淺談控制理論

葉芳柏演講

林聖哲記錄

在我們一般日常生活中, 常常看到一些自動化的東西, 例如說: 冷氣的自動調溫系統, 電視或熱水器的自動關閉電源, 或是一般百貨公司的自動門等等, 這些爲我們生活上帶來了莫大的方便, 那它究竟是如何設計的呢? 它發展的理論是那些呢? 接下來我們便一一爲你介紹。

首先, 我們先來看一下控制系統在這些年來所發展歷史是什麼:

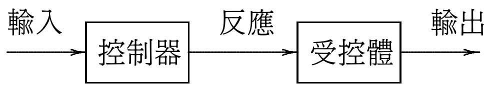
1784 ⟶ 離心錘調速器
1788 ⟶ 蒸氣機
1848 ⟶ 調速器
1860 ⟶ 魚雷自動控制系統
1900 ⟶ 自動電壓調節器
1910 ⟶ 大砲仰俯角器
1920 ⟶ 飛機自動穩定器
1930 ⟶ 自動燃燒控制; 石油廠
1940 ⟶ 自動導航系統; 武器控制系統
≀ ⟶ 數位計算機理論建立
1950
≀ ⟶ 回饋控制理論建立
1960 ⟶ NC + 飛機、飛彈、東床
≀ ⟶ 估測理論、最大原理
1970
≀ ⟶ 最佳控制、最適控制
1980
≀ ⟶ H^∞ − control、adaptive H^∞ − control
1990

所以由以上我們可以發現, 控制這門學問它是由自動化而推進至自動控制, 且由簡單的自動控制再發展成複雜的自動控制系統, 最後再形成一套理論, 一般來說在1930年代至1960年代, 它是屬於一個經驗控制的時代, 且在嘗試錯誤中求進步的年代; 而1960 至1980年代是屬於現代控制的時代, 這個年代的所有控制系統皆是建立在H^2− control 理論上。從1980 年之後, 控制這門學問就完全建立在H^∞−control 理論上了, 而這時期我們稱之爲後現代控制理論時期 (Post modern control)。

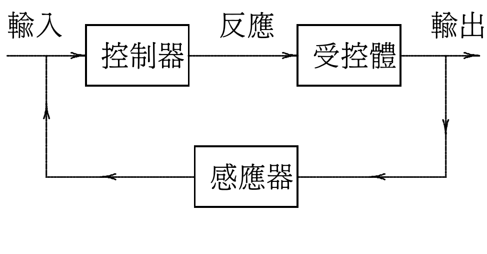
好了, 那麼控制理論或控制這門學問它究竟想要做些什麼東西呢? 事實上它所做的

就是爲了讓我們能夠設計一個控制器 (controller) 來達到各種不同需求的目標, 如同我們前面所舉的例子, 爲了設計控制系統, 我們就必須有一些先前的準備工作, 在這裡我們將它分成5 個步驟: 一是建立系統之數學模式, 在我們想要設計一個控制系統之前, 我們最首要的工作便是要寫出這控制系統的數學模式, 之後我們再經由這模式做一些定量和定性上的分析, 分析之後我們就必須設計一些性能指標, 以便我們讀取數據, 之後我們再用一些工具來模擬它, 以確定我們這數學模式建立的是否完善; 若不完善, 則重新建立或修正以前的步驟, 直至可接受, 則將之付諸實務設計, 於是一套控制系統應運而生。

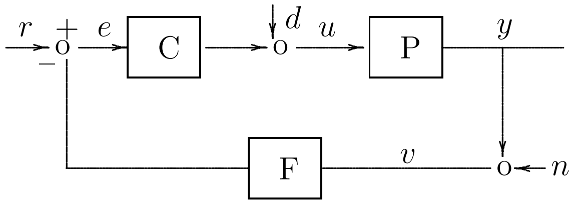
那麼控制系統有那些種類呢? 它分成二種, 一是開迴路系統; 另一是閉迴路系統。什麼叫做開迴路系統? 它是指有一個訊號進來到這個控制系統內, 於是控制器根據這個訊號做一些反應, 交與系統執行, 如此便算完畢了 (如圖):



而閉迴路系統它卻多了一個步驟, 它會檢視控制器所做出的反應有否改善情況, 進而做一些修正, 所以閉迴路系統我們又稱它爲回饋控制系統 (如圖):

