淺談混沌

陳義裕演講

劉曉倩記錄

在介紹混沌 (chaos) 以前, 我們先講一個笑話。有一天, 政客和外科醫生及建築師在爭辯誰的職業是最古老的。外科手術師首先發難說:「上帝是從亞當身上取出一根肋骨變成夏娃, 取出過程是一個外科手術。所以, 當然是我的職業最早了!」建築師馬上接著說:「不對, 不對, 上帝一開始是在一片混沌之中, 把這世界創造出來的!創造之後才能有亞當和夏娃。所以, 我的職業應該是更古老才對!」政客聽了之後, 笑了笑說:「你們知道一開始的“混沌”是誰造成的嗎?」

哈哈哈, 所以混沌就是政客造成的了。到底政客有什麼特色去造出一片混沌呢? 第一, 他們在地球上的有限空間內興風作浪。第二個特色是: 政客和政客之間若有小小的利益衝突, 馬上就分道揚鑣。第三個是: 世界上總是有幾個超級政客, 他的足跡會遍佈全世界, 就像當年的季辛吉一般。最後一個特色是: 當他們制定法律時一定有一大堆的漏洞, 以便讓有心去鑽。不過我們也不能一口咬定是所有從政的人都是政客。因爲有理想, 有抱負的政治家並不是沒有: 他們其實是秩序的維護者, 代表著正義。他們做事循規蹈矩, 值得我們信賴, 因爲他們的所做所爲均是大家可以預期的。政治家雖然行事中規中矩, 但在這個充滿了凡夫俗子的世界中從政, 難免會被我們無意中造成的阻力所束縛。如果阻力不斷, 他們熱情及衝勁與日俱減, 最後難免心灰意冷而不再動了。因此給予他週期性的鼓勵是必要的。然而過多的鼓勵也可能使他志得意滿, 開始輕浮起來, 結果竟和政客一樣做出一些荒誕的行跡!

你可能會奇怪政客和政治家到底和今天演講的學術題目有什麼關係? 啊, 這正是我想傳達給你的訊息: 政客也罷, 政治家也罷, 他們所表現出來的行爲和特色其實與物理系統表現出來的特性若合符節! 我手中這個玩具便可做爲政治家變政客的模型 (見下頁圖 1):

如果我不裝上電池, 則這個玩具單擺因受摩擦力的阻擾便會越擺越小而至不動, 這就是位洩了氣的政治家。但裝了電池後它便受到了週期性的推力, 於是它會來回勤快地運動, 這回它便成爲一位勤政不息的政治家。但是如果我現在把橡皮筋鬆開, 使上面那個輕巧的轉輪可以自由轉動, 你會發現它一會

兒順轉, 一會兒逆轉, 一忽兒快, 一忽兒慢, 完全不可預測; 這便成爲一個受太多鼓舞後政治家變成輕浮的政客的模型!

爲什麼原來一個單純的玩具會由簡單的運動衍生出複雜混沌的行爲來? 這就是以下所要談論的主題。

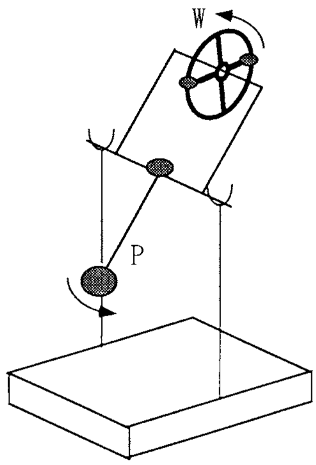


圖 1: 一個有混沌行爲的玩具。W 爲一個可自由轉動輕巧小輪, P 是和 W 的轉軸堅固接合在一起的單擺。圖中所有灰色橢圓代表小磁鐵。整個玩具的底座內藏有一個電池及電磁鐵 (未示出)。當開關打開時電磁鐵會發揮功效, 克服單擺受到的摩擦力, 使它不斷來回擺動。如果我們用橡皮筋把轉輪綁住, 則它便和單擺融成一體, 共同運動。一旦橡皮筋鬆開後, 則轉輪的運動將失去任何規律性。

(一). 混沌是怎麼形成的呢?

在混沌這名詞還沒被炒得家喻戶曉以前, 大家總相信物體的運動是和單擺一樣可以直接精確地預測 (只要我們夠聰明曉得如何解運動方程式), 但繼混沌爆發出來後, 大家對於這個世界, 也有了不同的看法。最主要是因爲, 我們先前認爲應該是很簡單的系統, 到最後竟也可能有混沌的現象產生了。現在舉一個地球磁場反轉的例子。從二次世界大戰之後, 我們發現, 海底中有所謂中洋脊的存在, 利用鑽探的技術, 我們發現從這洋脊向兩側延伸, 海床中有磁場且是對稱的分佈。(如圖2)

