課堂記事二則

葉東進

即使到現在執筆的這個時刻，我仍是懷著興奮的心情，迫不及待地想把課堂上出現的一些事情記述下來供大家來聽聽評評。

我教兩個班的數學，分別是高一及高二的實驗班 (俗稱的數理資優班)，要談的當然是這兩班的課堂事，可以談的實在不少，不過，現在只談最近發生的。

先要提起的一件事，待讀者諸君看完後，也許會覺得沒什麼大不了，可是對我這個教了二十多年書的人來說，仍然覺得此事相當稀有少見而深受感動。事情是這樣，上個星期二 (12/7) 的上午，在數學教室裡有著連續兩堂高一班的數學課，上完第一堂之後，我宣佈說下一堂課的時間請同學們用來把教室好好整理一番。關於這間數學教室，我不能不作個簡要的介紹，這間教室目前只有高一及高二實驗班的學生在上數學課時使用，平時無人清潔整理，裡面設有十多台算是很不錯的個人電腦，也有五張大長方桌供學生上課以及討論時之用，並且供有不少的藏書讓學生自由的取閱。在這個教室裡，所有的人被鼓勵以開放的心自由地討論，自由地開機使用電腦，自由地取書借閱，自由地發問，自由地上到黑板前發表自己對解題的見解，自由地可以約定任何時間要跟老師討論。

話說回頭，我告訴學生們把教室整理一番之後，二話沒說便離開了，待到第二堂將近下課走回教室時，呈現的光景著實嚇了我一跳，整個教室的地板、門窗、黑板、書櫃、桌面、電腦桌下，凡是可以看得到的地方，無不淨得發亮，幾乎是微塵不染；甚至那發亮的黑板還引得上下一堂課的高二學生抱怨說亮的太過份，產生反光妨礙了他們的視線。

好了，這樣一件事究竟有什麼值得一提的呢？ 第一、並沒有交代學生們該怎樣做，是他們自己決定如此的。第二、以往的班級即便有所交代，也未曾做的如此淨亮。第三、現在的學生有多少人肯在沒有任何誘因之下用心仔細的清整一間教室？或許讀者諸君之中又有問說，學生的如此表現與你的數學教學又是何干？不錯，表面看來像是無關，深層一想可就有著內容。他們用心整理這間教室，顯示他們對這狹小天地的關愛與肯定，如此背後的另一面意義，其實反映了他們對於自己之能夠被鼓勵以尊重而開放的心靈，自由自在地透過彼此之間相互的討論與學習，扶持與信任，而達到思想交流、智慧提昇的肯定。這樣的學習生活，對照於以往他們的學習經驗是相當不同的，從他們對上數學課逐漸產

生了一股期待, 這樣的期待又與遞增的學習興緻因循互動, 使得教學常常是在辯證與思維的交互運動下熱烈的進行, 因此也就不時會看到他們的想像與創造所噴射出來的火花。讀者諸君或許無法完全領會我在教室現場裡所感到的那種氣氛而生的感動, 但我確是從中獲得了很大的欣慰與啓示。

接下來要談的第二件事是在今早(12/14) 發生。

課程已經進展到第六章的習題討論。應當說明的是, 我有個習慣, 在習題付諸討論之前, 總是保留大約有十天左右的時間, 讓學生在此期間內有充足的時間可以自己面對習題裡的問題先作一番的瞭解以及求解的實際操作, 之後, 選定某個課堂時間, 對某些可能較有疑問或是爭議的問題, 徵求學生主動地到黑板上提出, 並說明他們的見解或是解法, 同一問題可能出現不同人表達出不同的解法, 有時也出現爭議而引起熱烈的討論, 甚至有時也留下某些懸疑未決, 把討論或辯證帶回到宿舍裡繼續進行。

這樣的討論課是我最喜歡的, 有時會發現他們之中有獨特的思考路線, 教人興奮半天。

現在, 黑板上有兩位學生正在解下面的問題:

設$a,b\in\mathbf{R}, f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=f(f(x))$, 試證$g(x)-x$可被$f(x)-x$整除。他們的解法大同小異, 不外是把$g(x)-x$及 $f(x)-x$展開, 其中一位就按著x的降次, 再使用長除法而得證; 另一位則按著某種的組合加以排序, 而得到一種因式分解的證法。

顯然, 第一位的解法是土法煉鋼, 沒什麼稀奇; 第二位的解法則是用了一點巧思, 免掉了除法的冗長計算, 但是這種巧思要是碰到$f(x)$改成高次的話, 是否仍然可行? 此外, 他們兩位所寫的式子都幾乎各佔滿了黑板的半個版面, 而繁複的式子也眞叫人難於檢驗其中的對錯。

我做了以上的評論。

於是, 我問說: 有誰可以提供較簡單的解法?

沒有任何反應, 感覺似乎大家都有些無奈, 只能如此, 別無它法了。

我又說: 也許有那種方法, 不須靠繁複的運算, 說不定還可以應用到$f(x)$是一般的n次式呢?

離下課還有幾分鐘, 我繼續說: 好吧, 這堂課的討論暫時到此, 剩下時間你們繼續想一想我剛提的問題。

下課休息時間, 我仍在辦公桌前想我剛提的問題, 一位學生走近身旁, 後面跟著有三四位同學, 他跟我提了幾個看來非常簡短的式子, 問我說這樣子可算是證明嗎? 我一時無法完全會意, 便回說: 下一堂課時, 你何不把想法寫在黑板上, 讓大家一起來聽看評理?

