局部體與大域體

李文卿·余文卿

第一節. 局部體

設k是一具q個元素的有限體, 將有理函數體$k(T)$表為F。設x是k上投影線$\mathbf{P}^1$上的一封閉點; 研究$\mathbf{P}^1$上非零有理函數在x點附近的表現, 即是想知道x 到底是f的幾重零點或極點; 而了解的方法是透過x 所滿足的不可約多項式$P(T)$。將f表為 $k(T)$ 中兩多項式 $g(T)$ 與 $h(T)$的商 (若x 是無窮遠點, 則以$\frac{1}{T}$取代T)。那麼f在x 點之零位的重數等於P整除g的重數減去P整除h的重數。說得更透徹一點, 以$\mathcal{P}$表示$k(T)$中由P生成的理想; $P(T)$整除$g(T)$的重數是滿足$g(T)$落在$\mathcal{P}^m$的最高冪次m。最後這一描述法可擴充並適用於常數體是k的任意函數體K。事實上, 在這種情形K中的位 (place) 即是$k[T]$ 或$k[\frac{1}{T}]$之整閉包$\mathcal{O}$的一最大理想$\mathcal{P}$。欲知K中非零有理函數在$\mathcal{P}$的情況, 可先將f表為g/h, 其中g, h落在$\mathcal{O}$。這種表示法可以做到是因為K是$\mathcal{O}$ 的商體。g在$\mathcal{P}$的重數 (order) 記做$ord_p g$, 是使得$g \in \mathcal{P}^m$的最高冪次m; 那麼f 在 P 位的重數是

$$ord_p f = ord_p g - ord_p h。$$

對k的每一位$\mathcal{P}$, 利用重數ord_p可定義K上一賦值 (valuation)$|\ |_p$如下:

$$\begin{cases} |0|_p = 0, \\ |f|_p = (N\mathcal{P})^{-ord_p f} = (q^{-deg\ p})^{ord_p f} \\ \qquad = |\mathcal{O}/\mathcal{P}|^{-ord_p f}, f \in K^\times。 \end{cases}$$

在有理數體$\mathbf{Q}$中, 整數環$\mathbf{Z}$扮演的角色就像$k[T]$ 在$k(T)$中的一樣。$\mathbf{Z}$的每一質理想$(p) = p\mathbf{Z}$即是Q的一有限位(finite place)。若k是$\mathbf{Q}$的有限 (代數) 擴充體, K即稱為數體(number field), 它的整數環$\mathcal{O}$(ring of integers) 是$\mathbf{Z}$在K 中的整閉包, $\mathcal{O}$中的最大理想$\mathcal{P}$即是K的有限位。餘數體$\mathcal{O}/\mathcal{P}$是個有限體, 其元素個數$N\mathcal{P}$稱為$\mathcal{P}$ 的 norm。類似於上面的方法, 我們可定ord_p, 以及由ord_p定義K上的賦值$|\ |_p$為

$$\begin{cases} |0|_p = 0, \\ |z|_p = (N\mathcal{P})^{-ord_p z} \\ \qquad = |\mathcal{O}/\mathcal{P}|^{-ord_p z}, \text{ 若 } z \in K^\times. \end{cases}$$

上面定義在函數體或數體的賦值$|\ |_p$有下列的基本性質: 設$x, y \in K$, 則

(1) $|x|_p \geq 0$, 且$|x|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(2) $|xy|_p = |x|_p|y|_p$,

(3) $|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$。

注意到由性質 (3) 可導出

(4) 三角不等式:$|x+y|_p \leq |x|_p + |y|_p$.

因此, $|\ |_p$定義了K上的一量度 (metric)。K對這量度的完備體K_p包含K當稠密子體。K_p 中的整數是在$\mathcal{P}$沒有極點的元素; 由於 (1) 到 (3) 的性質, 使這些整數形成一環, 稱爲K_p的整數環, 以$\mathcal{O}_p$表之。換句話說,

$$\mathcal{O}_p = \{x \in K_p|\ |x|_p \leq 1\}$$

$\mathcal{O}_p$中的乘法可逆元素稱爲$\mathcal{P}$-adic 單位 ($\mathcal{P}$-adic units), 形成一乘法子群$\mathcal{U}_p$, 故

$$\mathcal{U}_p = \{x \in K_p|\ |x|_p = 1\}$$

而

$$\mathcal{P}_p = \mathcal{O}_p - \mathcal{U}_p = \{x \in K_p|\ |x|_p < 1\}$$

是$\mathcal{O}_p$中的唯一最大理想且$\mathcal{O}_p$中的非零理想只是 $\mathcal{P}$的某一冪次方, 而商$\mathcal{O}_p/\mathcal{P}_p$稱爲$K_p$的餘數體(residue field), 它與未完備前的餘數體 $\mathcal{O}/\mathcal{P}$ 是同構的。$\mathcal{P}_p$是一主理想 (principal ideal) 由取值是最大值$(N\mathcal{P})^{-1}$的任意元素 π_p 所生成; π_p 稱爲在$\mathcal{P}$的 uniformizer。$K_p^\times = \mathcal{U}_p < \pi_p >$, 更進一步, 以$S$表示$\mathcal{O}_p$中餘數體的所有代表, 則任意$\mathcal{O}_p$的元素可表成係數落在$S$以$\pi_p$ 爲冪次的泰勒展開式, 其中常數項不落在$\mathcal{P}$的元素構成單位群 $\mathcal{U}_p$。且任意$-K_p$的元素則可表成係數落在S以π_p 爲冪次的Laurent 級數。

例題 1: 設$K = \mathbf{Q}$且$\mathsf{P} = (p)$, 可選$\pi_p = p$及$S = \{i|\ 0 \leq i \leq p-1\}$, 則

$$\mathcal{O}_p = \mathbf{Z}_p = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i | 0 \leq a_i \leq p-1\},$$
$$\mathbf{Q} \cap \mathbf{Z}_p = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbf{Z}, p \not| n\}$$
$$\mathcal{P}_p = p\mathbf{Z}_p = \{\sum_{i=1} a_i P^i | 0 \leq a_i \leq p-1\},$$
$$\mathcal{U}_p = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i | 0 \leq a_i \leq p-1,\ 且 a_0 \neq 0\},$$
$$\mathbf{Q}_p = \{\sum_{i>-\infty} a_i p^i | 0 \leq a_i \leq p-1\},$$

餘數體是$\mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$。

習題 1: 在例題 1中, 將-1與$\frac{1}{r}$, 其中$p \not| r$, 表示成係數在S變數爲p的 Taylor 級數

例題 2: 設$K = k(T)$且$\mathcal{P}$是次數爲1的位, 它對應點$a \in k$。選定$\pi_p = T - a$以及$S = k$, 則整數環是由係數在k之$T - a$的$Taylor$ 級數所組成; $\mathcal{U}_p$是在 a不爲零的元 素所組成。在$\mathcal{P}$的餘數體與k 同構, 而完備體K_p是形式冪級數$k((T-a))$所形成的體, 這體與$k((T))$同構。

現把K_p視爲拓樸群而觀察其拓樸結構。理想族$\{\mathsf{P}_p^n\}_{n\geq 0}$ 形成0附近的鄰近系統 (neighborhood system)。故看成加法拓樸群時, K_p 是局部緊緻且完全不連結 (即每一點各自形成一連結分支)。且$\mathcal{O}_p$ (及$\mathsf{P}_p^n, n \geq 1$) 既是開集也是緊緻, 而單位群$\mathcal{U}_p$上有自然的 Filtration

$$\mathcal{U}_p \supset 1+\mathcal{P}_p \supset 1+{\mathcal{P}_p}^2 \supset \cdots \supset 1+\mathcal{P}_p^n \supset$$

在上面這系列中, 第一個商群和餘數體的乘法群同構; 而其他剩下的連續商則與餘數體的加法群同構, 群$\{1+\mathcal{P}_p^n\}_{n\geq 1}$形成1的鄰近系統。故乘法群$K_p^\times$也是局部緊緻, 而$\mathcal{U}_p$是開集也是緊緻。注意到$K_p^\times$上的拓樸是承襲$K_p$的拓樸而來。

上面所定義的賦值$|\ |_p$不具阿基米德性質, 稱爲非阿基米德賦值(nonarchimedean valuation), 而位$\mathcal{P}$稱爲非阿基米德位(nonarchi- medean place)。當K是函數體時, 所有的賦值都是非阿基米德, 但K是數體時, 也會有阿基米德賦值, 因而得出K的阿基米德 (無窮) 位。說得更精確一點; 設K是$\mathbf{Q}$的n次擴充體, 則$k = \mathbf{Q}(\xi), \xi \in K$。 ξ之有理係數不可約多項式的次數是n, 設$\xi_1, \cdots, \xi_{r_1}$ 是這多項式的實根, 而$\xi_{r_1+1}, \overline{\xi}_{r_1+1}, \xi_{r_1+2}, \overline{\xi}_{r_1+2}, \cdots, \xi_{r_1+r_2}, \overline{\xi}_{r_1+r_2}$是這多項式的複數根。在此$n = r_1 + 2r_2$且$\overline{\xi}_j$是$\xi_j$的共軛複數。則有$n$個從$K$到$\mathbf{C}$的嵌入 (embedding) 如下:

$$\begin{aligned}
&\sigma_i: \ \xi \to \xi_i, \ i = 1 \cdots, r_1 \\
&\tau_j: \xi \to \xi_{r_1+j}, \ 1 \le j \le r_2 \\
&\overline{\tau}_j: \xi \to \overline{\xi}_{r_1+j},
\end{aligned}$$