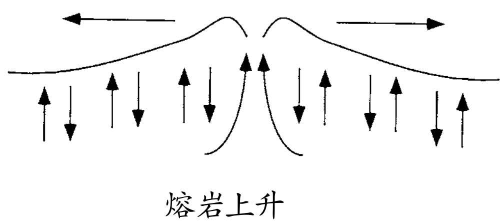


圖 2: 中洋脊示意圖。縱的箭頭代表海床中岩石磁化的方向。橫的箭頭代表海床被推向兩側。

爲什麼海床中有磁性? 一般相信中洋脊相當於海床中的一個裂縫, 熱的岩漿從地底昇上來便由此冒出, 把它兩側的地殼推開, 岩漿遇見海水後便冷卻凝固, 成爲新的海床。而在岩漿冷凝時它會被當時的地球磁場所磁化而保留住當時的地磁資料。於是藉著測量離中洋脊不同距離處的海床中的磁性, 我們便可推算出不同年代以前地球磁場的特性爲何。(離中洋脊越遠的海床是在越早以前被冷卻推開的岩石。) 最令科學家驚訝的是實際測量結果顯示: 地球磁場在不同年代竟有極性反轉的現象! 而且從一種極性變到另一種極性, 其變換時間很快, 一旦變過去之後便會持

續一段時間後才會再變回來。而且它持續的時間竟無任何規則性可言!

爲了能定性地了解這個混沌的現象, 科學家遂提出一個很簡單的“圓盤發電機”理論, 企圖捕捉住地磁反轉的特性。(見下頁圖 3)

在這個模型中, 我們假想地心好像是一個被某種力矩 τ 所推動的金屬圓盤。在任一瞬間它自轉的角速度是 ω, 而地球磁場 $\vec{B}$ 則以九十度貫穿金屬圓盤。這一個磁場是由於金屬盤下方有一條通有電流爲 I_1 的圓線圈所造成的, 但是 I_1 的電流又是由誰來提供呢? 原來它是由於上方的金屬圓盤轉動時切割磁力線而造成的。(在圖中我們以 I_2 來代表切割磁力線所造成的電流, 而這電流在流到圓盤邊界時便須由一根電刷來收集, 將之導引至下方提供給圓線圈做爲維持磁場的電流。) 在圖中的 A 和 C 點間我們假設有小小的漏電現象, 這個現象可以用一個電阻 R_3 來模擬。

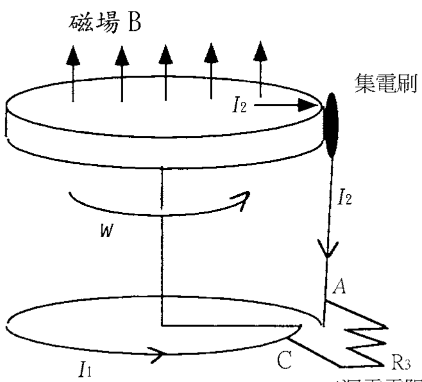


圖 3: 圓盤發電機模型

我們可以列出 I_1, I_2 及 ω 須滿足的方程式如下:

$$L_1\dot{I}_1 = -R_1I_1 - V_{A\to C} \tag{1}$$
$$L_2\dot{I}_2 = -R_2I_2 + \alpha\omega I_1 + V_{A\to C} \tag{2}$$
$$J\dot{\omega} = \tau - \gamma\omega - \alpha I_1I_2 \tag{3}$$
$$V_{A\to C} = -(I_2 - I_1)R_3 \tag{4}$$

其中 (1) 式是由考慮下方電阻爲 R_1 之圓線圈迴路內的電位改變而得。(2) 式則由考慮圓盤及直導線構成之迴路內之電位改變而得。(3) 式是圓盤受到摩擦力矩 $-\gamma\omega$ 及磁力的阻尼後之運動方程式。(J是圓盤的轉動慣量), 而 (4) 式則是漏電分路中的歐姆定律。

我們可以把 (1) 至 (4) 式聯立, 將之化成無因次的方程式如下:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \sigma(Y - X) \\ \dfrac{dY}{dt} = -Y + rX - XZ \\ \dfrac{dZ}{dt} = -bz + XY \end{cases} \tag{5}$$

其中 σ, r 及 b 均是常數, 而 $X \propto I_1$, $Y \propto I_2$, $-\omega$ 則正比於 Z 加上某常數。(5) 式便是非常出名的 Lorenz 方程式。(不過 Lorenz 當年是在考慮另一個氣象學上的現象時而推出這些式子!) 值得一提的是: 上式中的 r 係和我們外加的力矩 τ 成線性關係, 所以 r 越大代表推動圓盤運轉的力量越大, 而線路上的電流 I_1 (亦即其造成的磁場 $\vec{B}$) 也較可能形成劇變。(這就像是加熱煮開水, 你外加的熱源越強, 則水就越可能滾得厲害。)