上課鐘響了, 他在黑板上寫下了他的想法:

已知	$f(x)=x^2+ax+b$
	$g(x)=f(f(x))$
令	$f(\alpha)=\alpha$
所以	$g(\alpha)=f(f(\alpha))=f(\alpha)=\alpha$
同理, 令	$f(\beta)=\beta$ 也會有$g(\beta)=\beta$
所以	$f(x)=x$ 與 $g(x)=x$有公根α及β
故	$f(x)-x$能整除$g(x)-x$

底下學生們的反應, 有一兩個面露微笑地點著頭, 大部分的則是茫茫然, 看來不懂的樣子。

讀者諸君, 當我看完這位學生的解法時, 心理實在是非常的興奮, 因爲, 以一位高一的新生而能夠從這般不同的角度, 切入這個問題, 眞的不簡單, 相當有創意, 值得大加稱讚, 於是在大部分學生仍陷於茫然之際, 我在黑板上寫了一個斗大的“讚!!”字在他的想法旁邊, 學生頓時由茫然轉變成個個睁大了眼, 教室裡忽地興起了一股期待的氣氛。

上面所寫的想法, 之中的一兩個步驟雖然交代的不算明白, 而且也未考慮在$\alpha=\beta$時的情形, 但是想法的簡潔, 實在教人賞心悅目。我瞭解大部分的學生對“令$f(\alpha)=\alpha$及 $f(\beta)=\beta$”這兩步關鍵處不甚明白, 於是作了下面的補充:

考慮方程式$f(x)=x$, 它是一個二次方程, 有兩根, 令爲α與β, 當$\alpha\neq\beta$時, $f(\alpha)=\alpha$及$f(\beta)=\beta$這兩個式子都將導致$g(\alpha)=\alpha$及 $g(\beta)=\beta$, 也就是說如果α與β是$f(x)=x$的相異兩根, 則α與β也是$g(x)=x$的兩個相異根, 因此$f(x)-x$便也是$g(x)-x$的因式。至於$\alpha=\beta$時, 或者進一步考慮$f(x)$是一般的n次多項式, 而$f(x)=x$有重根時, 我們可以用多項式的重根定理來處理較爲方便, 這方面的內容對高一新生來說不容易用三言兩語交代清楚, 只能留待學過微積分之後再作說明了[註]。

下課了, 黑板上的想法及補充的說明都還留著, 學生則陸陸續續地離開了教室。不久, 下一堂課高二班的學生三三兩兩的又走了進來, 一位較早到達的學生, 習慣性地擦掉黑板上的東西, 這一次, 他留下了那個斗大的“讚!!”字以及旁邊所寫的想法, 並且注視良久, 整個人一動也未動, 像是僵硬在那裡, 這個舉動引起了後來學生的注意, 大家都不約而同地跟著注視黑板上的東西, 原本在未正式講課之前都是鬧嗡嗡的一片, 這時卻是出奇的安靜, 教室裡逐漸瀰漫著一股期待的氣氛。

我開始把剛剛上一堂課發生的一些事情告訴他們, 之後, 我感覺到他們內心所受到的震撼, 而我心中的興奮卻一直持續著, 即使到接近停筆的這個時刻。

註: 所謂多項式的重根定理是這樣的:

設 $F(x)$ 爲 x 的 n 次多項式, 若 α 是方程式 $F(x)=0$ 的k重根, $(2\le k\le n)$, 則α也是方程式$F'(x)=0$ 的$k-1$重根。

根據這個定理, 我們立即得到:

若α是方程式$F(x)=0$是k重根, 則有$F(\alpha)=F'(\alpha)=\cdots=F^{(k-1)}(\alpha)=0$。反之, 如果有$F(\alpha)=F'(\alpha)=\cdots=F^{(k-1)}(\alpha)=0$, 容易證明$(x-\alpha)^k$是$F(x)$的一個因式, 即$\alpha$是方程式$F(x)=0$ 的k重根。現在回到原來的問題上。

如果α是方程式$F(x)\equiv f(x)-x=0$的k重根, 則有

$$F(\alpha)=F'(\alpha)=\cdots=F^{(k-1)}(\alpha)=0,\ \text{即}$$
$$f(\alpha)=\alpha,\quad f'(\alpha)=1,$$

$$
\begin{aligned}
f''(\alpha) &= \cdots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0 \\
\text{令 } G(x) &\equiv g(x) - x = f(f(x)) - x \\
\text{則 } G'(x) &= f'(f(x)) \cdot f'(x) - 1 \\
G''(x) &= f''(f(x)) \cdot f'(x)^2 + f'(f(x)) \cdot f''(x) \\
G'''(x) &= \cdots
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
G(\alpha) &= f(f(\alpha)) - \alpha = f(\alpha) - \alpha = 0 \\
G'(\alpha) &= f'(f(\alpha)) \cdot f'(\alpha) - 1 = f'(\alpha)^2 - 1 = 0 \\
G''(\alpha) &= f''(f(\alpha)) \cdot f'(\alpha)^2 + f'(f(\alpha)) \cdot f''(\alpha) = 0 \\
G'''(\alpha) &= 0 \\
&\vdots \\
G^{(k-1)}(\alpha) &= 0
\end{aligned}
$$

所以α也是方程式$G(x) = 0$的k重根。

故我們有如下的結論:

若 α 是 $f(x)-x = 0$ 的 k 重根, 則α也是 $f(f(x)) - x = 0$ 的 k 重根。

綜合之, 我們得到: 方程式$f(x) - x = 0$的所有根, 都是方程式$f(f(x)) - x = 0$ 的根, 所以$f(x) - x$恆爲$f(f(x)) - x$的因式。

—本文作者任教於新竹科學園區實驗高中—