故$\sigma_i(K)$是$\mathbf{R}$的子體, 而$\tau_j(K), \overline{\tau}_j(K)$ 則是$\mathbf{C}$的子體。

把$\mathbf{R}$或$\mathbf{C}$上的一般絕對值限制到K嵌入的映像, 則得到K上的賦值, 而這樣的賦值完備體則是$\mathbf{R}$或$\mathbf{C}$。另一方面, τ_j與$\overline{\tau}_j$得出同一個賦值, 且$\sigma_1, \cdots, \sigma_{r_1}, \tau_1, \cdots, \tau_{r_2}$是$K$中不等價的相異賦值, 稱爲$K$的阿基米德位, 因每一位都具有阿基米德性質, 我們稱K有r_1個實位(real place) 與r_2個複位(complex place)。

所謂的大域體(global field) 是指數體或常數體爲有限體的單變數函數體。若v是大域體K的一位, K對v的完備體以K_v表示, 稱爲局部體(local field)。故K_p, $\mathbf{R}$與$\mathbf{C}$都是局部體, 其中$\mathbf{R}$與$\mathbf{C}$ 是阿基米德局部體, 而K_p是非阿基米德局部體, 這二者都局部緊緻(locally compact)。K_v上的標準賦值定義爲

$$| \ |_v = \begin{cases} | \ |_p & 若 \ K_v = K_p \\ | \ |_{\mathbf{R}} & 若 \ K_v = \mathbf{R} \\ | \ |_{\mathbf{C}} & 若 \ K_v = \mathbf{C} \end{cases}$$

在最後一種情形, $\mathbf{C}$上的賦值是平方, 原因是兩個複數嵌入只對應到一個位, 若$| \ |$是體K上的非阿基米德賦值, 則$| \ |$任意正冪次方也是K上的非阿基米德賦值, 但定出同樣的拓樸結構, 我們稱這兩種賦值等價。大域體的每一非阿基米德位置對應到一賦值的等價類, 每一類中取一定爲標準賦值。爲什麼標準賦值要這樣選取? 在下一節的討論中可看出理由。可以證明: 大域體上的任一非顯然賦值一定等價於$| \ |_{\mathbf{R}}, | \ |_{\mathbf{C}}$ 或標準的p-adic 賦值。

下述引理是非常基本且常用的

Hensel **預備定理**: 設K是一非阿基米德局部體, 其整數環是$\mathcal{O}$且最大理想是$\mathcal{P}$。$F(x)$是係數在$\mathcal{O}$ 的多項式, 假設在 modulo $\mathcal{P}$後, $\overline{F}(x)$ 可分解成係數在餘數體$\mathcal{O}/\mathcal{P}$的兩互質多項式$g(x)$ 與$h(x)$的乘積; 則存在有二係數在 $\mathcal{O}$ 的多項式 $G(x), H(x)$, 分別是$g(x)$與$h(x)$的提升 (lifting), 使得$F(x) = G(x)H(x)$ 且 $\deg G(x) = \deg g(x)$。

證明: 我們使用連續逼進法把 $F(x)$ 分解。設$G_0(x)$ 與 $H_0(x)$ 是 $\mathcal{O}[x]$ 的兩多項式, 分別是 $g(x)$與$h(x)$ 的提升且滿足

$$\deg \ G_0 = \deg \ g, \ \deg \ H_0 = \deg \ h,$$

那麼

$$F(x) - G_0(x)H_0(x) = \pi F_1(x),$$

其中π是P的 uniformizer 且$F_1(x) \in \mathcal{O}[x]$。

其次解同餘方程式

$$F(x) \equiv [G_0(x)+\pi g_1(x)][H_0(x)+\pi h_1(x)] \pmod{\mathcal{P}^2}$$

其中$g_1, h_1 \in \mathcal{O}[x]$; 這相當於解

$$F_1(x) \equiv g_1(x)H_0(x)+h_1(x)G_0(x) \pmod{\mathcal{P}}$$

換句話說, 視爲$\mathcal{O}/\mathcal{P}[x]$中的多項式, 它們滿足

$$\overline{F_1(x)} = \overline{g_1(x)}h(x) + \overline{h_1(x)}g(x)$$

因$g(x)$與$h(x)$互質, 上面的方程式對$\overline{g_1}, \overline{h_1}$在 $\mathcal{O}/\mathcal{P}[x]$中有解。選擇$\overline{g_1}, \overline{h_1}$ 使得$\deg \overline{g_1} < \deg g$, 則$\deg \overline{h_1} \le \deg F - \deg g$。

設g_1與h_1分別是$\overline{g_1}$與$\overline{h_1}$在$\mathcal{O}[x]$ 中的提升且次數不變。

$$\begin{array}{ll} \text{令} & G_1(x) = G_0(x) + \pi g_1(x) \text{ 且} \\ & H_1(x) = H_0(x) + \pi H_1(x), \\ \text{則} & \deg G_1 = \deg g, \overline{G} = g, \overline{H_1} = h, \text{ 且} \\ & F - G_1(x)H_1(x) = \pi^2 F_2, \end{array}$$

其中$F_2(x) \in \mathcal{O}[x]$且$\deg F_2 \le \deg F$。

解同餘方程式

$$F(x) \equiv (G_1(x)+\pi^2 g_2(x))(H_1(x)+\pi^2 h_2(x)) \pmod{\mathcal{P}^3}$$

仿照上面的方法繼續下去, 最後得出二系列多項式

$$\{G_0(x), G_1(x)\cdots, G_m(x), \cdots\}$$

與 $\{H_0(x), H_1(x), \cdots, H_n(x), \cdots\}$

滿足

$$\begin{aligned} G_{i+1}(x) &\equiv G_i(x) \pmod{\mathcal{P}^{i+1}}, \\ H_{i+1}(x) &\equiv H_i(x) \pmod{\mathcal{P}^{i+1}} \\ \deg G_i &= \deg g \\ \text{且 } F(x) &\equiv G_i(x)H_i(x) \pmod{\mathcal{P}^{i+1}}。\end{aligned}$$

故兩數列都是 Cauchy 系列, 設其分別收斂至$G(x)$與$H(x)$。則$\deg G = \deg G_0 = \deg g$, $\overline{G} = g, \overline{H} = g$。從

$$F(x) \equiv G_n(x)H_n(x) \pmod{\mathcal{P}^{n+1}}, n \ge 1。$$

取極限, 則得出$F(x) = G(x)H(x)$如所欲。

習題 2: 設K是一函數體, 其常數體是k。設 v 是 K 的n次位。對任意K_v的 unifomizer π_v, 證明K與形式冪級數$k_n(|\pi_v|)$ 同構。

第二節. 賦值的擴充

設 K 是一非阿基米德局部體, 其賦值是$|\ |_K$, 設L是K的一可分離 (separable) 擴充體, 次數爲$[L:K]=n$; 則有n個L到K之代數閉包$\overline{K}$的嵌入$\sigma_1, \cdots, \sigma_n$。利用這$n$個嵌入, 我們可定義$L$中的元素$z$的 trace 與 norm 爲

$$\begin{cases} Tr_{L/K}(z) = \sigma_1(z) + \cdots + \sigma_n(z), \\ N_{L/K}(z) = \sigma_1(z)\cdots\sigma_n(z). \end{cases}$$

可以證明:$Tr_{L/K}$是由加法群L到加法群K的同態 (homomorphism) 且$N_{L/K}$是乘法群$L^\times$到乘法群 $K^\times$ 的同態。更進一步, 若 M 是 L 中包含 K的子體, 則

$$\begin{aligned} Tr_{L/K} &= Tr_{M/K} \circ Tr_{L/M} \\ \text{且}\quad N_{L/K} &= N_{M/K} \circ N_{L/M}。\end{aligned}$$

$Tr_{L/K}(z), N_{L/K}(z)$與z之不可約多項式的關係與有限體的無異, 見於有限體一文中的定理5與習題2, 細節留做習題。

現我們將K上的賦值$|\ |_K$擴充到L上的賦值$|\ |_L$。假設這可以做到。那麼當L是K的 Galois 擴充時, z的所有共軛數應有一樣的取值, 故

$$\begin{aligned} |z|_L^n &= |\sigma_1(z)|_L \cdots |\sigma_n(z)|_L \\ &= |N_{L/K}(z)|_L = |N_{L/K}(z)|_K \end{aligned}$$

這表示

$$|z|_L = |N_{L/K}(z)|_K^{1/n}.$$

而上式即使在L不是K的 Galois 擴充的情況下也有意義。這建議了下面的。

定理 1: 設K是一具賦值$|\ |_K$的非阿基米德局部體, L是K 的n次可分離擴充體, 則$|\ |_K$可唯一擴充到L 上的一賦值$|\ |_L$, 其定義爲

$$|z|_L = |N_{L/K}(z)|_K^{1/n},\ z \in L$$

更進一步, L對$|\ |_L$是完備。

證明: 存在性。對$z \in L$, 定義

$$|z|_L = |N_{L/k}(z)|_k^{1/n}。$$

顯然地, 它滿足賦值的條件(1) 與 (2)。剩下要證的是對$z, w \in L$,

$$|z+w|_L \le \max(|z|_L, |w|_L)。$$

由定義看來, 這等價於證明若 $z \in L$ 滿足$|N_{L/k}(z)|_k \le 1$, 則$|N_{L/k}(1+z)|_k \le 1$。

考慮z在K中的不可約多項式$f(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_0$, 則

$$[a_0(-1)^m]^{n/m} = N_{L/K}(z)$$

故$|a_0|_K \le 1$。換句話說, a_0落在K的整數環$\mathcal{O}_K$ 裡, 因

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^m N_{K(z)/K}(1+z) \\ &= (-1)^m + (-1)^{m-1}a_{m-1} + \cdots + a_0, \end{aligned}$$