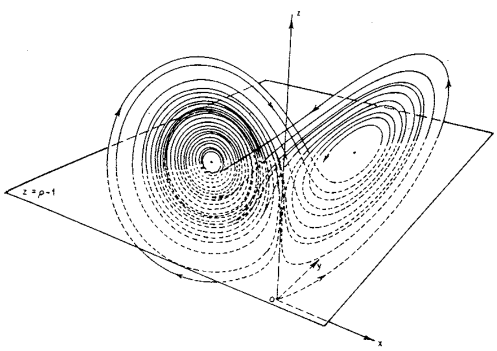


圖 4: Lorenz 方程式在空間中的軌跡。

一開始的 X, Y, Z 值若給定之後, 我們便可把它代入 (5) 式的右邊去計算出下一時刻的 X, Y 及 Z 值來。然後再把這組新的 X, Y, Z 代入 (5) 式右側去算出更下一刻之值來, $\cdots$。圖4 便是一個利用計算機算出來的 X, Y 及 Z 的軌跡。(我們可以把計算結果拍成電影來放就很清楚了。可惜演講時能做的事並不能在書面的演講紀錄上重現!) 我們很容易看出這個軌跡有一些奇特的現象: (i) 這個軌跡係局限在空間中的一個有限的區域內運動。(ii) 兩個原來很接近的點在很短的時間內會分開而演變成截然不同的運動方式。(iii) 不論你用什麼起始數據做 X, Y, Z, 只要時間夠長後它們所畫出的平均軌跡均很相似。(iv) 軌跡密密麻麻的分佈在這兩片"葉片"上, 但卻又處處有空隙及坑洞! (再回想看看, 這豈不是像極了前述政客的特徵嗎?)

在看到 (5) 式是如此的簡單, 而它表現出來的特性卻又如此詭異複雜後, 一般人大概要慨嘆科學難學, 從此避之如鬼神了! 所幸科學家經常都有一些絕頂聰明的數學家朋友們在旁邊"護航"。而這一次更不例外, 整個錯綜複雜的混亂運動交到數學家手中竟可以用幾句話、幾個圖形便說明的清清楚楚! 且讓我們聽聽數學家的解釋:

從 (5) 式我們可以看出 $X = Y = Z$ 始終是一個不隨時間變化的解, 不過這一個解並不一定是穩定的: 如果起始條件稍微偏離這個點, 則經過一段時間後它不見得仍會留在該點附近。事實上我們發現: 在 r 等於某個特定的值 (姑且叫它做 r_h 吧) 時這個系統會有一組特別的對稱軌道 — 它們會自原點出發, 經過無窮長的時間後再繞回原點來, 如圖5 所示。

$r < r_7$

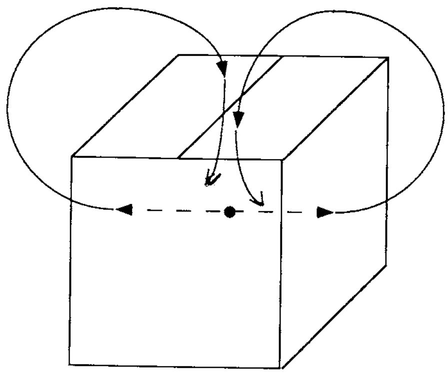
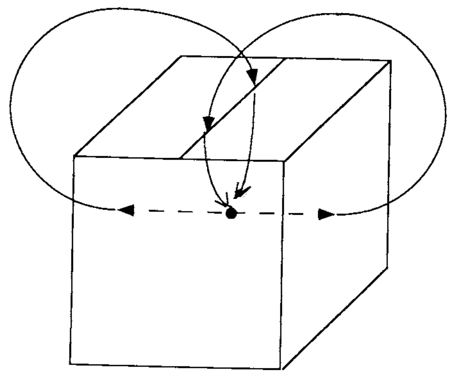


圖 5: (a)

$r = r_h$



$r > r_h$

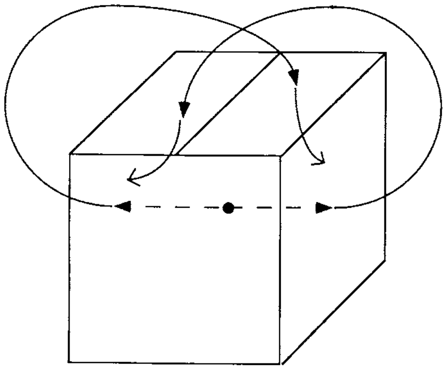


圖 5: (c)

(在此圖中我們也畫出當 $r < r_h$ 及 $r > r_h$ 時這組解如何演化。)

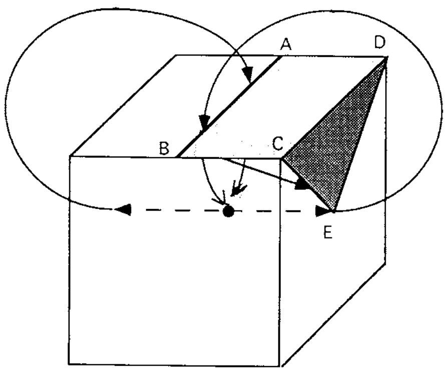


圖 6: $ABCD$ 長方形會被帶到側面成爲類似三角形的ECD。

仔細觀察在 $r = r_h$ 時的運動情形 (如圖6 所示), 我們可以看出原來在水平方向的長方形 $ABCD$ 會被帶到側面類似三角形的 CDE 區域內。而 CDE 接著會被再進一步帶到水平方向的一個很像長扁三角形的區域 $C'D'E'$ 內。(見圖 7)

