# 數學家的樂園——無限

王建軍

吳開朗

無限起源於古代人的直覺, 後來經過人們的思維加工而逐步形成數學中的潛無限和實無限概念。自從古希臘時代起, 逐步在哲學家和數學家中分裂而成潛無限派和實無限派, 例如, 亞里斯多德 (Aristotle, 公元前384—公元前322)、高斯 (K.F. Gauss, 1777-1855)、克羅內克 (L. Kronecker, 1823-1891)、布勞威爾 (L.E.J. Brouwer, 1881-1966) 以及現代直覺主義者等都屬於潛無限派; 萊布尼茲 (G.W. Leibniz, 1646-1716)、羅素 (B. Russell, 1872-1970)、希爾伯特 (D. Hilbert, 1862-1943) 以及現代柏拉圖主義者等都屬於實無限派。實無限論者喬治·康托 (Georg Cantor, 1845-1918) 是數學史上最富有想像力的數學家之一, 他所創立的無限集合理論, 在數學界引起了激烈的爭論, 甚至是嚴厲的譴責。然而, 也有許多卓越的數學家深爲這種新理論所感動, 德國著名數學家希爾伯特在1926年曾經說過: “沒有人能把我們從康托爲我們所創造的樂園中開除出去”。[1] 對於康托的無限算術, 他進一步讚譽爲“數學思想的最驚人的產物, 在純粹理性的範疇中人類活動的最美的表現之一”。我們可以毫無誇張地說, 全部數學都是由“無限”(infinity) 這一概念衍生而來的, 並且自古以來, 這一概念一直是數學界爭論的焦點。德國著名數學家魏爾 (C.H.H. Weyl, 1885-1955) 曾經提出:“數學就是無限的科學。”[2]

## 一、“無限”在數學發展中的體現

在“無限”的歷史發展中, 逐步形成實無限和潛無限的概念。潛無限亦稱消極無限、假無限、惡無限、即進程式的無限; 實無限亦稱眞無限、絕對無限, 即過程式無限或完成了的無限。潛無限論者是把無限看作一個永無終止的生成過程, 實無限論者是把無限看作一個已經生成了的現實對象。但是, 任何潛無限過程, 都具有相應的實無限對象; 而任何實無限對象, 也都是潛無限過程中的一個環節或終結。

無限概念在我國戰國時代即已出現, 古代美學家莊周 (約公元前369—公元前286, 一說公元前369—公元前289) 在《莊子》一書中曾提出: “一尺之棰, 日取其半, 萬世不

竭。” 三國時代的劉徽在利用“割圓術”計算圓面積時, 曾經說過:“割之彌細, 所失彌少, 割之又割, 以至不可割, 則與圓無所失矣。” 這都是潛無限論。而《莊子》一書中所說的“至大無外謂之大一, 至小無內謂之小一。” 這乃是實無限論。其中“大一”即是無限大, “小一”即是無限小。

在古希臘時代, 哲學家兼數學家柏拉圖 (Ploto, 公元前427—公元前347) 是實無限論者, 他認爲:“理念世界”是一個整體, 它容納一切, 包羅萬象, 是唯一眞實的存在。形式邏輯的創始人亞里斯多德 (Aristotle, 公元前384—公元前322) 是潛無限論者, 他認爲:“分割的過程永遠不會告終, 這件事實保證了這種活動潛在的存在, 卻並不保證無限獨立存在。” [3] 古代數學家歐多克斯 (Eudoxus, 公元前408—公元前355) 和阿基米德 (Arehimedes, 公元前287—公元前212) 先後提出了窮竭法, 歐多克斯利用它證明錐體的體積等於與它同底同高柱體體積的$\frac{1}{3}$, 阿基米德利用它從圓內接與外切正六邊形起算到96邊形, 求得$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$。這種窮竭法即是潛無限思想的體現。

