從算術幾何平均不等式看數學解題中的一題多解

黃毅英

蓋聶 (Gagné, 1984) 指出解題 (Problem solving) 爲學習的最高層次。它亦恐怕爲人類最複雜的認知活動。解題能力之獲得更一直爲數學學習所著重。美國國家數學督導員議會 (National Council of Supervisors of Mathematics, 1977) 提出「學習解難爲研讀數學的主要原因」。尤有進者, 學習如何解題並非只對有志數學的同學重要; 若考慮普及教育爲了培養未來公民應具知識、技能與素養之目的, 讓一般學生具備面對未來問題之能力要比務使其背誦大堆公式定理更有意義。故此, 解題能力之增強實爲現時代學校數學教學的焦點。

一. 解題過程與一題多解

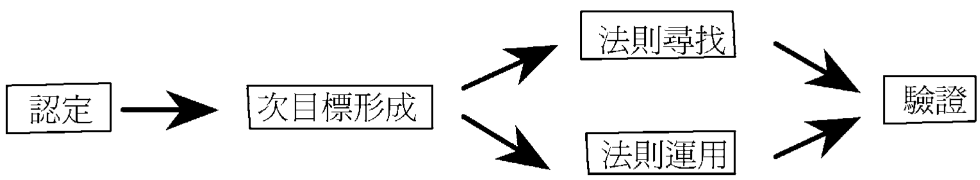
不少學者曾建立解題模型, 其中波利亞 (Polya, 1957) 提出首個經典的解題模型, 包括了如下的四步曲:

1. 瞭解問題,
2. 設計解題計劃,
3. 執行該計劃,
4. 回顧。

於 Scandura (1977) 中則提出了以下的解題步驟:

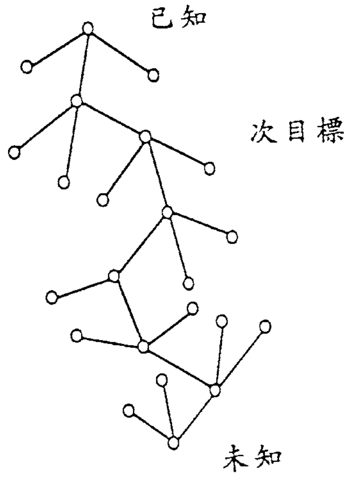
1. 解題者將問題分成細步 (次目標形成)。
2. 他繼而爲各細步及整個問題訂定目標。
3. 他找尋達至這些目標的法則 (法則尋找)。
4. 他判斷這些法則是否足以解決問題 (法則運用)。
5. 若足夠便轉向另一次目標; 若否, 則轉向找尋統攝較低層次法則的高層次法則。足以解決問題與否亦於此作決定。

基於上述模型, 李芳樂 (Lee, 1980) 以 225 名香港中四學生作研究, 用路徑分析 (path analysis) 證立了以下的數學解題模式 (圖一)。



圖一. 數學解題過程之路徑圖

故此, 數學解題可被視爲從已知通向未知路徑的找尋 (圖二)。在每一步中作腦部衝擊並選出最可能的下一步對整個問題之解決甚爲重要 (黃, 1989), 正如 Feldhusen 和 Guthrie(1979) 中云:「在慣常事物中看出不慣常方法」。



圖二. 從已知通向未知的路

學習者若能多接觸一題多解的例子則極能提高上述「尋覓下一站」的能力, 從而對一般的解題能力亦得到提高 (黃, 1987)。本文即以算術幾何平均不等式爲例, 此不等式在高中已接觸到, 但下面我們舉出超過十種不同的證明方法, 而部分是取材自香港高級程度考試純數試題。於此更可看到得出算術幾何平均不等式的結果並不重要, 所運用的各種不等式證明過程方爲至要。故本文將對每個證明中涉及的解題技巧作詳細分析。

二. 算術幾何平均不等式及其古典證明

對於 n 個正數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 算術與幾何平均定義爲

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \\ G_n &= \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}, \end{aligned}$$

而恆有

$$A_n \geq G_n。$$

今以 $P(n)$ 表 $A_n \geq G_n$。

(a) 以數學歸納法證 $P(2^k)$。當$k=1$,

$$\begin{aligned} &\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2} \\ &= \left(\sqrt{\frac{a_1}{2}}-\sqrt{\frac{a_2}{2}}\right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

等式成立當 $\sqrt{\frac{a_1}{2}}=\sqrt{\frac{a_2}{2}}$, 即 $a_1=a_2$。
若k時爲眞, 對於$k+1$,

$$\begin{aligned} &\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}+a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \\ = &\ \frac{1}{2}\left[\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^k}}{2^k}\right. \\ &\left.+\frac{a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k}\right] \\ \geq &\ \frac{1}{2}\left[\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}+\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}\right] \\ &\hfill [用\ P(2^k)] \\ \geq &\ \left(\sqrt[2^{k+1}]{a_1a_2\cdots a_{2^k}}\cdot\sqrt[2^{k+1}]{a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}\right) \\ &\hfill [用\ P(2)] \\ = &\ \sqrt[2^{k+1}]{a_1a_2\cdots a_{2^k}a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}} \end{aligned}$$