若有辦法證出所有的係數$a_i \in \mathcal{O}_k$, 則 $N_{K(z)/K}(1+z)$的係數也一樣落在$\mathcal{O}_k$, 自然地$N_{L/K}(1+z)$的係數也一樣, 而得出 $|N_{L/K}(1+z)|_K \le 1$。

假設不然, 令j表示滿足$|a_j|_K \ge |a_i|_K, i = 0, \cdots, m-1$, 的最大指數, 則有

$$\begin{aligned} & |a_j|_K > 1, m-1 \ge j > 0 \\ \text{且對} \quad & i > j, |a_i|_K < |a_j|_K \end{aligned}$$

以$\mathcal{P}_K$表示$\mathcal{O}_K$中的最大理想, 則有$a_j^{-1} \in \mathcal{P}_K$且對$m-1 \ge i > j$, 均有$a_ia_j^{-1} \in \mathcal{P}_K$。多項式$a_j^{-1}f(x)$落在$\mathcal{O}_K[x]$ 中且*modulo* $\mathcal{P}_K$後得出 $\overline{a_j^{-1}f(x)} = g(x)h(x)$, 其中 $h(x) = 1$ 且 $g(x) = \overline{a_j^{-1}f(x)} = x^j + \cdots$是$\mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K[x]$中次數爲$j$的多項式。注意到$m > j > 0$。利用 Hensel 預備定理, 得出

$$a_j^{-1}f(x) = G(x)H(x)$$

其中 G, H 是$\mathcal{O}_K[x]$ 的多項式, $\deg G(x) = j$且

$\deg H > 0$。這與f是不可約的條件矛盾, 從而證明$a_i \in \mathcal{O}_K$。因此賦值的性質 (3) 成立。

唯一性: 視L是K上的n維向量空間。賦值$|\ |_K$ 在L上的任意擴充賦值可定出L上的 norm $\|\ \|$。對所有$\alpha \in K$以及$x \in L$, 這 norm 滿足

$$\|\alpha x\| = |\alpha|_K \|x\|。$$

固定一組L對K 的基底$\{w_1, \cdots, w_n\}$, 把x寫成$w_1, \cdots, w_n$的$K-$線性組合:

$$x = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n, \alpha_i \in K。$$

定義

$$\|x\|_0 = \max_i |\alpha_i|_K,$$

則 $\|\ \|_0$ 是 L 上的 norm。假如兩個 norm$\|\ \|$與 $\|\ \|_0$ 是等價的 (即它們定義出相同的拓樸), 那麼任意兩個$|\ |_K$在L 上的賦值擴充也會等價, 從而得證出唯一性。同時亦證出L對$|\ |_L$的完備空間也是唯一的, 因這其實是對$\|\ \|_0$的完備空間。故證出底下定理後, 本定理證明即完成。

定理 2: 設K是一賦值爲 $|\ |_K$ 的局部體。L 是 K 上的有限維向量空間。則任意滿足 $\|\alpha x\| = |\alpha|_K \|x\|$, $\alpha \in K, x \in L$ 的 norm$\|\ \|$等價於上面所定義的 norm$\|\ \|_0$。更進一步, L對於$\|\ \|$是完備空間。

證明: 我們必需證明存在有兩個正數μ與ν, 使得對所有$x \in L$,

$$\|x\| \le \mu \|x\|_0 \text{ 且 } \|x\|_0 \le \nu \|x\|$$

其中第一個不等式較容易導出。 設$x = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n$, 由三角不等式得出

$$\begin{aligned}
\|x\| &\le \|\alpha_1 w_1\| + \cdots + \|\alpha_n w_n\| \\
&= |\alpha_1|_K \|w_1\| + \cdots + |\alpha_n|_K \|w_n\| \\
&\le \mu \max_i |\alpha_i|_K = \mu \|x\|_0,
\end{aligned}$$

其中$\mu = \|w_1\| + \cdots + \|w_n\|$。爲了證明另一不等式, 對$x = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n \in L, \alpha_i \in K$, 定義$n$個函數$|\ |_i$如下:

$$|x|_i = |\alpha_i|_K$$

現只要證明存在有正數$\nu_1, \cdots, \nu_n$使得$|x|_i \le \nu_i \|x\|$即可。在$n = 1$時顯然成立。現歸納n加以證明。設V是由$w_1, \cdots, w_{n-1}$ 所生成之K上的向量空間, 且令$\|\ \|'$是$\|\ \|$限制到V 上的 norm, 由歸納假設, $\nu_1', \cdots, \nu_{n-1}'$存在, $\|\ \|'$ 與$\|\ \|_0'$在V 上等價且V具完備性。若 ν_n 存在, 則 $\nu_1, \cdots, \nu_{n-1}$ 也跟著存在。事實上, 將x記爲$x = x(V) + \alpha_n w_n$, 其中$x(V) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_{n-1} w_{n-1}$。則對$1 \le i \le n-1$

$$\begin{aligned}
|x|_i &= |x(V)|_i \le \nu_i' \|x(V)\|' \\
&\le \nu_i'(\|x\| + \|\alpha_n w_n\|) \\
&\le \nu_i'(\|x\| + |x|_n \|w_n\|) \\
&\le \nu_i'(1 + \nu_n \|w_n\|)\|x\|
\end{aligned}$$

故可選定$\nu_i = \nu_i'(1 + \nu_n \|w_n\|) (i = 1, \cdots, n-1)$。假設$\nu_n$不存在, 則存在有一序列$\{x_j\}_{j \ge 1}$ 滿足$|x_j|_n > j \|x_j\|$, 則$x_j \notin V$, 注意到上不等式中, x_j可換爲非零的純量倍數時, 不等式依然成立, 故可設

$$x_j = \alpha_{j1} w_1 + \cdots + \alpha_{jn-1} w_{n-1} + w_n, \alpha_{ji} \in K。$$

由這得出$\|x_j\| < \frac{1}{j}$, 因此

$$\lim_{j \to \infty} x_j = 0 \quad 且 \quad \lim_{j \to \infty} (x_j - w_n) = -w_n。$$

另一方面$x_j - w_n$是封閉子空間V中的元素, 這序列不可能收斂到V外的元素, 因此ν_n確實存在, 且$\nu_1, \cdots, \nu_{n-1}$跟著存在, 從而得所欲證。

註記: (1) 以$\mathcal{O}_L$表示L中對賦値$|\ \ |_L$的整數環, 在存在性的證明中已證明$\mathcal{O}_L$的元素是$\mathcal{O}_k$上的代數整數。反過來, 若$x \in L$是$\mathcal{O}_k$上的代數整數, 則x的 norm 落在$\mathcal{O}_k$中, 因而由$|\ |_L$的定義知$x \in \mathcal{O}_L$; $\mathcal{O}_L$是由L中佈於K的整數所組合而成。換句話說, 兩整數環合而爲一。

(2) 若K是阿基米德局部體, 定理1也成立, 因

$$|z|_{\mathbf{C}} = |z\overline{z}|_{\mathbf{R}}^{1/2}, z \in \mathbf{C}$$

是$\mathbf{C}$上的一賦値, 且唯一性在$\mathbf{C}$中成立。

設$K, L, |\ \ |_K, |\ \ |_L$如定理1所示, 以$\mathcal{O}_K, \mathcal{O}_L$ 分別表示K, L中的整數環, 且$\mathcal{P}_K, \mathcal{P}_L$ 分別是 $\mathcal{O}_k$, $\mathcal{O}_L$ 中的最大理想。因$\mathcal{O}_K \cap \mathsf{P}_L = \mathsf{P}_K$。$L$中的餘數體$\mathcal{O}_L/\mathcal{P}_L$是$K$中餘數體 $\mathcal{O}_K/\mathsf{P}_k$的擴充體。設$w_1, \ldots, w_f$是$\mathcal{O}_L$中的元素, modulo P_L後, $\overline{w_1} \ldots, \overline{w_f}$ 在$\mathcal{O}_K/\mathsf{P}_K$是線性獨立, 那麼$w_1, \ldots, w_f$在$K$中也是線性獨立。若否; 設$\sum_{i=1}^f a_i w_i = 0$爲一非顯然的關係式。我們可假設所有$a_i \in \mathcal{O}_K$, 但不全在$\mathsf{P}_K$中, Modulo P_L 後得出 $\overline{w_i}$ 在 $\mathcal{O}_K/\mathsf{P}_K$ 的一非顯然線性關係式, 是爲矛盾。這證明了$\mathcal{O}_K/\mathsf{P}_K$是$\mathcal{O}_K/\mathsf{P}_K$ 的一有限擴充體, 且擴充次數$f \le n = [L:K]$。並且我們同時亦證: $\mathcal{O}_L$中的任取f個元素, 若在 modulo P_L 後它們形成 $\mathcal{O}_L/\mathsf{P}_L$ 在 $\mathcal{O}_K/\mathsf{P}_K$ 之上的基底, 則這f個元素在K中線性獨立。其次選定K中的 uniformizer π_K以及L中的 uniformizer π_L因$\pi_K \in \mathsf{P}_L$, 故可表$\pi_K = u\pi_L^e$, 其中e是正整數且u是 $\mathcal{U}_L$ 的單位。亦即