16世紀和17世紀是實無限的黃金時代, 於17世紀後半期由牛頓 (I. Newton, 1642-1727) 和萊布尼茲 (G.W. Leibniz, 1646-1716) 創建了微積分, 微分學的基本概念“導數”, 是兩個無限小之商 ($\frac{dy}{dx}$), 積分學的基本概念“積分”, 是無限多個無限小之和 ($\int dy$)。因而, 微積分被稱爲“無限小分析”。這時所說的無限是一種實無限。

被譽爲數學王子的高斯 (K.F. Gauss,1777-1855) 是堅決反對實無限的。他說:“我反對把一個無限量當作實體, 這在數學中從來是不允許的。無限只是一種說話方式, 當人們確切地談到極限時, 是指某些比值可以任意近地趨近於它, 而另一些則允許沒有界限的增加。” [4] 此後從18世紀末到19世紀末的約爲一百年的時間內, 在數學發展中主要是潛無限起著主導作用。柯西 (A.L. Cauchy, 1789-1857) 使用極限論爲微積分奠定了理論基礎, 這正是潛無限的思想。由他所建立的微積分體系排除了統治長達三個世紀之久的實無限論。柯西通過變量給出極限的定義爲:“當一個變量逐次所取的值無限地趨近一個定值, 最終使變量的值和該定值的差要多小就多小, 這個定值就叫做其他值的極限。” [5] 他還通過變量的極限, 給出無限大、無限小等概念的定義, 柯西關於函數$f(x)$在區間$[x_0, x]$上積分的定義, 是和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

當 $|x_i - x_{i-1}|$無限減小時的極限,

如果使用傅立葉 (Fourier) 的積分符號, 可表示爲

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

柯西特別指出, 符號$\int$不能理解爲一個和式, 而是這種型式和的極限。

19世紀時期, 魏爾斯特拉斯 (K. Weierstrass, 1815-1897) 認爲憑借直觀運動敍述極限概念並以此構建微積分仍然不是眞正的嚴格, 爲了改變這一狀況, 魏爾斯特拉斯提出按實無限的靜態觀點來構造微積分的基礎。1856年, 魏爾斯特拉斯在柏林大學的一次講

演中提出: 把變量$x$看作一個字母, 該字母爲某數集中的一個元素。函數$f(x)$在$x_0$點連續的定義是: 如果對於任意的$\varepsilon > 0$, 都存在一個數$\delta > 0$, 對於區間$|x - x_0| < \delta$內的所有$x$, 不等式$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$恆成立, 就說$f(x)$在$x = x_0$處連續。令$f(x_0) = A$, 則$A$就是$f(x)$ 當$x \to x_0$時的極限。這就是今天數學分析教程中所使用的"$\varepsilon - \delta$" 表述方法。

戴德金 (J.W.R. Dedekind, 1831-1916) 和康托 (G. Cantor, 1845-1918) 都是實無限論者, 戴德金首先提出: 如果一個集合至少有一個與其一一對應的眞子集, 則稱爲無限集合。康托認爲數學要取得進展, 必須肯定實無限的合理性。他寫道:"任一潛無限都必然導致超限, 離開了後者, 潛無限是無法想像的。"他還強調任何變量的域, 無論是就代數、數論或分析而言, 都必須看成是實無限。"[6]

## 二、無限集合與無限數論

1872年康托在一篇革命性文章中, 考察由函數$f(x)$ 構造出的三角級數在區間的哪些點上收斂於$f(x)$的問題, 這些收斂點構成一個點集, 他研究集合論以此而發端。以後康托開始研究無限集合, 並且利用集合中元素之間的一一對應, 定義了無限基數, 利用自然數的的序數, 引出無限序數, 從而形成無限數論。對於無限集合和無限數論, 又稱爲超限集合和超限數論, 或超窮集合和超窮數論。康托的研究持續25年之久, 解決了不少經久未解決的問題, 顚倒了許多前人的想法, 當時引起了數學權威克羅內克等人的敵視。康托在給瑞典數學家、歷史學家恩斯特約姆 (G.Eneström) 的信中曾說:"如果我們能夠以任何方式理解無限數的話, 倒是由於它們 (就其與有限數的對立而言) 構成了全新的一個數類, 它們的性質完全依賴於事物本身的特性, 這是研究的對象, 而並不從屬於我們的主觀臆想和偏見。"[7]