等式成立當

(1) $a_1=a_2=\cdots=a_{2^k}, a_{2^k+1}=\cdots=a_{2^{k+1}}$ 及

(2) $\sqrt[2^k]{a_1a_2\cdot a_{2^k}}=\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}$
即當且僅當 $a_1=a_2=\cdots=a_{2^k}=a_{2^k+1}=\cdots=a_{2^{k+1}}$。

(b) 對於 $n<2^k$, 因 $P(2^k)$ 爲眞, 故有

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{2^k}}{2^k} \ge \sqrt[2^k]{b_1b_2\cdots b_{2^k}},$$

其中 $b_1,b_2,\cdots,b_{2^k}$ 爲正數, 而等式成立當且僅當 $b_1=b_2=\cdots=b_{2^k}$。今對於正數 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 選

$$b_1=a_1,b_2=a_2,\cdots,b_n=a_n,$$

$$b_{n+1}=b_{n+2}=\cdots=b_{2^k}=R,$$

其中

$$R=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}。$$

利用$P(2^k)$, 有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+\overbrace{R+\cdots+R}^{2^k-n}}{2^k} \ge \sqrt[2^k]{a_1a_2\cdots a_n\underbrace{R\cdots R}_{2^k-n}}$$

即 $\left(\frac{nR+(2^k-n)R}{2^k}\right)^{2^k} \ge a_1a_2\cdots a_nR^{2^k-n}$

即 $R^{2^k}\ge a_1a_2\cdots a_nR^{2^k-n}$

即 $R^n \ge a_1a_2\cdots a_n$

即 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

等式成立當且僅當 $b_1=b_2=\cdots b_{2^k}$ 即 $a_1=a_2=\cdots=a_n$。

對於任意正整數 n, 必有另一整數 k 使得 $n<2^k$, 而由 (a), $P(2^k)$ 爲眞, 再由 (b), $P(n)$ 即爲眞了。我們留意到上面的代入方式亦甚特別。一般而言, 以 $a_r=r,f(r)=r(r+1)/2$ 以爲例, 要利用

$$P(n): a_1+a_2+\cdots+a_n=f(n)$$

證

$$P(n+1): a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}=f(n+1)$$

時, $P(n)$ 及 $P(n+1)$ 的兩套 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是相等的。但在上面 (b) 步的的證中, 我們可自由的選取假設 $P(2^k)$ 中的 $b_1,b_2,\cdots,b_{2^k}$, 把之看成代填充的空格:

$$\begin{array}{lcl}
\text{已知} & \rightarrow & \sqrt[2^k]{\Box\cdot\Box\cdots\Box\ \Box\cdots\Box} \\
 & & \ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \ \ \uparrow \\
\text{代入} & \rightarrow & \ a_1\ \ a_2\ \ \ a_n\ \underbrace{R\ \ \ \ \ R}_{2^k-n} \\
 & & \le \dfrac{\overbrace{\Box+\Box+\cdots+\Box}^{2^k}}{2^k}
\end{array}$$

此種技巧可應用於凸函數中, 香港高級程度純數科考試七十一年卷二第六題 [即香港大學之入學試, 以下簡作高試71 (II) 6] 即爲:

(A) 設$f(x)$ 爲定義於 $[a,b]$ 之凸函數, 即

$$f(x_1)+f(x_2)\le 2f(\frac{x_1+x_2}{2})$$

對於任意的$x_1,x_2\in[a,b]$, 對於正整數n, 求證命題 $I(n)$: 若對於$x_i\in[a,b], i=1,2,\cdots,n$ 則

$$f(x_1)+\cdots+f(x_n)\le nf(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n})$$

(i) 以數學歸納法證明, 對於正整數 k, $I(2^k)$ 爲眞。

(ii) 證明若$I(n)(n\ge 2)$ 爲眞, 則$I(n-1)$亦眞。

(iii) 證明對於任何正整數$n, I(n)$ 爲眞。

(B) 證明$f(x)=\sin x$於$[0,\pi]$爲凸函數, 且推出

$$\frac{1}{n}(\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n)\le\sin\frac{\theta_1+\cdots+\theta_n}{n}$$

對$0\le\theta_i\le\pi$。以上是利用了數學歸納法的一個較深的版本, 即先證明了

(a) $P(2^k)$, 即 $P(2),P(4),P(8),P(16),\cdots$

(b) $P(n)\Rightarrow P(n-1)$。這證明是倒過來的。

例如要看$P(13)$ 是否眞確, 可由以下途徑得出:

$$\begin{aligned}&P(16)\quad[\text{利用}a]\\ \Rightarrow\ &P(15)\quad[\text{利用}b]\\ \Rightarrow\ &P(14)\quad[\text{利用}b]\\ \Rightarrow\ &P(13)\quad[\text{利用}b]\end{aligned}$$