$$|\pi_K|_L = |\pi_L|_L^e,$$

稱 e 是 L 在 K 之上的分歧指數 (ramification idex)。

定理 3: 設K, L如定理1所述, 且e, f如上面所定。則

$$[L:K] = n = ef。$$

證明: 設$\mathcal{S}$是餘數體$\mathcal{O}_L/\mathcal{P}_L$在$\mathcal{O}_L$ 的任意一組代表。我們知道任意L中的元素皆可表爲π_L的 Laurent 冪級數, 而其係數落在$\mathcal{S}$中。此外因任意冪次 π_L^j 可表爲 $u_j \pi_L^i \pi_K^m$, 其中u_j是單位, i, m 是整數且$0 \le i \le e-1$, 故同樣步驟可把任意L中的元素表爲

$$\sum_{i=0}^{e-1} \sum_{m > -\infty} s_{im} \pi_L^i \pi_K^m,\ s_{im} \in \mathcal{S}$$

設 S 是餘數體 $\mathcal{O}_K/\mathsf{P}_K$ 在 $\mathcal{O}_K$ 中的一組代表, 且 $w_1, \ldots, w_f$是$\mathcal{O}_L$的元素, 在 modulo P_L 後形成

$\mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K$上的一組基底。則可選擇$\mathcal{S}$爲

$$\left\{ \sum_{j=1}^f s_j w_j \mid s_j \in S \right\}。$$

這證明了$w_j \pi_L^i$, $1 \le j \le f$, $0 \le i \le e-1$ 生成L在K上的所有元素。

剩下要證明的是$w_j \pi_L^i$在K中是線性獨立。假設不然則存在有一非顯然關係式

$$\sum_{i=0}^{e-1} \sum_{j=1}^f a_{ij} w_j \pi_L^i = 0$$

我們可假設 a_{ij} 都落在 $\mathcal{O}_k$ 中且某些 a_{ij}是單位。設i_0是最小的下標 m使得對某一j, a_{mj}是單位。那麼對所有 $i<i_0, 1\leq j\leq f$, 我們都有$a_{ij}\in\mathcal{P}_K$, 這證明了

$$\sum_{j=1}^{f}\sum_{\substack{i\neq i_0\\ 1\leq i\leq e-1}} a_{ij}w_j\pi_L^i\in\mathcal{P}_L^{i_0+1},$$

因此

$$\sum_{j=1}^{f}a_{i_0j}w_j\pi_L^{i_0}\in\mathcal{P}_L^{i_0+1},$$

而這表示

$$\sum_{j=1}^{f}a_{i_0j}w_j\in\mathcal{P}_L.$$

換句話說:modulo $\mathcal{P}_L$ 後, 在 $\mathcal{O}_L/\mathcal{P}_L$ 中, $\sum_{j=1}^{f}\overline{a_{i_0j}w_j}=\overline{0}$。此為$\mathcal{O}_L/\mathcal{P}_L$中的非顯然關係式, 與$\overline{w_1},\cdots,\overline{w_f}$在$\mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K$上是線性獨立的事實不符。因此

$$w_j\pi_L^i,\ 1\leq j\leq f,\ 0\leq i\leq e-1$$

形成L在K之上的一組基底, 得證出$[L:K]=n=ef$。

註記:L/K在$e=1$時稱為無分歧(unramified)擴張, 而在$f=1$時稱為完全分歧(totally ramified) 擴張。

以q表示餘數體 $\mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K$ 的元素個數。設 $|\ |_K$ 是 K 上的標準賦值滿足

$$|\pi_K|_K=q^{-1}.$$

以$|\ |$表示等價於$|\ |_K$在L上的唯一擴充$|\ |_L$的標準賦值。故

$$|\pi_L|=|\mathcal{O}_L/\mathcal{P}_L|^{-1}=q^{-f}$$

現我們要表現出$|\ |$。由定理3知

$$|\pi_K|=|\pi_L|^e=q^{-ef}=q^{-n}=|\pi_K|_K^n$$

故$|\ |=|\ |_K^n$, 這與定理1組合在一起, 得出下面的推論。

推論 1 設K是一非阿基米德局部體, 上有標準賦值$|\ |_K$。設L是K 的n次可分離擴充體。則L上等價於$|\ |_K$在 L 上之唯一擴充 $|\ |_L$ 的標準賦值$|\ |$ 可表為

$$|x|=|N_{L/K}(x)|_K,\ x\in L.$$

習題 3: 設K是一非阿基米德局部體且L是K的 n次可分離擴充體。設K的餘數體有q個元素, L的餘數體有q^f個元素, L/K的分歧數為e, 則 $n=ef$。

(1) 證明L含有1的q^f-1次方根 (提示: 利用 Hensel 預備定理)。

(2) 設ξ是L中的1的原始q^f-1次方根且令$M=K(\xi)$。證明M 是K的f次無分歧擴充, 且L是M的完全分歧擴充。

事實上, 任意K的無分歧擴充都包含在M 中, 故M是K在L中的最大無分歧擴充。

(3) 設π_L是P_L的 uniformizer, 又

$$f(x)=x^r+a_{r-1}x^{r-1}+\cdots+a_0$$

是π_L在M中的不可約多項式, 證明$a_i\in\mathsf{P}_M, a_0\in\mathsf{P}_M-\mathsf{P}_M^2$且$r=e$故$L=M(\pi_L)$。

設K是一體, L是K的n次擴充體, 並設$w_1,\ldots,w_n$是L 在K上的一組基底, 則

$$w_iw_j=\sum_{k=1}^{n}a_{ijk}w_k \qquad (*)$$

其中$a_{ijk} \in K$, 這組關係式決定L到同構階段。

設A是包含K的一環, 則張量乘積 (tensor product)$A \otimes_K L$ 是由$\sum_{i=1}^n c_i w_i, c_i \in A$所組成。由代數觀點來講, 這環的加法是各分量相加, 而乘法則由$(*)$所決定。注意到A與L 都可嵌入 $A \otimes_K L$ 中, 若 A 上有拓樸結構, 則可在$A \otimes_K L$藉由映射

$$(c_1, \cdots, c_n) \in A^n \mapsto \sum_{i=1}^n c_i w_i \in A \otimes_K L$$

給出一個與A^n上乘積拓樸同態的拓樸。

很容易驗證$A \otimes_K L$上的代數結構與拓樸結構皆和L在K上的基底$\{w_1, \cdots, w_n\}$的選取無關。

定理 1 描述局部體上賦值擴張的情形, 下面定理則描述大域體上賦值擴充的情況; 前者有唯一性, 後者則不然。

定理 4: 設K是一大域體且L是K的n次可分離擴充體v是K的一個位, 則L上至多有n個位整除v, 即K上的賦值$|\ |_v$可至多擴充爲n個L 上的相異 (因此不等價) 的賦值。設$w_1, \cdots, w_r (r \le n)$ 是L上整除v的位, 以K_v表示K在v的完備空間, L_{w_i}表示L在w_i的完備空間, 則

$$K_v \otimes_K L \cong L_{w_1} \oplus \cdots \oplus L_{w_r} \qquad (5)$$

爲代數上的同構與拓樸上的同態, 此處右邊是賦予乘積拓樸。

證明: 存在有L 中的元素ξ使得$L = K(\xi)$。設$f(x)$是ξ在K 上的不可約多項式, 把$f(x)$分解成K_v中之不可約多項式$f_i(x)$的乘積:

$$f(x) = f_1(x) \cdots f_r(x)。$$

因L是K的可分擴充體, 因子$f_i (1 \le i \le r)$兩兩互質; 而顯然地, $r \le n$。由代數方面來看, 利用中國餘式定理, 則有下列同構

$$\begin{aligned} K_v \otimes_K L &\cong K_v \otimes_K K[x]/(f(x)) \\ \cong\ \ K_v[x]/(f(x)) &\cong \prod_{i=1}^r K_v[x]/(f_i(x)) \end{aligned}$$

在這裡, 每一$K_v[x]/(f_i(x))$都是K_v的有限代數擴充體, 稱爲L_i。在上面的同構中, 元素ξ先對應到$K_v[x]/(f(x))$中的$x + (f(x))$, 而再對應到$\prod_{i=1}^r K_v[x]/(f_i(x))$中的$(x + (f_1(x)), \ldots, x + (f_r(x))$。因此, 對每一$1 \le i \le r$, 函數

$$\xi \mapsto x + (f_i(x))$$

是$K[\xi]$到$L_i = K_v[x]/(f_i(x))$的一非顯然同態。因$K[\xi] = L$是一體, 這表示L可嵌入每一L_i中, 以$|\ |_i$表示K_v上賦值 $|\ |_v$ L_i 的唯一擴充。因 K 在 K_v中具稠密性, $K \otimes_L L$在$K_v \otimes_K L$也稠密, 故L在每一L_i稠密。$|\ |_i$限制到L時對應於L中的位w_i, 且L_i是對$|\ |_i$的完備空間L_{w_i}。