康托在《集合論基礎》一書中所引進的實無限數是一種連續的無盡的序列, 他期望這些新數能夠像無理數和複數那樣, 最終也被數學家們所接受。

1873年11月29日, 康托在寫給戴德金的信中提出: 全體正整數集合$N$和全體實數集合$R$能否建立一一對應? 這個問題如此明瞭, 一望便知是不可能的。因爲$N$是離散的, $R$是連續的。但康托認爲這個問題也許並不那麼簡單, 我們不能過份相信直覺。1873年12月7日, 康托在給戴德金的信中斷言實數是可數的, 然而, 一個星期之後, 他卻又戲劇性證明了實數的不可數性, 並將這個證明發表在1874年的一篇題爲《論實代數數集合的特性》的論文中。

美國紐約市立大學赫伯特·萊曼學院科學史學和歷史學教授周· 道本 (J. Dauben,1944—) 曾指出:"康托已經用有限序數$v$的第一數類確定了第一個無限基數$\aleph$。("ℵ"讀作阿列夫, "$\aleph_0$"讀作阿列夫零—引者注), 爲了引進第二個無限基數ℵ, 他必須建立組成第二數類的無限序數集合。"[8] 這裡所說的"$v$", 即是康托從$w$出發, 運用第一生成原則, 可以得到一個無限數序列:

$$w,\ w+1,\ w+2,\ \cdots,\ w+v,\ \cdots$$

康托經過認眞選擇, 使用$w$來代替$\infty$, 是爲了強調這種無限序數是一種實無限, 是被看作像實數那樣具有眞實數學意義的數。關於無限數的運算性質, 它帶有一些神祕色彩, 如:$\aleph_\circ+1=\aleph_\circ,\cdots,\aleph_\circ+a=\aleph_\circ$ ($a$爲任意有限數), $\aleph_\circ+\aleph_\circ=\aleph_\circ,\aleph_\circ\times1=\aleph_\circ,\aleph_\circ\times a=\aleph_\circ$($a$爲任意有限數), $\aleph_\circ\times\aleph_\circ=\aleph_\circ$, 等等, 這些性質都可用無限集合的運算來給出證明。

集合論悖論與連續統假設, 是無限集合和無限數論中的兩個難題, 康托生前已經提出, 直至他病逝仍未解決。但在尋求解決這個問題的過程中, 引進了一系列的新概念, 闡述了他對數學的新見解, 豐富和改造了數學。

爲了比較基數的大小, 康托引進了如下定義:

> 設有兩個集合$M$和$N$, 若$N$可與$M$中某一子集建立一一對應關係, 而$M$卻不能與$N$中任何一子集建立一一對應關係, 則$M$的基數大於$N$的基數。即$\overline{\overline{M}}>\overline{\overline{N}}$(康托於1887年引進記號 $\overline{\overline{M}}$ 以表示$M$的基數)。

康托悖論: 設$M=\{$一切集合$\}$, 則有 $M\supset P(M)$ ($P(M)$ 表示 $M$ 的冪集)。*即$\overline{\overline{M}}>\overline{\overline{p(M)}}$。

但任何集合都小於它的冪集, 故有

$P(M)\supset M$, 即 $\overline{\overline{P(M)}}>\overline{\overline{M}}$。

1908年, E·策墨略 (Zermelo, 1871-1953) 提出了集合論的公理系統, 至此, 康托悖論以及集合論中已經發現的其它悖論, 均被排除。亦即集合論中的悖論問題, 基本上得到解決。

由於自然數集小於它的冪集, 即$\overline{\overline{N}}<\overline{\overline{P(N)}}$, 故有$\aleph_\circ<2^{\aleph_\circ}$。

