綱領。Cantor 當時陷在 CH 中不能自拔, 他曾考慮的最大基數是 $2^{2^{\aleph_0}}$ 。其後不久, 如 Hausdorff 及 Mahlo 就開始考慮更大的基數, 尤其是1930年 Ulam 爲了解決測度問題而引進可測基數。1961年 D. Scott 第一次顯示大基數公理的作用, 他證明如存在可測基數, 則可構造性公理不成立。從而 GCH 不成立。但是 Levy 及 Solovay 於1964-1967年證明, 所有當時所知的大基數的存在性都不能斷定 CH 的眞假, 這當然有悖 Gödel 的初衷, 但是1986年, M. Foreman 引進大基數定理的推廣 — 相似性公理, 並由此推出 GCH。另一方面, 通過不同的大基數公理, Foreman 及 Woodin 證明 GCH 處處不成立, Woodin甚至改進成 $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+2}$ 。

大基數公理對於數學命題也有用。最著名的是正規 Moore 空間可度量化猜想。一般拓樸空間十分複雜, 難以研究, 一旦具有好的性質, 對研究十分有利。最好的性質之一是可度量化。1950年三位數學家在可度量化問題上取得突破, 但是這個猜想是個獨立性命題, 由乘積測度擴張公理 (PMEA) 可推出猜想爲眞, 這與一個大基數公理有關, 反過來由 CH 可推出猜想爲假。

大基數越來越大, 到頂時發現是一個災難性的公理 $0 = 1$ 。運用大基數公理的邏輯學家現在的哲學, 是由災難向後退一步!

6. 集合論技術的應用

前面所講大抵是通過集合論公理 ZF 加上適當的新公理推出這樣或那樣的結果, 其中當然這用集合論的技術, 特別是可構造性及力迫方法。除此之外, 集合論技術在證明由 ZFC 公理推出的結論上有時也是必不可少的。其中有一部分是通過弱化甚至取消新的公理來實現的。最近一系列結果把大基數公理的高度 (也可以說是大基數的大小) 降下來。還有許多數學定理, 是直接由 ZFC 推出, 但用的是集合論技術。例如

A. 自由 Abel 群的刻劃。Steprans 證明, Abel 群是自由群當且僅當它具有離散範

數。加法群 G 的範數 ν 同測度的意思差不多, 定義如下:

$$
\begin{aligned}
&\nu \to R \\
&\nu(g) = 0 \text{當且僅當} g \text{是} 0 \text{元素} \\
&\nu(g+h) \leq \nu(g) + \nu(h) \\
&\nu(mg) = |m|\nu(g), m \text{是一整數}
\end{aligned}
$$

ν 稱爲離散的, 如對於所有 $g \neq 0$, 存在 $r > 0$ 使得 $\nu(g) > r$ 。

B. 什麼群可以是一個“好”空間的基本群。例如有理數加法群 Q^+ 是否可以是這類空間基本 群。拓撲空間中有許多是病態的, 而“好”空間則具有一些常見的流形等較正規的空間的性質, 如緊性、弧連通性、局部弧連通性、可度量性等。S. Shelah 證明:“好”空間的基本群或是有限生成的, 或具有基數 2^ω (即連續統基數), 這樣就排除了 Q^+ 是“好”空間基本群的可能性。

C. Banach 空間中的算子。 Shelah 和 Steprans 證明, 存在不可分的 Banach 空間, 其上每個算子均可表爲 $S + \rho I$ 的形式, 其中 S 具有可分的値域, ρ 是數量, I 是恆等算子。

D. Kaplansky 猜想。X 是一個緊空間, X 上所有連續複數值函數構成 Banach 代數 $B(X, C)$, 由 $B(X, C)$ 到另一個複數域上的 Banach 代數的任何同態都連續, 它在 ZFC 中不能證明 也不能否證。1976年 Dales 及 Esterlé 獨立證明由 CH 可推出猜想不眞, 但同年 Solovay 造一模型證明它爲眞。

7. 結束語

集合論特別是公理集合論系統 ZF 作爲現代數學的基礎實際上爲大多數學家所默許, 雖然我們不能說這個基礎很牢靠, 但也不能說它像悖論出現時對基礎是完全動搖的。儘管它能推出許多“好”數學, 但確實也有許多眞正的數學命題是獨立性結果。好在這些對整個數學還沒有很大的影響。大多數數 學家安於現狀, 大多數邏輯學家也是如此。當然, 這並不是說沒有其他道路, 下面這些方向的研究都有人在做工作, 不過不能說他們的影響超過上面的“主流派”。

A. 對 ZF 內加以小調整, 對於其中一些公理 (如替換公理) 加強或減弱。

B. 對其它的集合論公理系統加以改進, 特別是數學家喜歡的 Gödel-Bernays 公理系統 (GB) 以及定義新的集合 (如半集合) 並構造它們的公理系統。

C. 改進原來 Russell-Whitehead 的類型論, 原來的類型論繁瑣難用, 經改進後在算術及分析上有很大用處。J. L. Bell 稱之爲局部集合論, 因爲只有同型的集合才能考慮其間的包含關係。

D. 范疇論。這是從代數拓樸及同調代數衍生出來的理論, 對於結構數學有著重大的方法論意義。例如, 它構成代數幾何學不可少的工具。近20年來, 它與邏輯聯繫在一起, 形成一種全新的數學基礎。

—本文作者任職於中國科學院系統科學研究所—