我們必需證明$|\ |_i (1 \le i \le r)$兩兩相異, 且它們是$|\ |_v$在L中的所有擴充賦值。設$|\ |$是一$|\ |_v$在L上的擴充賦值。則由連續性, $|\ |$可擴充爲$K_v \otimes_K L$上的實值函數並滿足

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$$

以及

$$\begin{cases} |\alpha+\beta|\le\max(|\alpha|,|\beta|), \text{若} |\ |_v \text{是非阿基米德,} \\ \text{或} \\ |\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|, \text{若} |\ |_v \text{是阿基米德。} \end{cases}$$

將$|\ |$限制到L_i上。若存在有元素$\alpha\in L_i$, 使得$|\alpha|\neq 0$, 則對任意L_i中的非零元素β, 由關係式$|\alpha|=|\beta||\alpha\beta^{-1}|\neq 0$得出$|\beta\neq 0$; 故$|\ |$限制到$L_i$是$|\ |_v$的擴充賦值, 利用定理1, 它等於$|\ |_i$。因$|\ |$在$K_v\otimes_K L$上非零, 故在某一$L_i$也非零, 這證明所有$L$上之$|\ |_v$的擴充賦值皆落在$|\ |_1,\cdots|\ |_r$之中。更進一步, 若$|\ |_i=|\ |_j$, 選擇$|\ |=|\ |_i=|\ |_j$, 會得出$|\ |$限制到$L_i$與$L_j$上皆不爲零。設$\alpha\in L_i^{\times}$且 $\beta\in L_j^{\times}$, 視爲$K_v\otimes_K L$的元素, 則有

$$\begin{aligned} &\alpha\beta \\ =\ &(0,\cdots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第 } i \text{ 位置}}}{\alpha},0,\cdots0)(0,0,\cdots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第 } j \text{ 位置}}}{\beta},0,\cdots0) \\ =\ &(0,\cdots,0)=0 \end{aligned}$$

但$0=|0|=|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|\neq 0$, 得出矛盾。這證明了代數部份同構。

剩下需證明 (5) 是拓樸同態。對 $x=(x_1,\cdots,x_r)\in L_{w_1}\oplus\cdots\oplus L_{w_r}$, 定義

$$\|x\|_0=\max_{1\le i\le r}|x_i|_i.$$

把 $L_{w_1}\oplus\cdots\oplus L_{w_r}$ 視爲 K_v上的向量空間, 則$\|\ \|_0$是其上的 norm, 且這 norm 引導出乘積拓樸。另一方面由定理2知, K_v上之有限維向量空間的 norm 都等價, 故$\|\ \|_0$也引導出$K_v\otimes_K L$上的張量乘積拓樸, 定理證畢。

推 論2:設K是 一 大 域 體 且L是K的 有 限 可 分 離 擴 充 體。　設v是K的 一 個 位 且$w_1,\cdots,w_r$是L中整除v的位。令$\xi\in L$。則

$$N_{L/K}(\xi)=\prod_{i=1}^{r}N_{L_{w_i}/K_v}(\xi)$$

$$\text{且}\quad Tr_{L/K}(\xi)=\sum_{i=1}^{r}Tr_{L_{w_i}/K_v}(\xi)$$

證明: 如上定理所述

$$\sum_{i=1}^{r}[L_{w_i}:K_v]=n=[L:K],$$

故推論對$\xi\in K$成立。其次設$K(\xi)=L$, 令 $f(x)$ 與 $f_i(x)$ 如上面證明所定, 則有

$$N_{L/K}(\xi)=(-1)^n f(0)$$

$$\text{且}\quad N_{L_{w_i}/K_v}(\xi)=(-1)^{[L_{w_i}:K_v]}f_i(0)$$

又

$$Tr_{L/K}(\xi)=-(f\text{的}x^{n-1}\text{係數}), \text{且}$$

$$\begin{aligned} &Tr_{L_{w_i}/K_v}(\xi) \\ =\ &-(f_i(x)\text{的}x^{[L_{w_i}:K_v]-1}\text{係數})。\end{aligned}$$

因 $f(x)=f_1(x)\cdots f_r(x),\xi$ 的大域 norm 與 trace 與局部的 norm, trace 的關係式如推論所述。

最後討論當$M=K[\xi]$爲一中間體的情形。設$v_1,\cdots,v_s$ 是 M 中的整除 v 的位, 則 $w_1,\cdots,w_r$是L中整除$v_1,\cdots,v_s$的位, 固定M中的一個位 v_i, 則有

$$\begin{aligned} &\prod_{w_j|v_i}N_{L_{w_j}/M_{vi}}(\xi) \\ =\ &\prod_{w_j|v_i}N_{M_{v_i}/K_v}\circ N_{L_{w_j}/M_{v_i}}(\xi) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= N_{M_{v_i}/K_v}(\xi)^{\sum_{w_j/v_i}[L_{wj}:M_{vi}]}\\
&= N_{m_{v_i}/K_v}(\xi)^{[L:M]},
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&\prod_{w_j/v_i} N_{L_{wj}/K_v}(\xi)\\
=&\prod_{v_i|v}\prod_{w_j|v_i} N_{L_{w_j}/K_v}(\xi)\\
=&\prod_{v_i|v} N_{M_{v_i}/K_v}(\xi)^{[L:M]}\\
=& N_{M/K}(\xi)^{[L:M]} = N_{L/K}(\xi)。
\end{aligned}
$$

類似方法可證$Tr_{L/K}(\xi) = \sum_{i=1}^{r} Tr_{L_{w_i}/K_v}(\xi)$。

推論 3:設K是一大域體且L是K的有限可分離擴充體。設v是K的一個位且$w_1, \cdots, w_r$是L中整除v的位。以$|\ |_v$和$|\ |_w$分別表示K_v和L_w的標準賦值, 則有

$$|N_{L/K}(\xi)|_v = \prod_{i=1}^{r} |\xi|_{w_i}。$$

證明: 當v是非阿基米德時, 這由推論2與推論3得出。當v是阿基米德時, 則可由推論2與標準的阿基米德賦值定義得出。

在這一段裡, 我們考慮大域體中的非零元素在每個位的賦值。

定理 5: 設K是一大域體, 令$\xi \in K^\times$, 則除有限多個位w外, $|\xi|_w = 1$。

證明: 若$K = \mathbf{Q}$或有限體上的單變數函數體, 這顯然成立。若K是函數體, 但非有理函數體, 則存在有一K的有理函數子體F, 使得K是F的有限可分離擴充體。若K是一數體, 則選$F = \mathbf{Q}$, 於是K是F的有限可分離擴充體。

設

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

爲ξ在F的不可約多項式。對每一a_i, 除有限個F的位外, 對其他位而言, 它都是整數; 故存在有一F中位置的有限集合$\mathcal{S}$, 使得對$v \notin \mathcal{S}$時, 則有$a_i \in \mathcal{O}_v$。因$a_0 \neq 0$, 必要時可擴充$\mathcal{S}$,$v \notin \mathcal{S}$時, $|a_0|_v = 1$。

設$\mathcal{S}$是由K中整除S的位所構成的集合, 由定理4知$\mathcal{S}$是一有限集。對任意K中落在$\mathcal{S}$之外的位w, 則有w整除F中某一落在S之外的位v,ξ是佈於$\mathcal{O}_v$ 上的整數, 故由定理1後的註記知它落在$\mathcal{O}_w$中, 更進一步, 由推論1與3, 得出

$$
\begin{aligned}
&|\xi|_w = |N_{k_w/F_v}(\xi)|_v \le 1\\
\text{且}\ &\prod_{w|v} |\xi|_w = |N_{k/F(\xi)}|_v = |a_0|_v^{[k:F(\xi)]} = 1\ 。
\end{aligned}
$$

這表示w在$\mathcal{S}$之外時, $|\xi|_w = 1$。這證明了定理。

當K爲一函數體時, 上面的定理告訴我們: 定義在有限體上之非奇異投影曲線上的非零有理函數, 只會在有限多個封閉點上具零位或極點。

定理 6: (**乘積式**) 設K爲一大域體且$\xi \in K^\times$。又設$\sum$是由K 的所有位所構成的集合, 則

$$\prod_{w\in\Sigma} |\xi|_w = 1。$$

注意: 由定理5知無窮乘積$\prod_{w\in\Sigma} |\xi|_w$事實上只是有限乘積, 故定義上沒有收斂的問題。

證明: **情形** 1. $K=\mathbf{Q}$。可設$\xi=n$非零整數, 將n分解成質因數乘積,

$n=\pm p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}, e_i>0, p_1,\cdots,p_r$是相異質數。