康托於1878年用$\aleph_1$來表示$2^{\aleph_\circ}$, 並且猜想在$\aleph_\circ$與$\aleph_1$之間不存在其它的基數, 即是$\aleph_1=2^{\aleph_\circ}$, 這就是著名的連續統假設。

在1900年召開的第二次國際數學家大會上, 德國著名數學家 D· 希爾伯特 (Hilbert, 1862-1943) 進一步強調了康托工作的重要性, 並把連續統假設列爲20世紀有待解決的23個問題之首。在1925年, 希爾伯特曾經提出一個證明綱要, 他自以爲按照這個綱要是可以解決的, 然而, 不久他又宣布自己的綱要是有錯誤的。

在1904年召開的第三次國際數學家大會上, 寇尼 (J. C. König) 宣布他已經證明了連續統的勢不可能是一個阿列夫! 寇尼的證明是應用伯恩斯坦1901年給出的一般定理 ($\aleph_w^{\aleph_\circ}=\aleph_w 2^{\aleph_\circ}$) 而得到的。儘管康托未能立即在寇尼的證明中發現任何漏洞, 但是, 他當時仍然堅信自己的連續統假設是不可能被駁倒的。然而, 僅在24小時以後, 德國數學家策墨略 (E. Zermelo, 1871-1953) 卻果斷地證

---

*設$M=\{1\}$, 則有$P(M)=\{\phi,\{1\}\}$, $\overline{\overline{P(M)}}=2^1=2$; 設$T=\{1,2\}$, 則有$P(T)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$, $\overline{\overline{P(T)}}=2^2=4$; 依此類推, 設 $N=\{1,2,3,4,\cdots,n,\cdots\}$, 則有 $\overline{\overline{P(N)}}=2^{\aleph_\circ}$。

明了 J.C. 寇尼對於伯恩斯坦定理的應用是有錯誤的。

在集合論公理化完成之後, 數學家又轉而利用$ZF$系統來解決連續統假設問題。儘管由$ZF$系統出發無法確定連續統的勢, 但是, 奧地利數學家 K·哥德爾 (Gödel, 1906-1976) 在1936 年卻成功地證明了連續統假設和選擇公理對於$ZF$系統的相對相容性。其後, 當代數學最高獎 Fields 獎獲得者科恩 (P. Cohen 1934—) 又於1963年證明了連續統假設與選擇公理對於$ZF$系統的獨立性。依據哥德爾和科恩的證明, 我們可以斷言$2^{\aleph_\circ} = \aleph_1$ 在$ZF$系統中是一個不可判定的命題。

1965年 P·科恩在哈佛大學講學時曾預言: 也許將來有一天數學家會證明連續統假設是假的, 因爲連續統所涉及的是較爲複雜的冪集概念。利用超限 (無限) 指數我們可以由任一集合產生完全不同的、並且具有更大基數的集合, 而$\aleph_1$所涉及的則是較爲簡單的、可以僅由第一、第二生成原則產生的數類$Z(\aleph_\circ)$, 怎麼能夠想像它們具有相同的勢呢! 科恩猜測$2^{\aleph_\circ}$可能會大於任何阿列夫。[9] 追憶往昔, 早在1905年, 貝爾 (Bire) 在給波雷爾 (E. Borel, 1871-1956) 的信中曾作過類似的分析: 連續統的勢一定超出了任何可數無限序型的類所能描述的勢。由此可見, 康托終其一生仍然未能解決的連續統假設問題, 至今仍然是一個謎。

## 三、 非標準實數域與非標準分析

在數學發展史上, 微積分發明之後, 曾經經歷過一段神秘主義的發展階段。而所謂神秘主義即是指在微積分中利用與實數相矛盾的無限小進行計算, 竟能得到正確的結果。並且像微商、積分等一些基本概念, 也要借助於實數中並不存在的無限小來表述。這時進入微積分的無限大和無限小, 僅僅是一個變化著的量。