綜合上述, 我們便會發現: 這一個技巧很成功地把連續的時間演化約簡成一個將 $ABCD$ 區域映至三角形 $C'D'E'(E' = A' = B')$ 的映射。這個映射通常叫做 Poincaré map。在圖 8中我們也示出了當 $r > r_h$ 時, 這個映射看起來會是什麼樣子:

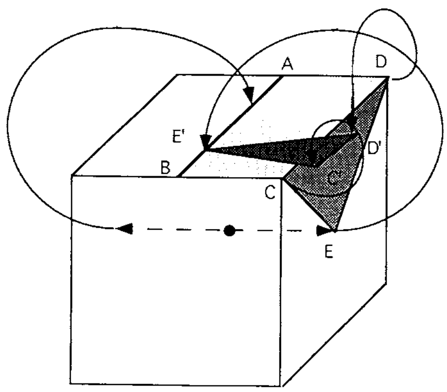
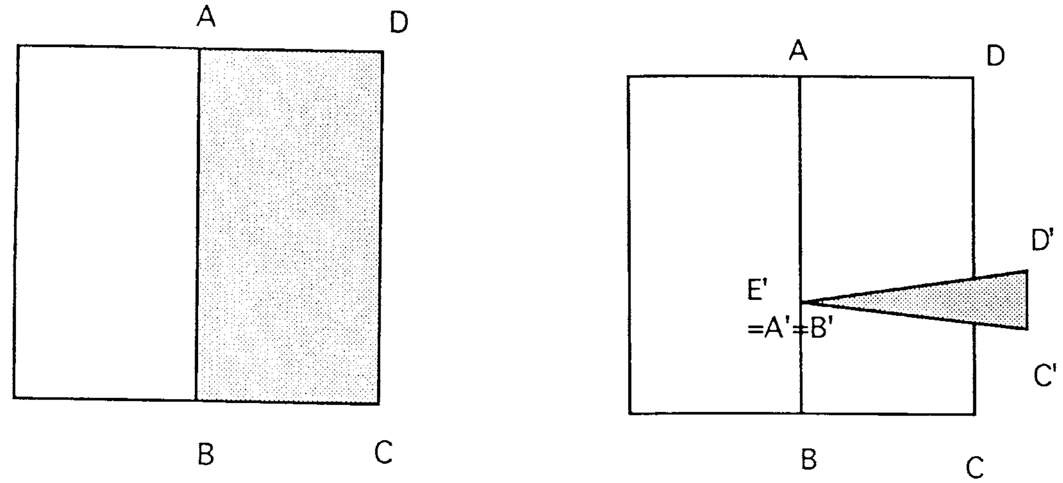
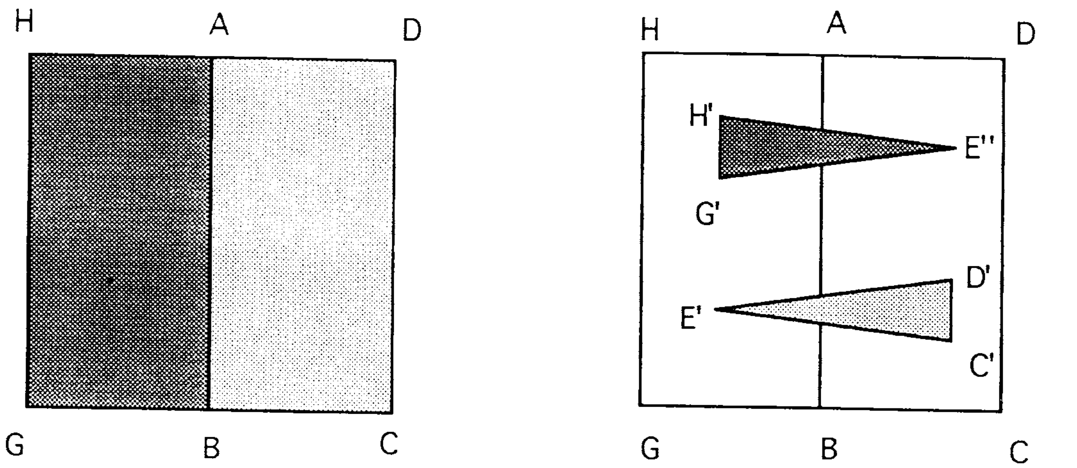


圖 7: ECD 會被帶成 $E'C'D'$。



$r < r_h$ 映至



$r > r_h$ 映至

圖 8

此時 $C'D'E'$ 已完全落入了正方形區域內。又依據對稱性我們也知道左半部的長方形 $ABGH$ 在 Poincaré map 下會被映到 $E''G'H'$ 上。圖 9是這整個論述的重點整理: 右半部 (R) 被映成下半的三角形 V 內, 而左半部 (L) 則被映成上方的三角形 U 中, 利用這個圖形我們便可很合理地解釋前述混沌的一些特色了!