三. 凸函數

我們亦可利用凸函數的概念證明$A_n\ge G_n$。設$f(x)=\ln(x)$, 有

$$\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n\le n\ln\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

但

$$\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n=\ln(a_1a_2\cdots a_n)$$

$$n\ln\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

$$=\ \ln(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n})^n$$

故

$$a_1a_2\cdots a_n\le(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n})^n$$

即$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$。

而衆所周知, 二次可導函數若有$f''>0$, 則f爲凸函數。高試86(II)8 便有以下一題:

設$g:R\to R$ 爲一可導函數而g'上升。

(A) 設a 及λ 爲實常數且$0<\lambda<1$。證明 $F(x)=g(\lambda x+(1-\lambda)a)-\lambda g(x)-(1-\lambda)g(a)$

當$x=a$ 有最大值。

(B) 設$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m(m\ge 2)$ 爲m個正實數使得 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m=1$.

(i) 以數學歸納法證明, 對於任意實數 $x_1,\ x_2,\cdots,x_m$,

$$\begin{aligned}&g(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_mx_m)\\ &\le\lambda_1g_1(x_1)+\lambda_2g_2(x_2)\\ &+\cdots+\lambda_mg(x_m)\end{aligned}$$

(ii) 以考慮, $g(x)=e^x$, 證明對於任意正數$a_1,a_2,\cdots,a_m$, 恆有 $a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_m^{\lambda_m}\le\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_ma_m$。

四. 初等方法

以上方法不涉及複雜之歸納法便用到微積分。我們是否有一個能適合剛進入高中學生的證法呢? 以下提供其一。

首先, 對於$a,b>0$, 由二項式定理, 得

$$(a+b)^n > a^n + na^{n-1}b。$$

用普通的歸納法, 若$n-1$時爲眞, 對於n, 假設$a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_2 \geq a_1 \geq 0$。又設

$$a = \frac{1}{n-1}\sum_{r=1}^{n-1} a_r, b = \frac{1}{n}(a_n - a),$$

故有$a,b\geq 0$ 及

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} a_r\right)^n &= (a+b)^n > a^n + na^{n-1}b \\ &= a_n\left(\frac{1}{n-1}\sum_{r=1}^{n-1} a_r\right)^{n-1} \\ &\geq a_n(a_1a_2\cdots a_{n-1}),\end{aligned}$$

用歸納法假設即證畢。

五. 數字代換法

上法之可以如此淺易, 因首先假設了$a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_2 \geq a_1 \geq 0$。此法亦甚常見。如於下法中。則於$a_1,\cdots,a_n$中找出最大及最小的加以適當的代換便得其幾何平均不變, 此即爲高 71(I) 9。

對於正實數$a_1,\cdots,a_n$, 設 $G(a_1,\cdots,a_n) = \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$ (幾何平均) 及$A(a_1,\cdots,a_n) = \frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)$(算術平均)。

(i) 證明若$a_1 = \cdots = a_n = a, G(a_1,\cdots,a_n) = A(a_1,\cdots,a_n) = a$。

(ii) 證明若 $a_1,\cdots,a_n$ 非全等, 則有一 a_i 大於 $G(a_1,\cdots,a_n)$及一 a_j小於$G(a_1,\cdots,a_n)$。

(iii) 設 $a_1 > G(a_1,\cdots,a_n)$, 並設 $a_1'= G(a_1,\cdots,a_n), a_2' = a_2,\cdots,a_{n-1}' = a_{n-1}$ 及 $a'_n = a_1a_n/G(a_1,\cdots,a_n)$。證明 $G(a_1',\cdots,a_n') = G(a_1,\cdots,a_n)$ 及$A(a_1',\cdots,a_n') < A(a_1,\cdots,a_n)$。

(iv) 用以上結果, 證明$G(a_1,\cdots,a_n) \leq A(a_1,\cdots,a_n)$ 而等式成立當且僅當 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$。

於第 (iv) 步中, 我們不斷的將a_i換作G, 直至所有a_i均變成G, 即

$$\begin{aligned}&A(a_1,a_2,\cdots,a_n) > A(a_1',a_2',\cdots,a_n') \\ &> A(a_1'',a_2'',\cdots,a_n'') \\ &> \cdots \\ &> A(G,G,\cdots,G) \quad (\text{最後一步}) \\ &= G(G,G,\cdots,G) = \cdots \\ &= G(a_1'',a_2'',\cdots,a_n'') \\ &= G(a_1',a_2',\cdots,a_n') \\ &= G(a_1,a_2,\cdots,a_n)\end{aligned}$$