1960年, 數理邏輯學家羅賓遜 (A. Robinson, 1918-1974, 生於德國, 猶太人, 1962年去美國) 在普林斯頓大學作報告時曾指出:“ 運用現代數理邏輯的方法, 可以使‘無限大’和‘無限小’作爲一個數而進入微積分。” 1961年, 羅賓遜在荷蘭阿姆斯特丹皇家科學院學報上發表一篇論文, 題爲《非標準分析》。1965年, 羅賓遜所著《非標準分析》一書出版, 並且廣爲流傳。

由實數域$R$擴展使其包含有數不清的無限小和無限大, 由此而構成的集合稱爲非標準實數域, 記爲 $^*R$。

$^*R = \{$標準實數, 無限大, 無限小$\}$, 其中無限大和無限小稱爲非標準實數。

在古代曾經誤認爲有理數與數軸上的點一一對應。後來發現了無理數, 人們又確認實數與數軸上的點一一對應。現在又發現了非標準實數, 爲了在數軸上賦予其位置, 必須規定:1. 過去認爲實數點是不可分的, 現在要理解爲實數點是可分的; 過去認爲實數點是沒有內部結構的, 現在要理解爲實數點的“內部” 凝聚著數不清的無限小點。2. 在數軸兩端的無限遠處凝聚著數不清的無限大點。在如此理解下的數軸, 即稱之爲非標準數軸。$^*R$

中的數與非標準數軸上的點也是一一對應的。這就是對非標準實數域$^*R$的幾何解釋。

在$^*R$上所建構的分析學, 即是非標準分析。標準分析中所能夠證明的定理, 在非標準分析中也能夠予以證明, 反之亦眞。標準分析在推理論證中, 總是依賴於極限論, 先逐步近似, 而後取極限, 此乃是分兩步走的辦法。但是, 在非標準分析中, 則是採取一步走的解決辦法, 即是無限大、無限小等非標準實數都直接參與運算。

然而, 構造非標準分析的理論基礎並不是輕而易舉的。羅賓遜原來所使用數理邏輯工具十分笨重, 不易爲人所接受。美國數學家樊·奧斯達 (Van Osdol) 在1972年發表一篇文章 [10], 他在該文中參照日本數學家高橋 (Takahashi)1970年所描述方法, 爲非標準分析構造了一個簡單、直觀的模型, 這個模型即所謂超冪$^*R$模型, 或高橋模型。

利用這個模型, 不僅可以驗證$^*R$是一具有四則運算且滿足三分律的有序域, $R$ (實數集) 是它的一個子域, 而且可以證明在$^*R$中確實存在有無限多個無限小和無限大。對於$^*R$中有限數 $\alpha$ 的標準部份 (standard part), 記作 $^\circ\alpha$, 在特殊情況下, 當$\alpha$ 爲標準實數時, 則有 $^\circ\alpha = \alpha$。並且對於 $^*R$中的有限數$\alpha, \beta$有下列等式成立:

$$^\circ(\alpha+\beta) = {}^\circ\alpha + {}^\circ\beta, \quad {}^\circ(\alpha-\beta) = {}^\circ\alpha - {}^\circ\beta,$$
$$^\circ(\alpha\cdot\beta) = {}^\circ\alpha \cdot {}^\circ\beta, \quad {}^\circ\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{^\circ\alpha}{^\circ\beta}。$$

現在我們來建立 $^*R$上的非標準微積學:

設$f(x) \in (^*R \to {}^*R)$, 令$\varepsilon$爲無限小, $x_0 \in {}^*R$, 如果下述標準部分存在:

$$f'(x_0) = {}^\circ\left(\frac{f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)}{\varepsilon}\right),$$

則稱標準實數$f'(x_0)$爲$f(x)$在$x_0$處的微商。

設$g(x)$是 $^*R \cap [\alpha, \beta]$上的連續函數, 令$\omega$爲無限大自然數, $\pi$表示$[\alpha, \beta]$的無限小劃分,

$$\pi{:}\ \alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_\omega = \beta,$$