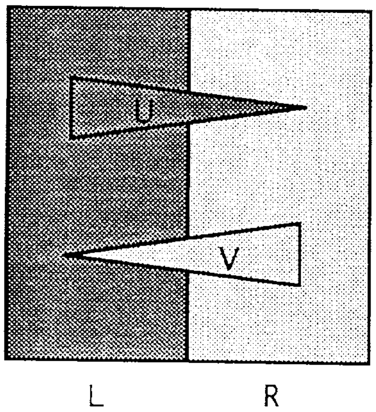


圖 9: *左右兩塊長方形 (L 及 R) 被映成上下兩塊長三角形 (U 及 V)。*

舉個例子來說: 你若選定長方形 R 內的一點做起始點, 則經過一段時間後當它跑到三角形 V 內時會有兩種可能情況發生: 它可能仍在 R 內 (即 V 和 R 的交集中) 或變成在 L 內 (即 V 和 L 的交集)。若它仍在 R 內, 則下一次演化過程中它仍會經過右半部的空間再次被映至 V 內, 但若它在一次映射後已跑到了 L 內, 則下一次它會改而經由左半部的空間而演化至上方的三角形 U 內去。你很容易看的出來一個軌跡可以用形如 $RRLRLL\cdots$ 的敍列來描述, 亦即它是自 R 出發, 被映至R, 接下來被映至 L, 而更下一次又回到 R, 而後則跑入 L 內, $\cdots$。這就解釋了爲何在電腦模擬中, 一個軌道會一會兒在右側打轉, 一會兒卻又在左側迴繞的原因。而且你也可以了解爲什麼兩個原來很接近的起始點在經過一段時間後會分道揚鑣, 開始一段大相逕庭的旅程: 因爲用來描述它們軌道的敍列只有前個符號是相同的, 往後便完全不同了。(例如: $RRLRLLR\cdots$ 和 $RRLRRLL\cdots$ 在前四回合中均相同 —— 都是 $RRLR$——但自第五回合後便大不相同。)

不但如此, 我們也可以利用圖 9來了解爲什麼軌跡間總是有一些間隙的存在! 不過在說明之前我們需要先做一些定義以助於往後的解釋。

定義 (attractor) : 給定不同的起始條件, 軌跡最後會演化成的狀態的總集合, 若是不可分割成更簡單的獨立個體, 則這個最終結構便稱爲 attractor。

如果在這個 attractor 中任取兩個很接近的點, 它們在經過短時間後便會演化得完全不同, 此時我們說這個 attractor 爲 strange attractor。

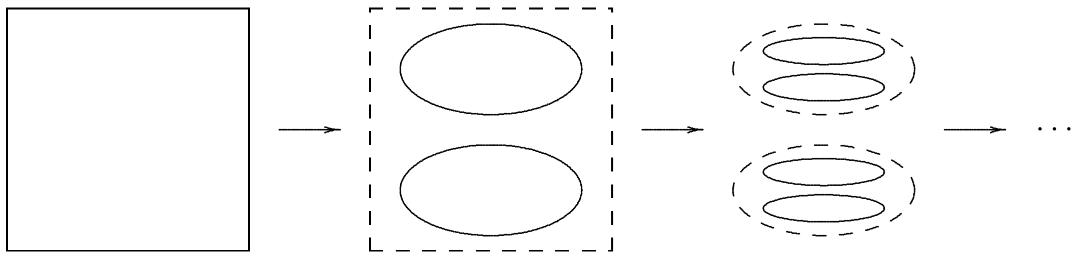


圖10: Lorenz attractor 的形狀和 Cantor set 構建方式完全一致。

以上所介紹過的 Lorenz 方程式的 attractor 便是一個 strange attractor。而事實上這個 attractor 的結構和數學家耳熟能詳的 Cantor set 根本是長得一模一樣! 這件事的說明其實是很容易的: 圖10中的 (i) 圖之正方形是前述的 L 及 R 的聯集。我們已知在經過一次 Poincaré map 後它們會被映成兩個三角形。(在圖10中的圖 (ii), 我們改以兩個橢圓來代表它們。) 根據定義, attractor 所討論的是經過很長時間後軌道的最終狀態的集合。所以 Lorenz attractor 內絕對不可能包含此二橢圓以外的點。因此我們必須把它們扣除。這就是爲什麼在圖 (ii) 中我們改以虛線代表原來的正方形的原因。接下來考慮 (ii) 中的橢圓再經過一次 Poincaré map 後會變到那裡去? 稍思考一下便可看出它們會被映至圖 (iii) 中四個更小的橢圓內。(因此我們仍須扣除掉其他原來在 (ii) 中之大橢圓內的點)。再做一次 Poincaré map, 則留下來的點更少了; 依次做下去, 我們最後剩下來的點便是 attractor 的眞正面貌。而這個建構方式, 不正是 contor set 的標準定義的推廣嗎?

我們都知道 Contor set 當初造出來的歷史背景其實和自然科學沒有一丁點兒關係。科學家們頂多只會認爲數學家很天才, 吃飽飯沒事幹才會創造出這種“怪胎”。然而風水輪流轉, 時至今日我們才體會出來簡單的物理系統原來也會在它的動力學表現中反映出如假包換的 Contor set 的結構來! 而我們前述的軌道間的坑坑洞洞原來正是 Contor set 的體現哩!