我們留意到, 每一步的 「G」 均相等 [即$G(a_1,a_2,\cdots,a_n)= G(a_1',a_2',\cdots,a_k') = \cdots$] 故不會最後變成形如$A(G,G',G'',\cdots)$之項。而以上步驟亦必會經有限步後停止, 否則, 上證即無效。

其理由是: 於第一步中, 我們撿出最大值 a_1 及最小值 a_n, 而換 a_1 以 $a_1'(=G)$, 換a_n以a_n'=a_1a_n/G。若及後a_1'再成爲最大或最小, 則變成循環之代換。幸而此事不會發生, 皆因 $G(= a_1')$ 爲中值, a_i' 不會再變成最大或最小值, 除非到最後步驟, 那時, 所有 a_i 均變成G了。

六. Erdös 之證明

此證明運用不等式

$$e^x \geq 1+x \quad (x \geq -1)。$$

對於每一r, 有

$$\exp(\frac{a_r}{A_n}-1) \geq \frac{a_r}{A_n}$$

求乘積, 得

$$\begin{aligned} 1 &= \prod_{r=1}^{n} \exp(\frac{a_r}{A_n}-1) \\ &= \exp\left(\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{a_r}{A_n}-1\right)\right) \\ &\geq \prod_{r=1}^{n} \frac{a_r}{A_n} = (\frac{G_n}{A_n})^n。 \end{aligned}$$

此證明之一變化爲利用

$$e^x \geq xe \qquad (x>0)$$

或

$$\ln x \leq x-1 \qquad (x>0)。$$

事實上對數之算術平均=幾何平均之對數。於此種證明中, 無須利用數學歸納法, 如高試 81 (I) 7:

(a) 設$f(x)=x-1-\log_e x$。求$f(x)$之最小值, 並證對於任意$x>0, \log_e x \leq x-1$ 。何時等式成立?

(b) 設$x_1, x_2, \cdots, x_n$及$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$爲正數使得 $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_n x_n=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1.$

證明　　$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq 1$。

何時等式成立?

(c) 對於任意正數, $a_1, a_2, \cdots, a_n$及$p_1, p_2, \cdots, p_n$證明

$$\begin{aligned} &(a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n})^{\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}} \\ &\leq \frac{p_1 a_1+p_2 a_2+\cdots+p_n a_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}。 \end{aligned}$$

再比較高試 89(I)10 的做法便知它們全部皆屬 Erdös 證明的系列。它們所用到的$e^x \geq x+1, \log_e x \leq x-1$及$e^{x-1} \geq x$實際沒有分別:

(a) 透過找尋$f(x)=e^{x-1}-x$的最小值, 或用其他辦法, 證明對於任意實數$x, e^{x-1} \geq x$。

(b) 設$a_1, a_2, \cdots, a_n$及$b_1, b_2, \cdots, b_n$爲正數。證明

$$e^{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}-n} \geq \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}。$$

由此證明若 $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \leq n$ 則 $\prod_{i=1}^{n} a_i \leq \prod_{i=1}^{n} b_i$。

(c) 利用 (b) 步結果, 證明對於任意正數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,

$$\left[\prod_{i=1}^{n} a_i\right]^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

由此證明

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{a_i}-\frac{1}{m}\right] \geq 0,$$

其中$m=\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$。

七. 以微積分求最小值

於數字代換法中, 對於既定之幾何平均, $(a_1+a_2+\cdots+a_n)/n$之最小值由

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

達到。當以歸納法證$P(n)$時, 對於既定之a_1, $a_2,\cdots,a_{n-1}$, 我們可以利用微積分求

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n}{n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n}}$$

之最小值。此即爲高試67 (II) 7(a) 一題:

對於$a_1>0, a_2>0,\cdots,a_n>0$, 求

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+x}{n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}x}}$$

之最小值$(x>0)$。並用數學歸納法證明

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}。$$

其實, 最小值乃由

$$x=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$$

達到。這可比較「古典證明」中之設

$$R=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

及「初等證明」之設

$$a=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}。$$

八. 加權平均

n個正數$a_1,a_2\cdots,a_n$之加權平均爲

$$\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}。$$

當$p=1$即變成算術平均, 當$p\to 0$則成幾何平均。對於大p 有大的加權平均即爲$P(n)$之推廣。此一結果用以上證明稍改即可:

對於$a_1,a_2,\cdots,a_n>0$及$p\neq 0$, 設

$$M_p(a)=\left(\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}a_r^p\right)^{1/p}$$

(a) 求$M_1(a), M_{-1}(a)$及$\lim\limits_{p\to 0}M_p(a)$。

(b) 若p,q爲二非零數並有$p>q$。若A,B爲適合

$$\left(\frac{A}{n-1}\right)^{1/p}\ge\left(\frac{B}{n-1}\right)^{1/q}$$

之二數, 對$x>0$, 求

$$f(x)=\frac{\left(\frac{A+x^p}{n}\right)^{1/p}}{\left(\frac{B+x^q}{n}\right)^{1/q}}$$