其中$x_k = \alpha + k\varepsilon, \varepsilon = (\beta-\alpha)/\omega, (k = 0, 1, 2, \cdots, \omega)$, 於是$g(x)$在區間$[\alpha, \beta]$ 上的定積分可以表示爲下述標準部分:

$$\int_\alpha^\beta g(x)dx = {}^\circ\left(\sum_{k=1}^{\omega} g(\varepsilon_k)\cdot\varepsilon\right),$$
$$(x_{k-1} \le \varepsilon_k \le x_k)。$$

## 四、 數學哲學各流派在無限觀上的分歧

爲了解決由悖論而導致的數學危機, 促使數學家去探索數學基礎問題。由於所持的基本觀點不同, 19世紀末和20世紀初逐步形成了三個流派, 即邏輯主義流派、直覺主義流派和形式主義流派。然而, 他們最終都未能給數學提供一個可以普遍接受的途徑。自古希臘以來, 對於無限的認識, 一直是數學界爭論的焦點。數學史國際委員會主席 J·道本 (Dauben) 曾說: “正像弗雷格 (G. Frege) 所預言的那樣, 對於康托的無限理論的不同看法, 事實上導致了數學家的分裂。” [11]

對於無限概念的各個側面，人們往往採取不同的主張和方法，逐步形成兩種無限觀的分歧與對立，因而，自古以來，在數學家中也就逐步被劃分爲實無限派和潛無限派。但是，也有一些數學家例外，例如美國數學家羅賓遜，他所創立的非標準分析，使得久已廢黜的無限小概念，又作爲一種非標準實數，重新進入數學家的樂園。在某種意義上來說，當初萊布尼茲發明微積分時所賦予無限小的原意，在羅賓遜的新型分析學中又變爲現實。這種作爲非標準實數的無限小，乃是完成了的無限，理應稱之爲實無限。然而，羅賓遜本人卻不承認有任何實無限的存在。現在我們簡要地介紹一下這三大數學哲學學派的無限觀:

1. **邏輯主義學派的無限觀**

邏輯主義學派的代表人物是 B·羅素 (Russell) 和 A·N· 懷特海 (Whitehead)，他們都認爲可以從邏輯導出全部數學，當然可導出無限集合和無限數論。很顯然，他們不僅是承認康托理論，而且還承認無限性研究對像在數學領域中的合理性。由此可見，邏輯主義者乃是實無限論者。

2. **直覺主義學派的無限觀**

直覺主義前期的兩個倡導者，是克羅內克與龐卡萊 (H. Poincare, 1854-1912)，這兩人都是康托理論的強硬攻擊者，因而，這個學派的成員也都是潛無限論者。

在《集合論基礎》第 I 部分發表後不久，康托進行了多次努力，但始終未能證明連續統假設。康托爲此而陷入深深的苦惱之中，與此同時，他還承受著來自克羅內克方面的壓力。克羅內克與康托進行過長期的針鋒相對的爭論，儘管康托在後來的通信中，試圖對於自已新理論的某些細節作出解釋，但卻始終未能使克羅內克相信無限集合的合理性。康托未能成功地協調與克羅內克的矛盾，是形成他第一次精神分裂癥的重要原因，在這次發病後的幾年中，他逐漸失去了對數學的興趣。

龐卡萊公開申明數學知識是來源於人的直覺，他認爲: 數學知識的確定性僅限於有限論證的嚴格界限之內，而康托的集合論所包含的則僅僅是矛盾的和無意義的概念。“在龐卡萊看來，集合論的悖論已經證明了康托的理論是侵害數學機體的傳染性病毒，對此龐卡萊的醫治是硬性的: 將康托的全部理論從可靠的有限數學中斷然排除。”[12]

直覺主義系統理論的創立者是布勞威爾，他堅定地認爲: “數學的基礎只可能建立在這個構造性的程序上，它必須細心地注意有哪些論點是直觀所容許的，哪些不是。”[13] 直覺主義者之所以排斥實無限，乃是因爲他們認爲任何一個無限集都不可能被構造。按照能行性的要求，他們又否定自然數全體這個概念，這是因爲任何有限多個步驟都不可能把所有自然數都構造出來。