說到這裡我們便可順便提一下什麼叫做碎形 (fractal):

定義: 如果有一個點集合不論你如何去把它放大, 它始終呈現出有坑坑洞洞或凹凸起伏的結構, 則它就是一個碎形。

碎形在物理上就比較常見了, 像家中的濾水器內裝的活性碳基本上便是一種碎形的近似。天空中的浮雲在適當的近似下也可看成是碎形。前述的 Lorenz attractor 既然是 Cantor set 的孿生兄弟, 自然也是碎形啦! 今日碎形之所以會在自然科學中被炒熱了, 多少也和它的結構過去較未爲人所注意, 而事實上它又存在於很多地方等著我們去發

掘有關。而一個動力學系統最終的演化狀態竟然和碎形有如此密切的關係則是以前的物理學家所料想不到的。

現在讓我們再回頭看看以上的"混沌"到底是如何形成的? 籠統的講, 它其實包含了兩個要素: 一是軌道在運動過程中沿著不同的方向有被延伸及壓縮的特性, 第二是這些被延伸或壓縮的部份在不同的時刻可以被混和在一起, 就像是你在趕麵皮前用手揉和麵團一樣 —— 通常你爲了讓糖份和酵母粉能均勻地和在麵粉團內, 你會把它們拉長 (於是橫方向便會縮短), 接著再把它們疊在一起, 反覆數次之後一切便混在一塊兒了, Lorenz 方程式所表現出來的此一特性也可自圖 9看出來: 右側之長方形 R 被映至下方的三角形 V, 相當於一種在橫方向爲延伸而縱方向爲壓縮的作用, 而你把左右這兩個長方形 (L 及 R) 伸縮變形後疊回來變成上下的兩個三角形 U 及 V 就是一種混和效應。如果有了這兩要素之後系統還不變得"混沌"才是古怪呢!

了解了混沌的造成是因伸縮及混和共同作用後, 我們便可探討演講一開始時示範的玩具模型何以會有混沌的運動行爲了。簡單的說, 這個模型是一個被外力週期驅動的系統。(上方那個輕巧的轉輪上的小磁鐵感受到的磁場是週期的。) 要研究這個系統, 最好的辦法是閉起眼睛, 任由這個系統演化一個週期再去看它的位置和速度有些什麼變化。(因爲經過一個完整週期後外力所提供給你的環境又完全相同了, 這樣來分析問題才較明確。) 像這樣子, 把原來隨時間連續變化的系統變成每隔一段時間才去觀察一次, 其精神和前述的 Poincaré map 是完全一致的。因而我們又化成了探討 Poincaré map 到底有何特性。很明顯的, 如果你發現這個模型的 Poincaré map 又有伸縮及混和的特性, 則該玩具模型必然會有混沌的行爲! 事實上科學家分析此玩具的 Poincaré map 後發現正是如此。因而我們的膚淺的觀察便有了較嚴格的理論基礎。

有些系統雖然未受外力的週期驅動卻也有混沌的現象。像人造衛星或某些行星的自然衛星的行爲便是如此。要定性地去分析此行爲也是可以透過 Poincaré map 去了解; 基本上這些系統本身有內在的週期。(例如月球公轉對於人造衛星本身來講便可視成是一種外力的週期驅動。) 因而我們可以每隔一個週期去看它, 以使連續的時間變化約簡成 Poincaré map, 接著再去檢查此映射有否伸縮及混和此二混沌要素, 一旦發現有, 則系統的混沌現象便可較清楚地解釋了。

(二). 混沌的實例:

1. 船行駛在海上, 水面上的波週期性的拍打船, 所以, 船本身也像一個被週期性外力驅動的單擺似的晃動。如果週期、頻率及波浪的高度配合的"對"的話, 則有混沌現象產生, 船就會翻覆。

2. 印表時, 打點須非常稠密, 字體或圖表等才會美觀。要使打點稠密的話有二種方式, 一種是滾筒旋轉的速度很慢, 但這樣不符合實際效益。所以必須加快打點速度。但如何加速呢? 通常是用磁鐵通以交流電, 便可加速打點。然而眞正的研究發現, 在無限制加快

打點速度時, 也會有混沌產生, 此時所列印出來的結果, 可能無法預測且並非我們想要的。

3. 科學家研究非線性的電子線路, 以及把雞心細胞放在培養皿內, 觀察在外加週期電壓的刺激下其振動行爲, 也都發現有混沌的現象。此外, 生理學家發現正常人的腦波有輕微的混沌現象, 反而不如顛癇症患者在病發時的腦波來的有規則性。此一有趣的觀察似乎意味著: 混沌的存在或許可使正常的腦能更容易地接受外界的刺激而迅速做出適當的反應來。(回顧一下混沌的一個特性, 它可以遍歷 attractor 上的各種狀態, 宛如前述的超級政客! 因而它能較容易地變化至足以應付外界刺激的狀態去!) 當然, 這目前仍停留在臆測的階段, 故有待進一步的研究證據去支持此一觀點。

(三). 混沌的應用:

到目前爲止我們所敍述的混沌現象似乎都是負面的, 但這並不盡然。水能覆舟便也能載舟。其正面的應用端視我們的用心程度而定。以下便列出幾種仍在研究中的可能性:

1. 在製藥時爲了要使溶液中的化學成份得以均勻混合, 我們可以將它密封在一個圓桶內, 週期地去滾動它。此時滾筒內的流體速度會隨時間做週期性的改變。但液體內的任一個小粒子的運動情形則像是一個被週期外力推動的單擺那樣, 可能形成混沌的軌跡, 於是便可藉由混沌來達到均勻混合的目的。其實我們喝咖啡時用湯匙去攪勻糖水及奶精和這種過程也有異曲同工之處。
2. 混沌的控制: 一個混沌的系統可能具有非常多的不穩定的週期運動。假若我們想充份運用其中一個週期解的特性來做工業上的應用 (例如非線性電子線路中的一個特殊週期解也許可做爲小提琴音色的模擬也說不定!), 則應如何達成此一目的的呢? 這便是目前極爲熱門的“混沌控制”(Controling chaos) 研究的課題。其基本想法是; 既然系統是混沌的, 則它便可在很短的時間內走遍各式各樣的狀態, 因此它也可以很快地跑到我們所想控制住的該特殊週期解附近。一旦我們發現它已落入此解的附近, 我們便可操控系統內的一些可以改變的參數不斷微調, 以使此系統不致偏離此解太遠。假若隔一段時間後我們反而對另一週期解有興趣了 (例如, 我們這次也許希望它能模擬小喇叭的波形), 則我們可以放開對系統參數的控制, 讓它又混亂起來。等到它很快又到達我們所希望控制的新解附近時, 再來微調系統, 使之一直保持在新解附近。這一個速捷操控系統的機制目前已引起不少研究人員的注意。我們可以說: 混沌的宰制正處於方興未艾, 令人興奮的萌芽時期!
3. 傳統通訊均是使用很規則的電磁波訊號做爲載波, 經由調幅或調頻的方式來達到訊息傳送的目的。但是這一做法的缺點是, 假若因爲某些緣故我們希望以鎖碼的方式來做祕密通訊, 則我們就得發展出一套特殊的鎖碼方式, 使沒有解碼器或不知解碼規則的人收到時會因其中截收到的電訊顯得一團亂而一籌莫展。科學家們於

是想到: 既然我要另外發展出一套鎖碼的方式使訊號對不知情的人看來是混亂無章的, 則爲何我不乾脆直接用一個天生是混沌的電路訊號做爲載波的工具? 只要我的朋友知道我使用的是什麼樣的混沌系統, 且知道我是在何種混沌狀態下發送出我的通訊資料, 則他便可操作一個相似的混沌系統來進行解碼的工作! 當然啦! 這個想法說起來容易, 實行起來仍有許多技術上的困難及問題需要克服。因此學者們仍在孜孜不倦進行此方面之研究。

(四). 如何將混沌量化:

以上的討論似乎均局限於定性的敍述, 而對於如何將混沌的特性予以量化以獲得更精確的描述則仍未提及。事實上, 數學家及科學家們在這方面也有了一些初步的成果。一個簡單的例子便是熵 (entropy) 概念的引入。

我們知道熱力學中的熵和系統的資訊到底被我們掌握了多少有密切的關係 —— 系統的熵越大, 則我們越不清楚它到底能處於什麼樣的微觀狀態。這個想法也已被資訊科學家充份應用到他們的研究領域中。然而混沌和熵到底是如何被牽連在一起的呢? 說穿了其實也很簡單: 我們在前面已經提示過, 兩個相鄰很近的起始狀態在經過很短的時間後便會大相庭逕, 演化成兩個截然不同的狀態。今若我們的實驗儀器不足以精密地測量出一開始的那一瞬間這兩個起始條件的差異性, 則只要等一段時間後, 待它們分道揚鑣時, 我們便可偵測出它們的差別來。換句話說, 我們已成功地獲知了此兩者間差異性的資訊來, 因而我們便可適當地定義出熵是什麼。“熵”這個概念的引入是將動力學系統做定量分類的一個里程碑, 因爲我們可以看出兩個系統的熵值若不同, 則它們一定不可能是相似的系統。

和熵有密切關係的另一數量則是所謂的 Lyapunov 指數。這一個指數是用以度量相鄰兩個不同起始條件在演化過程中分道揚鑣的快慢程度。限於篇幅以及技術上的細節, 我們便不在此對它多著筆墨。此外, 爲了量度碎形結構內的坑坑洞洞的疏鬆程度, 科學家也發展出了許多碎形維數 (fractal dimension) 的概念來, 不過時至今日, 由於我們實在仍無法找出碎形維數和製造出碎形來的幕後機制間有什麼特定的關係存在, 因而此方面的研究仍有待有興趣的專家學者們去探討。

(五). 其他重要的現象:

1. 對於一個一度空間中的映射來說, 它的性質是相對的比較容易研究。我們已知在一個很廣泛的場合中, 此類映射均會表現出“倍週期”(Period doubling) 的特色。簡單的說, 它指的是: 當我們調整此系統的參數時, 系統的穩定狀態會從一個週期變成兩倍週期, 接著變成四倍週期、八倍週期 $\cdots$ 等等。雖然這個特性和此映射是一度空間中的映射有極密切的關係, 但不少高度空間中的物理系統也呈現出這一特性! 通常這是由於該系統雖然名義上說來是高度空間中的系統, 但是它在大半的方向上均有強烈收縮的性質, 因而它可以被一個一度空間中的系統相當

精確地來做近似描述, 從而才得以顯現出此一特性來。事實上我們若利用電腦來解 Lorenz 方程式也會發現它在某些條件下會表現出倍週期的現象, 其原因便是如此。

2. 有些物理系統在很長的一段時間內看起來好似在做週期運動, 但在一個神不知鬼不覺的時刻它會忽然間悸動一小陣子, 然後又回歸成近乎週期的運動, 這一現象叫 intermitency。這種現象的發生通常是由於系統所處的狀態雖是混沌的, 卻又非常接近一個不隨時間改變的解及一個週期解的交界附近所致。(正因此故它才會在週期解附近停留一段長時間而被我們誤以爲它是個眞正的週期狀態!)
3. 一個 attractor 的大小有時在我們調整系統參數時會有忽然變大或變小的現象發生, 這叫做 Crisis, 我們可以把它的產生看成是由於兩個 attractors 在適當的狀態下撞在一起而聯合成一個大的 attractor 所致。

(六). 我們怎能相信電腦?

如果你已經承認一個混沌系統的特色是兩個相鄰很近的起始條件可以很快地演變成完全不同的狀態, 那麼你一定會馬上懷疑: 我們用電腦去計算軌道, 根本會於每一時刻均引起誤差, 則根據混沌的理論, 豈非表示我算出來的答案和眞實答案根本一點關係也沒有?

嗶! 慘兮兮!

其實不然! 我們可以打個比方: 警方正循線追查某件竊車案件。但由於熱心民衆提供的資料多有偏誤, 以致驚方的偵查工作出現了誤導的現象。結果警方在鍥而不捨的努力下終於破了一件竊車案, 但其偵破的是一件賓士失車案而非一開始所鎖定的凱迪拉克轎車! 雖然原始目的沒有達到, 但因民衆提供的錯誤線索仍始終停留在“車輛失竊”這個方向無誤的主題上面, 所以警方仍可失之桑榆而收之東隅!

我們用電腦模擬混沌系統和以上的比喩非常的近似: 我們所求得的解因每一階段的誤差以致偏離原先想解的軌道甚遠 (甚至不再有什麼關係), 但電腦求得的軌道其實仍是非常接近於此 attractor 上的某一軌道! 這個有趣的結果叫做 shadowing 定理, 意思是我們求算出之軌道始終和某一條眞實軌道如影隨形地一起出現! 多數的混沌系統因爲遵守這一 shadowing 定理, 因此我們仍可放心的去使用電腦來求算軌道!

(七). 亂中有序?

雖然提到混沌難免會使人有亂糟糟, 剪不斷理還亂的聯想, 而且根據前面的論述我們也很淸楚地看出它確實是混亂且不可預測的代名詞。但這絕對不代表它在混亂中沒有任何規律性可言! 事實上, 混沌背後所擁有的規則性著實讓不少科學家著迷過!

以倍週期這個現象來說, 科學家們便發現許多不同的映射不但都表現出這個特性, 而且更妙的是發生倍週期現象時的參數間有簡單的等比關係。而其比值竟與你是用什麼

系統來研究沒有關係! 這種普適性 (universality) 和物理學家長久以來夢寐以求的以單一理論企圖去了解全世界的理念不謀而合。尤有進者, 我們前面提到的 intermittency 在經過科學家仔細鑑定後, 也被發現具有它自己的另一種普適性!

除了上述的數學特性外, 混沌系統中的持續性結構也令科學家們困惑不已。像木星的大紅斑在它週圍混亂的大氣中至少已存在數百年了, 卻未見其消褪過。到底是什麼因素使它能自亂中成形, 保持自我而不迷失呢? 到現在我們仍不能確定這個詭異秩序性的背後所隱藏之奧秘爲何。

(八). 但是混沌就代表了一切嗎?

雖然這個演講的題目是混沌, 而且我們也盡了最大的努力, 試圖讓大家體會到混沌的諸般特性, 並舉各種實例以說明它到處存在、發生這個事實。但是我卻想在結尾提醒大家一件事: 混沌也許是一個引人注意的話題, 但是它絕不是我們看待一個物理系統可以使用的唯一觀點! 以我們前面舉過的利用轉動滾筒來混和溶液製藥做例子, 你如果堅持要去檢視一個單一流體小塊的運動軌跡, 則無疑的它將是混沌的。但是如果你換一種觀點, 只選擇去量度滾筒內液體的速度如何分佈, 則它將具有很簡單的週期性而無任何混沌的跡象。因而混沌與否端視你究竟對這個系統的那些性質有興趣而定。只是一味的去探討粒子的軌跡去說它擁有混沌的現象並不一定永遠是最好的描述方式!

—本文作者任教於台大物理系—