之導數, 證

$$\begin{aligned}f(x)&\ge n^{p-q}\frac{A^q}{(B^{p/(p-q)}+A^{q/(p-q)})^{p-q}}\\&\ge 1\end{aligned}$$

(c) 設$A=a_1^p+a_2^p+\cdots+a_{n-1}^p, B=a_1^q+a_2^q+\cdots+a_{n-1}^q$, 並用歸納法, 證明對於$p>q, M_p(a)\ge M_q(a)$。

九. 問題之重組

$P(n)$的證明問題可重組成如何將一既定正數S_n分成n份$a_1,\cdots,a_n$ (即$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$) 使得$P_n=a_1a_2\cdots a_n$越大越好。

若此最大值爲$\hat{a}_1,\hat{a}_2,\cdots,\hat{a}_n$所達到。又若 $\hat{a}_r$ 不全等, 設$\hat{a}_1\neq\hat{a}_2$, 考

慮$\alpha, \alpha, \hat{a}_3, \hat{a}_4, \cdots,\ \hat{a}_n$, 其中$\alpha = (\hat{a}_1 + \hat{a}_2)/2$。其和仍爲$S_n$, 而積爲

$$P_n' = \alpha^2 \hat{a}_3 \cdots \hat{a}_n,$$

且
$$\begin{aligned} P_n &= (\alpha + d)(\alpha - d)\hat{a}_3 \cdots \hat{a}_n \\ &= (\alpha^2 - d^2)\hat{a}_3 \cdots \hat{a}_n < P_n', \end{aligned}$$

其中$d = (\hat{a}_1 - \hat{a}_2)/2$, 對「$P_n$爲最大」矛盾。故最大值乃由$\hat{a}_1, \hat{a}_2, \cdots, \hat{a}_n$所達成, 其中所有$a_i$相等, 而各自等於

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

其時$A_n = G_n$, 故一般而言$G_n \le A_n$。

十. 既定乘積

除上法外, 我們可考慮既定乘積$a_1 a_2 \cdots\ a_n$ 時 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$之最小值。此爲高試 79(I) 5 一題:

(a) 對於 $x < 1 < y$, 證明

$$x + y - xy - 1 > 0。$$

並證明對於$n + 1 (n \ge 1)$個實數$x_1, \cdots,\ x_{n+1}$, 若$x_1 < 1 < x_{n+1}$及$x_1 x_{n+1} + x_2 + \cdots + x_n \ge n$, 則

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} > n + 1。$$

(b) 用 (a) 及數學歸納法, 證明對於$n (n \ge 1)$個正整數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 若$x_1 x_2 \cdots x_n = 1$則

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \ge n。$$

並證, 對於任意 n個正數$y_1, y_2, \cdots, y_n$,

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \ge \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n}。$$

此法與數字代換法相同之處, 爲以$P(n)$ 證 $P(n + 1)$時, 須從$x_1, \cdots, x_{n+1}$中選出特別之數, 即x_1及x_{n+1}使得$x_1 < 1 < x_{n+1}$。於此, 我們無須代換, 而只將x_1, x_{n+1}「合併」 而成$x_1 x_{n+1}$。又於 (b) 步, 要證

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \ge \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n},$$

我們首先證明

$$\frac{y_1}{G} + \frac{y_2}{G} + \cdots + \frac{y_n}{G} \ge n$$

其中$G = \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n}$。此與 Erdös 之證明相似 [高試81 (I) 7], 在證明

$$\begin{aligned} &(a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n})^{\frac{1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}} \\ \le\ & \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}, \end{aligned}$$

則首先證

$$\begin{aligned} &\left(\frac{a_1}{K}\right)^{\frac{p_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}} \left(\frac{a_2}{K}\right)^{\frac{p_2}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}} \cdots \\ &\left(\frac{a_n}{K}\right)^{\frac{p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}} \le 1, \end{aligned}$$

其中

$$K = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}。$$

十一. Young's 不等式

Young's 不等式即爲, 對於$a, b \geq 0$及$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

$$\begin{aligned} ab &\leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \quad 若 \quad pq>0, \\ ab &\geq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \quad 若 \quad pq<0。\end{aligned}$$

以此可證明 Hölder 不等式 [高試 79(II)4及高試82(I)1]。Young's 不等式之證明則出現於高試84 (II) 8, 如下:

設f爲實函數, 其導數連續, 並於$I=[0,\infty)$ 中上升。若$f(0)=0$, 設$a \in I$及$b \in f[I]$。

(a) 對任意$t \in I$, 定義$g(t)=bt-\int_0^t f(x)dx$。證g於$f^{-1}(b)$達最大值。

(b) (i) 證明$\int_0^{f^{-1}(b)} xf'(x)dx = g(f^{-1}(b))$。

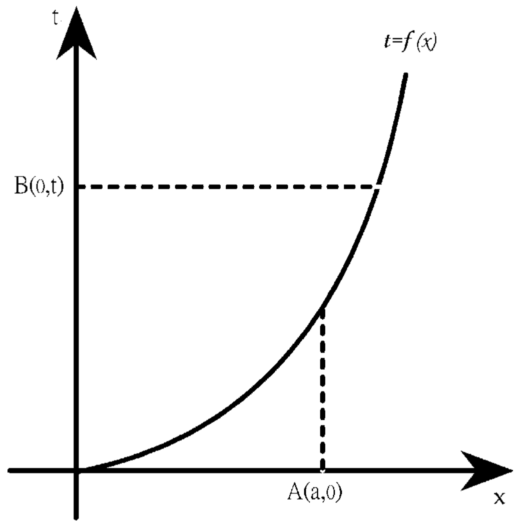
(ii) 利用轉換變數, 證明

$$\int_0^{f^{-1}(b)} xf'(x)dx=\int_0^b f^{-1}(x)dx。$$

(c) 用 (a) 及 (b) 證明

$$\int_0^a f(x)dx+\int_0^b f^{-1}dx \geq ab。$$

對於下圖, 若積分被解釋爲面積, 以上不等式有何示意?



圖三

(d) 用 (c) 證明, 對於$p>2$及$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

$$\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q \geq ab。$$

然而 Young's 不等式亦可用下面方法加以證明。對於$pq>0$, 設$a^p=r, b^q=s$及$\frac{1}{p}=t$, 我們只須證明

$$tr+(1-t)s \geq r^t s^{1-t}。$$

此爲一齊次不等式。考慮$f(u)=u^t-tu-(1-t)$, 於$u=1$時達最大值, 故有$f(u) \leq f(1)=0$, 即

$$u^t \leq tu+(1-t),$$

再代以$u=r/s$即得上面之結果。

現即用 Young's 不等式證明 $A_n \geq G_n$

(a) 已知, 對於$0<t<1, r, s \geq 0$, 有

$$tr+(1-t)s \geq r^t s^{1-t}$$

證明對於$a,b\geq 0, p,q>0$及$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=q$, 有

$$ab\leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}。\qquad \text{(Young's 不等式)}$$

(b) 若$P,Q,x,y>0$及$P+Q=1$, 證明

$$Px+Qy\geq x^py^Q。$$

(c) 若$a_1,a_2,\cdots,a_{m+1}; x_1,x_2,\cdots x_{m+1}>0$ 及$a_1+a_2+\cdots+a_{m+1}=1$, 代以$\sigma=a_1+1_2+\cdots+a_m$及

$x=\frac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_mx_m}{a_1+a_2+\cdots+a_m}$, 證明

$$\begin{aligned}&a_1x_1+\cdots+a_{m+1}x_{m+1}\\ \geq\ &\left(\frac{a_1x_1+\cdots+a_mx_m}{a_1+\cdots+a_m}\right)^\sigma x_{m+1}^{a_{m+1}}。\end{aligned}$$

(d) 用數學歸納法證明下事。若 $a_1,a_2,\cdots$, a_m; $x_1,x_2,\cdots,x_m>0$其中

$$a_1+a_2+\cdots+a_m=1,$$

則

$$\begin{aligned}&a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_mx_m\\ &\geq x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_m^{a_m}。\end{aligned}$$

以上即爲$A.M.\ \geq\ G.M.$之推廣, 此法爲極直接的。在將$P(m+1)$化做$P(m)$時, 我們無須選取特別的x_i, 我們只須合併任意m項:

$$\underbrace{a_1x_1+\cdots+a_mx_m}+a_{m+1}x_{m+1}$$

而成

$$\begin{aligned}&\sigma\left(\frac{a_1}{\sigma}x_1+\frac{a_2}{\sigma}x_2+\cdots+\frac{a_m}{\sigma}x_m\right)\\ &+a_{m+1}x_{m+1}\\ \geq\ &\left(\frac{a_1}{\sigma}x_1+\frac{a_2}{\sigma}x_2+\cdots+\frac{a_m}{\sigma}x_m\right)^\sigma+x_{m+1}^{a_{m+1}}\\ &(\text{由於}\sigma+a_{m+1}=1)\end{aligned}$$

而由於

$$\frac{a_1}{\sigma}+\frac{a_2}{\sigma}+\cdots+\frac{a_m}{\sigma}=1,$$

再用歸納法即得結果。

十二. 上法之簡化

高試85 (I) 5即利用了對$k>1$,

$$x^k\geq kx+(1-k)$$

(a) 對非負數x及整數$k>1$, 證明

$$x^k+k-1\geq kx \qquad (*)$$

何時等式成立?