由賦值定義知$|n|_{p_i}=p_i^{e_i}(i=1,\cdots,r)$, 當$p\neq p_1,\cdots,p_r$時, $|n|_p=1$;且$|n|_R=n$, 故

$$\prod_{v\in\Sigma}|n|_v=1。$$

情形 2. $K=k(T)$是q個元素有限體k上的有理函數體。可設$\xi=g(T)$是$k[T]$中的非零多項式。以∞表K中以$\frac{1}{T}$當 uniformizer 的位。將$g(T)$分解成不可約多項式的乘積

$$g(T)=ag_1(T)^{e_1}\cdots g_r(T)^{e_r},$$

其中$a\in k^\times, e_i>0$, $g_1,\cdots,g_r$相異, 以v_i表示K中以$g_i(T)$ 當 uniformizer 的位。則

$$|g(T)|_{v_i}=q^{-f_ie_i}$$

其中$f_i=\deg g_i$; 而當$v\neq v_i,\cdots,v_r,\infty$時, $|g(T)|_v=1$ 且

$$|g(T)|_\infty=q^{\sum_{i=1}^r f_ie_i},$$

這是因爲g在∞的極點重數$=\deg g=\sum_{i=1}^r f_ie_i$, 且 ∞是一次位, 故有

$$\prod_{v\in\Sigma}|\xi|_v=1。$$

情形3: K是$F=\mathbf{Q}$或$k(T)$的有限可分離擴充體。令$\sum'$表示F 中所有位的集合。設$\xi\in K^\times$,

$$\begin{aligned}\prod_{w\in\Sigma}|\xi|_w &= \prod_{v\in\Sigma'}\prod_{w|v}|\xi|_w\\ &= \prod_{v\in\Sigma'}|N_{k/F}(\xi)|_v(\text{由推論3})\\ &= 1。\end{aligned}$$

因$N_{k/F}(\xi)\in F^\times$且定理對F中的元素成立。

因$N_{k/F}(\xi)\in F^\times$且定理對F中的元素成立。

在函數體的情形, 上面定理告訴我們: 非奇異投影曲線$\mathcal{C}$ 上的任意非零有理函數ξ, 重數照算的話, 其零位個數等於極點個數的總和。這裡個數的算法如下: 如封閉點x的次數是f, 而x是ξ的重數爲e的零位, 則ξ在x的零位個數是ef。

推論 4: 設K是常數體爲k的函數體, $\xi\in K^\times$。若對K的所有位置w, ξ均落在$\mathcal{O}_w$, 則$\xi\in k^\times$。

證明: 因ξ沒有極點, 故也不會有零位。換句話說, 必是個非零常數。

第三節.Adèles 與 Idèles

給定一定義在大域體K的代數群G, 我們想研究大域點$G(K)$ 與局部點$G(K_v)$之間的關係。最直覺的想法是考慮無窮乘積$\prod_v G(K_v)$, 其中v跑遍所有K的位。不幸地, 這無窮乘積沒有很好的拓樸性質。取而代之的想法是取$G(K_v)$的“限制乘積”。在此我們就開始引介限制乘積的基本概念。

設$\{G_v\}_{v\in\Sigma}$是一族局部緊緻的拓樸群, 其指標集合是$\sum$。設$\sum_0$是$\sum$的有限子集合。對每一$v\in\Sigma-\sum_0$, 我們固定一G_v的緊緻開子群H_v, 對每一$\sum$中包含$\sum_0$ 的有限集合S,

定義

$$G_S=\prod_{v\in S}G_v\prod_{v\in\Sigma-S}H_v,$$

且賦予G_S乘積拓樸。注意到G_S還是局部緊緻, 若S_1與S_2 是兩個這樣的集合且滿足$S_1\supset S_2$, 則$G_{S_1}\supset G_{S_2}$且G_{S_2} 上的拓樸是由G_{S_1}上的拓樸限制下來的。定義$\{G_v\}$對於$\{H_v\}$ 的限制乘積G爲G_S在包含關係下的直極限 (Direct limit) 而S跑遍所有$\sum$ 中包含$\sum_0$的有限子集合。G中子集合U是開集的充要條件是: 對所有包含$\sum_0$的有限子集合S, $U\cap G_S$都是G_S 的開子集。因此, G之單位元素1的任何開鄰域 (open neighborhood) 都會包含$\prod_{v\in S}U_v\prod_{v\in\Sigma\setminus S}H_v$, 在此$S$是某一包含$\sum_0$的有限子集且$U_v$是$G_v$中包含1的開集。所以$G$是一個局部緊緻拓樸群 (locally compact topological group), 其代數與拓樸結構均與Σ_0的選取無關。

取一大域體K, 令$\Sigma=\Sigma_K$是K之所有位所形成的集合且$\Sigma_0=\Sigma_\infty$ 是K上的所有阿基米德位 (若K是函數體, 這集合是空集合)。首先考慮$G=G_a$ 爲加法群的情形。對$v\in\Sigma, G_v=G(K_v)=K_v$且對$v\in\Sigma-\Sigma_0$, 令$H_v=G(\mathcal{O}_v)=\mathcal{O}_v$。那麼$\{K_v\}_{v\in\Sigma}$對$\{\mathcal{O}_v\}_{v\in\Sigma-\Sigma_0}$ 的限制乘積在各分量各自相乘與相加的運算下形成一環, 稱爲K的 adèle - 環(ring of adèles), 記爲A_K, 換句話說,

$$A_K=\{(x_v)\in\prod_{v\in\Sigma_k}K_v|\text{對幾乎所有位}v, x_v\in\mathcal{O}_v\}.$$

定理 5 表示, 對幾乎所有K的位v, K的元素都落在$\mathcal{O}_v$ 故可將K的元素對角嵌入A_K中, 亦即$x\mapsto(x,\cdots,x,\cdots)$。

考慮K的一n次可分離擴充體L。設$w_1,\cdots,w_n$是L在K上的一組基底, 且$w_1,\cdots,w_r$是L上整除v的位。定理 4 告訴我: 從代數上與拓樸上來看,

$$K_v\otimes_K L=K_vw_1\oplus\cdots\oplus K_vw_n\cong L_{w_1}\oplus\cdots\oplus L_{w_r}。$$

現我們要探討$\mathcal{O}_vw_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_vw_n$與$\mathcal{O}_{w_1}\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_{w_r}$之間的關係。很明顯地, $\mathcal{O}_{w_1}\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_{w_r}$是由$K_v\otimes_K L$ 中$\mathcal{O}_v$上的整數所組成。故除了有限個v之外, 由定理 5 知, $w_1,\ldots,w_n$都是$\mathcal{O}_v$的整數。因此, 對幾乎所有位v, $\mathcal{O}_vw_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_vw_n$包含在$\mathcal{O}_{w_1}\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_{w_r}$中。反過來, 設$\beta$爲$K_\nu\otimes_K L$中$\mathcal{O}_v$上的整數, 將其表爲

$$\beta=\alpha_1w_1+\cdots+\alpha_nw_n,\ \alpha_i\in K_v$$

設$\sigma_1,\cdots,\sigma_n$是L到K之代數閉包$\overline{K}$的n個嵌入。對$K_v\otimes_K L$中的元素$x=x_1w_1+\cdots+x_nw_n, x_i\in K_\nu$, 以$x^{(j)}$表示

$$x_i\sigma_j(w_1)+\cdots+x_n\sigma_j(w_1)\in K_\nu\otimes_K\overline{K},\quad j=1,\cdots,n.$$

那麼

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n x^{(j)} &= x_1Tr_{L/K}w_1+\cdots+x_nTr_{L/K}w_n\\ &= \sum_{j=1}^n x_j\sum_{i=1}^r Tr_{L_{w_i}/K_v}(w_j)(\text{推論 2})\\ &= \sum_{i=1}^r Tr_{L_{w_i}/K_v}(x)。\end{aligned}$$

現定義$Tr_{L/K}(x)$爲

$$\sum_{j=1}^n x^{(j)}=\sum_{i=1}^r Tr_{L_{w_i}/K_v}(x)。$$

因此若x是$\mathcal{O}_v$上的整數 (integral over $\mathcal{O}_v$) 則 $Tr_{L/K}(x) \in \mathcal{O}_v$。關係式$\beta = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n$ 產生了下面的矩陣方程式

$$\begin{pmatrix} w_1^{(1)} & \ldots & w_n^{(1)} \\ & \vdots & \\ w_1^{(n)} & \ldots & w_n^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^{(1)} \\ \vdots \\ \beta^{(n)} \end{pmatrix}$$

因 $w_1, \cdots, w_n$ 是 K 一線性獨立, 故矩陣 $w = (w_j^{(i)})$的行列式值不爲零, 利用 Cramer 法則, 解出

$$\alpha_i = \frac{detB_i}{detW}\ (i = 1, \cdots, n)$$

其中B_i是把W的第 i 行元素以$\begin{pmatrix} \beta^{(1)} \\ \vdots \\ \beta^{(n)} \end{pmatrix}$取代而得。到此爲止, 我們對$\alpha_i$所知不多, 但對

$$\alpha_i^2 = \frac{det({}^tB_iB_i)}{det({}^tWW)}$$

知道的卻不少。這是因爲矩陣

$${}^tWW = (Tr_{L/K} w_i w_j)$$

中各行列元素均爲$\mathcal{O}_v$的元素, 且${}^tB_iB_i$亦然。更進一步, $d = det({}^tWW)$是K中的非零元素。由定理 5 知, 對幾乎所有K 的位v而言, 都有$|d|_v = 1$, 因此α_i^2與α_i也落在$\mathcal{O}_v$中; 此我們得證了: 對幾乎所有的位v, $\beta \in \mathcal{O}_v w_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_v w_n$ 這證明了下面的預備定理。

預備定理 1: 設L是大域體K 的n次可分離擴充體, $w_1 \cdots, w_n$ 是L在K 上的一組基底。對幾乎所有K 的位v, 均有

$$\mathcal{O}_v w_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_v w_n = \mathcal{O}_{w_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{w_r}$$

