1994 年加拿大數學競賽試題

王子俠譯

1. 試求 $\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}$ 之值 。

2. 試證: 任何 $\sqrt{2}-1$ 之正整數冪均可表成 $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ 之形式; 此處之 m 爲正整數。(例: $(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}=\sqrt{9}-\sqrt{8}$)。

3. 假定 25 個人圍一圓桌而坐, 每一小時進行一輪投票表決。每個人均按照下面的規則回答“是”或“否”; 如果在第 N 次表決時, 某一個人的回答和他左右相鄰的至少其中一人的回答一致, 那麼在第 $N+1$ 次表決時, 他的回答不變, 但是如果他的回答和他左右相鄰的兩個人的回答均不相同, 那麼在第 $N+1$ 次表決時, 他將改變他的回答。試證: 無論第一輪表決時, 大家的回答如何, 在有限次表決之後, 每個人的回答均不會再有任何變更。

4. 設 AB 爲圓 Ω 之一直徑, 而 P 爲不在 AB 或其延長線上之一點。假定通過 P 與 A 之直線交 Ω 於 U 而通過 P 與 B 之直線交 Ω 與 V。(註: 若 PA 爲 Ω 之一切線, 則 U 與 A 重合; 同樣, 若 PB 爲 Ω 之一切線, 則 V 與 B 重合。又若 P 在圓周上, 則 $P=U=V$)。令 $|PU|=s|PA|$ 而 $|PV|=t|PB|$, 此處之s與 t 表非負實數。試以 s,t 表出$\cos(\angle APB)$之值。

5. 設ABC爲一銳角三角形,AD爲邊BC上之高, 而H爲AD上之一內點。BH與CH之延線分別交AC與AB於E和F。 試證 $\angle EDH=\angle FDH$。

—本文譯者任教於加拿大滑鐵盧之 Wilfrid Laurier 大學, 並爲加拿大數學競賽委員會 (Canadian Mathematical Olympiad Committee) 主席—