(b) 設n爲大於1之整數, $a_1,a_2,\cdots,a_n$爲正數, 對於$m=1,2,\cdots,n$, 設

$$\begin{aligned}A_m&=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m a_i,\\ G_m&=\left(\prod_{i=1}^m a_i\right)^{\frac{1}{m}}.\end{aligned}$$

(i) 對於$m=2,3,\cdots,n$, 證明

$$\begin{aligned}&\left(\frac{G_m}{G_{m-1}}\right)^m\\ =\ &\frac{mA_m-(m-1)A_{m-1}}{G_{m-1}}\quad (**)\end{aligned}$$

(ii) 用 (*) 及 (**) 證明

$$A_m - G_m \geq \frac{m-1}{m}(A_{m-1} - G_{m-1})$$

其中$m = 2, 3, \cdots, n$。

(iii) 推出$A_n \geq G_n$, 等式成立當且僅當$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$。

十三. Young's 不等式與加權平均

下式爲 Young's 不等式之推廣: 若$p > q > 0$ 或$0 > p > q$, 則

$$\frac{x^p - 1}{p} \geq \frac{x^q - 1}{q}$$

等式成立當且僅當$x = 1$。同理, 只須對

$$f(x) = qx^p + (p-q) - px^q$$

求導數即可證得。

設$A = \left(\frac{a_1^q + a_2^q + \cdots + a_n^q}{n}\right)^{1/q}$。將$x_i = a_i/A$ 代入$qx^p + p - q \geq px^q$ 並求和, 即得

$$\begin{aligned} & q\left(\frac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}{A^p}\right) + pn - qn \\ \geq \quad & p\left(\frac{a_1^q + a_2^q + \cdots + a_n^q}{A^q}\right) \end{aligned}$$

由於

$$a_1^q + a_2^q + \cdots + a_n^q = nA^q,$$

故

$$q\left(\frac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}{A^p}\right) \geq qn$$

若$p > q > 0$, 則上式變成

$$\frac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}{n} \geq A^p,$$

亦即

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_1^q + a_2^q + \cdots + a_n^q}{n}\right)^{1/p} \\ \geq \quad & \left(\frac{a_1^q + a_2^q + \cdots + a_n^q}{n}\right)^{1/q}。 \end{aligned}$$

若$0 > p > q$, 則

$$\frac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}{n} \leq A^p,$$

亦即

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \\ \leq \quad & \left(\frac{a_1^q + a_2^q + \cdots + a_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}}。 \end{aligned}$$

高試 80 (I) 3則爲$p = m, q = 1$的特殊情況:

(a) 若$x > 0$及p爲正整數, 證明

$$\frac{x^{p+1} - 1}{p+q} \geq \frac{x^p - 1}{p},$$

等式成立僅當$x = 1$。

(b) 設$x_1, x_2, \cdots, x_n$爲正數且$\sum_{i=1}^n x_i \geq n$

(i) 證明對正整數m,

$$\sum_{i=1}^n x_i^m \geq n。$$

(ii) 若對於某大於1之整數m, 有$\sum_{i=1}^n x_i^m = n$, 證明

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1。$$

(c) 用 (b) 證明, 對於任意正數$y_1, y_2, \cdots, y_n$及正整數m,

$$\begin{aligned}&\frac{y_1^m+y_2^m+\cdots+y_n^m}{n}\\ &\geq\left(\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\right)^m,\end{aligned}$$

等式成立當且僅當$m=1$或$y_1=y_2=\cdots=y_n$。

十四. 變化

上式$\frac{x^{k+1}-1}{k+1} \geq \frac{x^k-1}{k}$可化成 $kx^{k+1}+1 \geq (k+1)x^k$, 此即高試 74 (I) 5 的變化:

(a) 設k爲正整數及x爲正數。證明

(i) $kx^k < x^{k-1}+\cdots+x+1$若$x<1$。

(ii) $kx^k > x^{k-1}+\cdots+x+1$若$x>1$。

以此證明

$$kx^{k+1}+1 \geq (k+1)x^k,$$

並決定等式成立之條件。

(b) 設$x_1, \cdots, x_k, x_{k+1}$爲 $k+1(k\geq 1)$個正數。設 $x^{k(k+1)}=\frac{x_1}{x_{k+1}}\frac{x_2}{x_{k+1}}\cdots\frac{x_k}{x_{k+1}}$ 並用 (a) 證明

$$\begin{aligned}&x(x_1x_2\cdots x_k)^{\frac{1}{k}}+x_{k+1}\\ &\geq (k+1)(x_1x_2\cdots x_kx_{k+1})^{\frac{1}{k+1}},\end{aligned}$$