其中$w_1, \cdots, w_r$是L上整除v的位。

結合定理 4 與預備定理 1, 得到

預備定理 2: 設L是大域體K的n次可分離擴充體, 則從代數上與拓樸上而言, $A_K \otimes_K L$與A_L同構且同態, 並且$L = K \otimes_K L$可對角嵌入A_L中。

現我們已做好證明下面定理的準備工作

定理 7: 設K 是一大域體, 則K是A_K的離散子群, 且A_K/K在商拓樸 (quotient toplogy) 下是緊緻的。

證明: 設F是$\mathbf{Q}$或是常數體爲k的有理函數體, 使得K 爲F的n次可分離擴充體。設w_1, ..., w_n是K在F上的一組基底, 則看成加法群時,

$$A_K = A_F \otimes_F K = A_F w_1 \oplus \cdots \oplus A_F w_n.$$

假設我們可證明 F 是 A_F 的離散子群且有一 A_F 的緊緻集 Ω 使得 $A_F = F + \Omega$, 那麼K是$A_F \otimes_F k = A_k$的離散子群。更進一步令

$$\widetilde{\Omega} = \Omega w_1 + \cdots + \Omega w_n$$

則其爲A_K 上的一緊緻集, 並使得$A_K = K + \widetilde{\Omega}$, 從而

$$A_K/K \cong \widetilde{\Omega}/K \cap \widetilde{\Omega}$$

是一緊緻集。故定理 7 的證明變成只需證$K = \mathbf{Q}$與$K = k(T)$的情形。

情形一: $K = k(T)$。令 $\Omega = \prod_{v \in \Sigma_K} \mathcal{O}_v$, 則 Ω 是 A_K 中的開緊緻集。對每一位 v, 選取在 v 的 uniformizer π_v如下: 若$v \neq \infty$令π_v是$k[T]$中在v爲零的不可約多項式。若$v = \infty$, 取$\pi_v = 1/T$。選定v之餘

數體的代表S_v爲$k[T]$中次數小於 deg π_v的多項式, 則每一K_v的元素x_v可寫成

$$x_v = \sum_{i>-\infty} s_i\pi_v^i,\ s_i \in S_v。$$

以$\langle x_v\rangle$表示$\sum_{i<0} s_i\pi_v^i$, 稱爲x_v的極 (polar) 部份。給定一A_k中的元素$x = (x_v)_{v\in\Sigma_k}$, 則只有有限個位v, $\langle x_v\rangle$才不爲零, 且對所有位$w \neq v$, $\langle x_v\rangle \in \mathcal{O}_w$ 。令

$$\gamma = \sum_v \langle x_v\rangle$$

則$\gamma \in K$且$x-\gamma$在所有都是整數, 這證明$A_K = K+\Omega$。更進一步, 由推論 4, 可知$K\cap\Omega = k$是有限集。故K在A_K中離散且$A_K/K \cong \Omega/k$是緊緻。

情形二: $K = \mathbf{Q}$。設$\Omega = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times \prod_p \mathbf{Z}_p$。在$\mathbf{Q}$的有限位置$p$, 選定 uniformizer $\pi_p = p$且在p 的餘數體的代表S_p選定爲$\{0,1,\cdots,p-1\}$ 對$x_p \in \mathbf{Q}_p$, 定義x_p的極 (polar) 部份$\langle x_p\rangle$如情形一所述。對任意$x = \langle x_v\rangle \in A_Q$, 都有對幾乎所有的$p$, $\langle x_p\rangle = 0$, 故$\gamma = \sum_p \langle x_p\rangle$是一有理數且對所有的$p$, $x-\gamma \in \mathbf{Z}_p$ 。最後, 有一整數$n \in \mathbf{Z}$, 使得$x-\gamma-n$的絕對值落在$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$。這證明$A_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}+\Omega$。注意到$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times \prod_p \mathbf{Z}_p$是0的開一鄰域且不包含其他的有理數, 故$\mathbf{Q}$可嵌入$A_{\mathbf{Q}}$爲一離散子群。最後$A_{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q} \cong \mathbf{R}\times\prod_p \mathbf{Z}_p/\mathbf{Z} \cong (\mathbf{R}/\mathbf{Z})\times\prod_p \mathbf{Z}_p$是緊緻集。

其次取G爲乘法群G_m。同樣地令 $\Sigma = \Sigma_k$ 且 $\Sigma_0 = \Sigma_\infty$ 則對$v \in \Sigma_K, G_v = G(K_v) = K_v^\times$, 且對$v \in \Sigma-\Sigma_0$, 令$H_v = G(\mathcal{O}) = \mathcal{U}_v$。$\{K_v^\times\}$對$\{\mathcal{U}_v\}$的限制乘積稱爲 Idèle 群 (group of idèles), 以I_K表之, 因此

$$I_K = \{(x_v) \in \prod_{v\in\Sigma_k} K_v^\times \,|\, \text{對幾乎所有}v,\ x_v \in \mathcal{U}_v\}.$$

注意到I_K在代數上而言是A_K的單位群, 但其上之拓樸比由A_K得來的限制拓樸還細。

習題 3: 證明在I_K上的自同構$x \mapsto x^{-1}$在限制拓樸下並不連續。事實上, 我們加在I_K上的拓樸是使I_K成爲拓樸群的最弱拓樸。

定理 5 顯示 $K^\times$可以對角嵌入I_K中。商群 $I_K/K^\times$ 稱爲 K 的 idèle 類群 (idèle class group)。利用K在v之完備體K_v的標準賦值$|\ \ |_v$, 我們定義從I_K到正實數群的函數$|\ \ |$, 稱爲I_K上之 norm 函數, 如下

$$|x| = \prod_v |x_v|_v,\ x = (x_v) \in I_k。$$

因對幾乎所有的位v,x_v都是單位, 故上面的乘積事實上是有限乘積。注意到$|\ \ |$是一連續同態, 其核I_K^1是由 norm 是 1 的 idèles 組合而成。對一數體K,$|\ \ |$的映象都是正實數, 且有

$$I_K = I_K^1 \times (\mathbf{R}_{>0}^\times)_w \cong I_K^1 \times \mathbf{R}_{>0}^\times.$$

其中w是K的阿基米德位且$(\mathbf{R}_{>0}^\times)_w$是$K_w$的子群。而對常數體是$q$個元素的函數體$K$, $|\ \ |$的映象是$\mathbf{R}_{>0}^\times$ 的一無窮循環子群, 它由q的某一冪次q^r所生成, 我們有

$$I_K = I_K^1 \times \langle x\rangle \cong I_K^1 \times \mathbf{Z},$$

其中x是一 idèle 滿足$|x| = q^r$。

乘積式 (定理 6) 顯示$K^\times$是I_K^1的子群。由定理 7, 我們知道K是A_K的離散子

群。又因I_K上的拓樸比 A_K的限制拓樸還強, 故$K^\times$是I_K的離散子群, 因而也是I_K^1的離散子群。

定理 8: 設K是一大域體, 則$K^\times$是I_K^1的離散子群且$I_K^1/K^\times$ 在商拓樸下是緊緻的。

現只剩下要證明第二個斷言。爲此, 我們需要一幾何預備定理。給定一 idèle $a=(a_v)$。定義"邊長是a的平行多面體"爲

$$P_a=\{x=(x_v)\in A_k|\ |x_v|_v\le |a_v|_v\}.$$

則有$P_a = aP_1$, 且P_1是A_k的緊緻集, 因A_K/K是緊緻集, 以$\overline{\mu_K}$表示A_K/K上全測度爲1的 Haar 測度, 令μ_K 爲A_K的 Haar 測度, 使得其限制到K上得出 counting 測度, 引出A_K/K上的$\overline{\mu_K}$。因此P_a的體積爲有限且滿足

$$\mu_K(P_a)=|a|\mu_K(P_1).$$

下面預備定理告訴我們: 若P_a的體積足夠大的話, 則P_a至少包含K 中的兩相異元素。這是 Minkowski 定理的一個特殊情形, 以 adèlic 語言表達出來。

預備定理 3: 存在有一常數$c>0$, 使得對每一 idèle a滿足$|a|>\frac{1}{c}$, 都有$P_a\cap K^\times\ne\phi$。

證明: 選定K的 idèle $b=(b_v)$滿足

$$\begin{cases} b_v=1 & \text{若}v\text{是非阿基米德位}\\ b_v=\frac{1}{4} & \text{若}v\text{是阿基米德位}\end{cases}$$

則$P_b-P_b\subseteq P_1$。假設$P_a\cap K^\times=\phi$, 那麼P_{ab}與K, A_k中的任意平移至多交於一次。因若y_1,y_2 是$(x+K)\cap P_{ab}$的兩相異元素, 則$\alpha=y_1-x,\beta=y_2-x$是K 的相異元素且$\alpha-\beta$落在$P_{ab}-P_{ab}\subset P_a$中, 與原先假設矛盾。以$f,\overline{f}$分別表示P_{ab}, $(P_{ab}+K)/K$ 上的示性函數, 則有

$$\begin{aligned}\mu_K(P_{ab}) &= \int_{A_K} f(x)d\mu_K(x)\\ &= \int_{A_K/K}\sum_{\alpha\in K} f(x+\alpha)d\overline{\mu_K}(\overline{x})\\ &= \int_{A_K/K}\overline{f}(\overline{x})d\overline{\mu_K}(\overline{x}) \quad (\text{因對所有}x\in A_K,\\ &\qquad \mathrm{card}((x+K)\cap P_{ab})\le 1)\\ &\le \int_{A_K/K} d\overline{\mu_K}(\overline{x})=1\end{aligned}$$