所謂排中律，即是: 命題$A$或命題$\neg A$，必有一個爲眞。布勞威爾認爲排中律起源於古代在有限集合上的應用，不可能應用於無限集。對於無限集來說，還有第三種情況，即是存在有這樣的命題: 既不能證明其爲眞，也不可能證明其爲假。

直覺主義者認爲: 所謂一個命題爲眞，就是存在一個能行性的過程在有限步驟內已經

證明該命題是眞的; 而所謂一個命題爲假, 也是指已經能行性地證明了該命題是假的。然而, 事實上卻存在著大量的數學命題, 既沒有能行性地證其爲眞, 也沒有能行性地證其爲假。在直覺主義者看來, 如果無條件地承認“命題$A$或命題$\neg A$ 必有一爲眞”, 這就等於承認所有命題總是能構造性地證其爲眞或不眞, 但這是沒有可信性根據的。

直覺主義者所堅持的觀點和方法, 其出發點也是希望借此以排除數學理論中已經出現的悖論。但是, 由於限制太多, 只承認一部分最保險的數學, 從而走向了另一極端。

**3. 形式主義學派的無限觀**

形式主義學派的代表人物希爾伯特是實無限論者, 他稱讚康托理論是數學家的樂園。他的無限觀可概括爲如下兩點:(i) 希望保存古典數學的基本內容和經典邏輯的推理原則, 特別是那些與實無限有關的概念和方法, 諸如無限集合概念以及排中律在無限論域中的應用等。(ii) 認爲無限性的概念, 只不過是一種理性規定而已, 可信性仍存在於有限之中。他們對於形式系統的討論, 規定採用構造性方法, 而對於推理規則, 則限定使用有限集合的方法, 不准牽涉到無限集合的概念。

直覺主義學派對於實無限的理論與概念採取絕對排斥的態度, 這是不科學的。形式主義者則認爲可以採用有限集合的方法, 去構造出種種形式系統以表述全部數學眞理。但是, 根據哥德爾 (K. Gödel) 的不完全性定理, 能夠推出一個具有普遍性的命題, 這個命題也可以稱爲無限過程的層次不可逾越原理:

> 總存在某種實無限過程所界定的無限集合, 其全部內容恆不能由相應的任何潛無限進程所列舉或判定。

因此, 我們可以說, 哥德爾定理的提出, 猶如在形式主義學派的頭上潑了一盆冷水。數學史國際委員會主席周·道本 (J. Dauben) 評論說: “以希爾伯特爲首的數學家, 認爲可以應用形式的公理化方法, 來治癒由悖論的發表而得以暴露的數學疾病· · ·集合論的公理化工作, 在德國的形式主義者那裡得到了重要發展, 其目的在於重建康托的集合論, 並最終結束在數學可靠性問題上的爭論。”[14]

## 注釋


1. Math. Ann., 95, 1926, 170.
2. 克萊因 (M. Kline) 著北京大學譯《古今數學思想》, 上海科學技術出版社出版, 1984, 第四册, pp.324。
3. 《西方哲學原著選讀》 商務印書館出版, 1985, pp.139-140。
4. 書名如 [2], pp.59。
5. B·波耶:《微積分概念史》, 上海人民出版社出版, 1977, pp.302。
6. 道本 (J. Dauben) 著, 鄭毓信、劉曉力編譯《康托的無窮的數學和哲學》, 江蘇教育出版社出版, 1988, pp.59。
7. 書名如 [6], pp.58。
8. 書名如 [6], pp.102。
9. 書名如 [6], pp.134。
10. Amer. Math. Monthly, 79. pp.355-363。
11. 書名如 [6], pp.125。
12. 書名如 [6], pp.132。
13. 書名如 [6], pp.311。
14. 書名如 [6], pp.130。


—本文作者任教於中國安徽省阜陽師範學院數學系—