等式成立當且僅當$\frac{x_1}{x_{k+1}}\frac{x_2}{x_{k+1}}\cdots\frac{x_k}{x_{k+1}}=1$。

(c) 用 (b) 證明對$n(n \geq 1)$個正數$x_1, x_2, \cdots, x_n$,

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq (x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

等式成立當且僅當 $x_1=x_2=\cdots=x_n$。

十五. 方程論

我們亦可借助方程論作證明。假若已證明了以下性質:

設$f(x)=x^n-C_1^n\beta_1x^{n-1}+C_2^n\beta_2x^{n-2}-\cdots\pm\beta_n=0$ 有n正實根, 則

(a) $\beta_{k-1}^2 \geq \beta_k\beta_{k-2}, k=2,3,\cdots,n$,和

(b) $\beta_1 \geq \beta_2^{\frac{1}{2}} \geq \beta_3^{\frac{1}{3}} \geq \cdots \geq \beta_n^{\frac{1}{n}}$。

我們只須設$f(x)=0$的根爲$a_1, a_2, \cdots, a_n$, 由於$\beta_1 \geq \beta_n^{\frac{1}{n}}$, 故$A_n \geq G_n$。上面的結果則可如下證明。

首先, 若

$$x^n+\alpha_1x^{n-1}+\alpha_2x^{n-2}+\cdots+\alpha_n=0$$

的根正, 則其導數的根及其反數方程

$$\alpha_nx^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_2x^n+\alpha_1x+1$$

$=0$.

的根也必是正的。由於

$$\begin{aligned}f'(x) &= nx^{n-1}-(n-1)C_1^n\beta_1x^{n-2}\\ &\quad+(n-2)C_2^n\beta_2x^{n-2}+\cdots\\ &\quad+(-1)^{n-1}n\beta_{n-1}\\ &= n\Big[x^{n-1}-C_1^{n-1}\beta_1x^{n-2}+C_2^{n-1}\\ &\quad\beta_2x^{n-3}+\cdots+(-1)^{n-1}\beta_{n-1}\Big],\end{aligned}$$

將$f(x)$作$n-k$階導數, 可見

$$x^k - C_1^k\beta_1 x^{k-1} + \cdots + (-1)^{k-2}C_{k-2}^k\beta_{k-2}x^2 + (-1)^{k-1}C_{k-1}^k\beta_{k-1}x + (-1)^k C_k^k\beta_k = 0$$

的根是正的。而其反數方程:

$$\beta_k x^k - C_{k-1}^k\beta_{k-1}x^{k-1} + C_{k-2}^k\beta_{k-2}x^{k-2} + \cdots + (-1)^k = 0$$

的根也是正。再求導$k-2$次, 可知

$$\beta_k x^2 - C_1^2\beta_{k-1}x + \beta_{k-2} = 0$$

的根爲正。考慮判別式, (a) 乃獲得。設$k=2$, 有$\beta_1 \geq \beta_2^{\frac{1}{2}}$, 再由數學歸納法, 得

$$\beta_1 \geq \beta_2^{\frac{1}{2}} \geq \beta_3^{\frac{1}{3}} \geq \cdots \geq \beta_n^{\frac{1}{n}}。$$

參考文獻

1. Colwell, D.J. & Gillett, J.R. (1985). The arithmetic mean-geometric mean inequality, *Bulletin of the Institute of Mathematics and Its Applications,* 21, 95-98.
2. Feldhusen, J.F. & Guthrie, V.A. (19-79). Models of problem solving processes and abilities, *Journal of Research and Development in Education,* 12, 22-32.
3. Gagné, R.M. (1984). *The Conditions of Learning.* New York: Rinehart & Winston.
4. Lee, F.L. (1980). Analysis of cognitive strategies of problem solving process in mathematics and physics, *M.A. (Ed) thesis,* the Chinese University of Hong Kong.
5. National Council of Supervisors of Mathematics (1977). *Position Paper on Basic Mathematical Skills.* Washington: National Institute of Education.
6. Polya, G. (1957). *How to Solve It.* New York: Doubleday Anchor Books.
7. Scandura, J.M. (1977). *Problem Solving: a structural/process approach with instructional implications.* New York: Academic Press.
8. Wong, N.Y. (1984). The proofs of some famous inequalities, *Mathematics Bulletin,* 8, 21-29.
9. 黃毅英 (1987). 學習數學過程中之觸類旁通, ≪數學便播≫, 44期, 60-64。
10. 黃毅英 (1989). 腦部衝擊習作與數學解難技巧之訓練, ≪數學傳播≫, 52期, 93-96。
11. 黃毅英 (1990)。解題與數學教育, ≪數學便播≫, 54期, 71-81。
12. 黃毅英 (1992)。數學解難模式、策略與數學思維, 中國教育學會數學教研會第三次思維與數學教學專題學術討論會論文。

—本文作者爲香港中文大學教育學院課程與教學學系講師—