因此, 若$c=\mu(P_0)$, 則有$c|a|\le 1$。因此對任意 idèle a 滿足$|a|>\frac{1}{c}$,$P_a\cap K^\times\ne\phi$。

現我們證明定理 8。設a_0是滿足$|a_0|>\frac{1}{c}$的 idèle, 則對任意$a\in I_K^1$, 則有

$$|a^{-1}a_0|=|a_0|>\frac{1}{c}。$$

依據預備定理3, 存在有非零元素$\alpha\in K^\times$落在$P_{a^{-1}a_0}$, 亦即$\alpha a\in P_{a_0}$。更進一步, 因$\alpha a\in I_k^1$, 存在有$\beta\in K^\times$使得$\beta(a\alpha)^{-1}\in P_{a_0}$, 組合後兩個敍述得出$\beta\in P_{a_0^2}$。另一方面, $P_{a_0^2}\cap K$同時是緊緻且離散, 故是有限集, 設爲

$$P_{a_0^2}\cap K=\{0,\gamma_1,\cdots,\gamma_s\}。$$

現已經證明$a\alpha\in P_{a_0}$且$(a\alpha)^{-1}\in\cup_{i=1}^s\gamma_i^{-1}P_{a_0}$, 定

$$\begin{aligned} B &= P_{a_0}\cup(\cup_{i=1}^s\gamma_i^{-1}P_{a_0})\\ \text{且}\quad B^* &= \{x\in I_K|x,x^{-1}\in B\}\end{aligned}$$

存在有一K之位的有限集S使得在S之外的位v, $(a_0)_v$與$(\gamma_i)_v$ 都是單位, $i=1\ldots,s_0$因此B^*是 $\prod_{v\in S}K_v^\times$ 與$\prod_{v\notin S}\mathcal{U}_v$乘積上之緊緻

集, 故亦爲 I_K 的緊緻集。而我們已得出: 對任意$a \in I_K^1$, 存在有$\alpha \in K^\times$使得$a\alpha \in B^\times$。因爲$I_K^1/K^\times$是$I_K^1 \cap B^*$ 的商, 所以必是緊緻。定理證畢。

在此, 我們提出定理 8 的一些推論。首先考慮K是函數體的情形。由K之位所生成的自由交換群 (free abelian group) 稱爲K的除子群 (group of divisor), 以$Div(K)$表之。除子$D = \sum n_\nu V$的次數定義爲

$$\deg D = \sum_\nu n_\nu \deg \nu,$$

在此對幾乎所有的$\nu, n_\nu = 0$。這次數函數$\deg : Div(K) \to \mathbf{Z}$ 是一同態, 其核$Div^\circ(k)$是次數爲零的除子子群, 我們將在第五章第四節證明次數函數的值域是$\mathbf{Z}$。

對$\xi \in K^\times, \xi$的除子$div\xi = \sum n_\nu \nu$, 其中n_v是ξ 在ν的重數 (order)。由定理 5 與 6 我們知道對幾乎所有的$\nu, n_\nu = 0$且

$$\deg(div\xi) = \sum n_\nu \deg \ \nu = 0。$$

因此$div\xi$落在$Div^\circ(K)$中, 稱爲主除子(principal divisors), 以$Prin(K)$表示由主除子所形成的子群, 商群$Div^\circ(K)/Prin(K)$稱爲K的 Jacobian, 以$Jac(K)$表之。

對I_k中的 idèle $x = (x_\nu)$, 對應 $\mathrm{div}x = \sum_\nu (\mathrm{ord}_\nu x_\nu)\nu$。因對幾乎所有的$v, x_v$都是單位, 故有$div \ x \in Div(K)$, 賦予$Div(K)$離散拓樸, 則

$$div : I_K \mapsto Div(K)$$

是連續同態且爲映成 (onto), 其核是$\prod_v \mathcal{U}_v$。norm 是1的子群I_K^1 映到子群$Div^\circ(K)$且爲映成; 又$K^\times$映成到$Prin(K)$ 。因此div函數在代數與拓樸上引導出同構

$$\begin{aligned} I_K^1/K^\times \prod_v \mathcal{U}_v \cong \ & Div^\circ(K)/Prin(K) \\ = \ & Jac(K)。\end{aligned}$$

由於$I_K^1/K^\times$是緊緻, 我們發現$Jac(K)$同時是緊緻且離散, 因而是有限, 這證明了下面的推論。

推論 5: 設K是一函數體, 則

$$\begin{aligned} Jac(K) &= Div^\circ(K)/Prin(K) \\ &\cong I_K^1/K^\times \prod_v \mathcal{U}_v \end{aligned}$$

是一有限群。

其次考慮K是數體的情形。對每一K的非阿基米德位v, 以 $\mathcal{P}_v$ 表示對應於 v 之 K 的整數環 $\mathcal{O}_K$ 的最大理想。以$\mathcal{J}(k)$表示由$\mathcal{O}_K$的最大理想們所生成的自由交換群且以$Prin(K)$ 表示由非零主理想所生成的自由交換群。因$\mathcal{O}_K$ 的每一理想且在不考慮乘積次序的前提下, 此唯一都可表爲最大理想的乘積, 故$Prin(K)$是 $\mathcal{J}(K)$ 的子群。而商群 $\mathcal{J}(K)/Prin(K)$ 稱爲 K 的理想類群 $Cl(K)$ (ideal class group)。

對一 idèle $x = (x_v) \in I_K^1$, 以$I(x)$表示理想

$$\prod_{v:\text{非阿基米德}} \mathcal{P}_v^{ord_v x_v}。$$

因對幾乎所有的位 v, x_v 的次數是0, 故 $I(x)$ 是 $\mathcal{J}(K)$ 的元素, 函數$I : I_K^1 \to \mathcal{J}(K)$ 將x送到$I(x)$是群同態。給定一$\mathcal{J}(K)$的元

素 $\prod_{\nu:\text{非阿}} \mathcal{P}_\nu^{n_\nu}$, 現建構一 idèle $x=(x_v)\in I_k^1$使得 $\prod_{\nu:\text{非阿}} \mathcal{P}_\nu^{n_\nu}$, 如下。在每一非阿基米德位$v$, 選擇一 uniformizer π_v 且令 $x_v = (\pi_v)^{n_v}$, 則對幾乎所有 v, $x_v = 1$。固定一阿基米德位w, 對其他的阿基米德位$v \neq w$時, 定$x_v = 1$, 且令x_w是K_w中的元素使得

$$\prod_{v:\text{所有位}} |x_v|_v = 1。$$

故$x = (x_v)$具有所要的性質。現賦予$\mathcal{J}(K)$離散拓樸, 則I是一連續同態且映成, 其核等於$I_\infty^1 \prod_{v:\text{非阿}} \mathcal{U}_v$, 其中 I_∞^1 是由 $\prod_{v\in\Sigma_\infty} K_v^\times$ 中滿足 $\prod_{v\in\Sigma_\infty} |x_v|_v = 1$ 的元素組成。更進一步, I 把 $K^\times$ 映至 $Prin(K)$; 因此引導出同構

$$I_K^1/K^\times \cdot I_\infty^1 \prod_{v:\text{非阿}} \mathcal{U}_v \cong \mathcal{J}(K)/Prin(K)$$

因$I_K^1/K^\times$是緊緻, 這證明$\mathcal{J}(K)/Prin(K)$是離散且緊緻, 因此是有限群, 從而得證下面的推論。

推論 6 (Minkowski): 設k是一數體, 則

$$\begin{aligned} Cl(K) &= \mathcal{J}(K)Prin(K) \\ &\cong I_K^1/K^\times \cdot I_\infty^1 \prod_{v:\text{非阿}} \mathcal{U}_v \end{aligned}$$

是一有限群。

落在 $K^\times \cap I_\infty^1 \prod_{v:\text{非阿}} \mathcal{U}_v$ 的元素稱爲數體 K 的單位。Dirichlet 證明: 單位元素所形成的子群是是由落在K中 1 的方根所成的有限群與階數是$r_1 + r_2 - 1$ 之自由交換群的乘積。在此, r_1與r_2分別是K的實位與複位一個數。

對一定義在大域體 K 的一般代數群 G, 其 adèle 點 $G(A_k)$ 即是 $\{G(K_v)\}_{v\in\Sigma_K}$ 對 $\{G(\mathcal{O}_v)\}_{v\in\Sigma_K-\Sigma_0}$ 的限制乘積。

參考資料

1. E. Artin and J. Tate: Class field theory, Harvard (1961)。
2. J.W.S. Cassels and A. Fröhlich: Algebraic Number Theory, Thompson, Washington (1967)。
3. S. Iyanaga: The theory of Numbers。North-Holland,Amsterdam-Oxford (1969)。
4. A. Weil: Basic Number Theory, Springer-Verlag, New York-Heidelberg -Berlin (1973)。
5. 李文卿: 有限體的理論, 數學傳播, 十七卷一期, 82年3月, 43∼54。

—本文作者分別任教於美國賓州州立大學數學系及國立中正大學應數所—