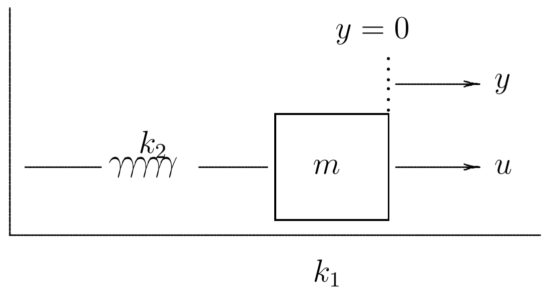


以下我們將以閉迴路系統爲基礎, 討論一些控制理論上的課題。下圖是一個基本控制系統的圖形, 其中C代表的是控制器, P 和F代表基本系統, r、d、n表示外界干擾信號。



在這裡我們就遇見了兩個問題, 一是我們如何去描述P、u、y, 二是我們是否能從輸出y和輸入u中去掌握P的內部結構?

對於問題一, 一般我們有兩種解決辦法, 即是物理定律和經驗法則兩種, 而物理定律描述多半是一些微分方程上的問題, 下面我們就舉一個彈簧問題來說明:



k_1代表摩擦係數, k_2代表彈性係數, 而y表示位移, u 表示外力, 根據虎克定律和牛頓第二運動定律, 我們得到以下的物理式子:

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = u - k_1\frac{dy}{dt} - k_2 y, \quad t \geq 0$$

然後我們讓x_1代表y, x_2代表y對時間微分, 於是我們便可將式子轉換成下面的樣子:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$m\dot{x}_2 = u - k_1x_2 - k_2x_1$$

將它寫成矩陣形態:

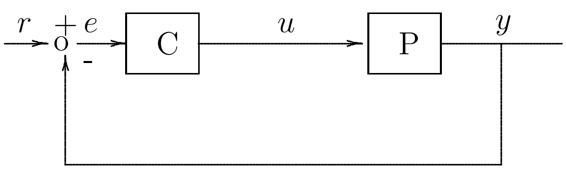
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k_2}{m} & \frac{-k_1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

這時我們主要的工作便是去找出x這解的軌跡了, 以了解系統之動態。然後我們再來問三個問題, 一是u是否會影響x的解, 二是我們能否由u和y估測到$x(0)$的值, 三是如果我們做一個有界輸入, 是否能得到一個有界輸出呢? 而從這三個問題來看, 我們不難發現事實上前述的問題二已經包含在這三個問題中了。而這些問題衹是爲了讓我們評估控制器的可行性罷了。

所以通常我們要設計一個控制器之前, 我們都會先寫出它的數學模式, 然後做一些定性上的分析, 如上述之問題一的可控性及問題二的可觀測性, 以了解這控制器的存在性, 看其存在的價值, 假設它有其存在的價值的話, 最後我們便會考慮它的穩定性了, 畢竟一個穩定的控制器才能發揮它最大的功用。

最後如何才能稱之爲一個性能好的穩定控制器呢? 最主要的性能之一便是要將誤差信號控制到最小的情況, 如圖:



$e = r - y$我們稱之爲誤差信號。所以我們最大目的便是將之控制到最小, 就是說將$\| e \|$逼近於0, 例如說: 我們考慮e的能量, 即$\| e \|_2 = (\int_0^\infty |e(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$, 我們便是要在任意外界干擾信號$r$之情況下把$\| e \|_2$降至接近$0$的位置, 事實上此一動作就如同我們要讓$\max(\frac{\|e\|_2}{\|r\|_2})$遠小於$1$是一樣的。現在讓我們來考慮$e$和$r$之間的關係:

$$e = r - y, \quad y = Pu, \quad u = Ce$$
$$y = PCe, \qquad e = r - PCe$$

如此一來我們就得到:

$$e = \frac{1}{1+PC} r$$

所以說:

$$\begin{aligned} \max \cdot \frac{\| e \|_2}{\| r \|_2} &= \max \frac{\| \frac{1}{1+PC} r \|_2}{\| r \|_2} \\ &= \max_w \left| \frac{1}{1+PC}(jw) \right| \end{aligned}$$

所以在設計一個穩定的控制器C的同時, 我們要$\max_w |\frac{1}{1+PC}(jw)|$愈小愈好, 這也就是控制這門學問日以繼夜的不斷在追求的目標, 設計最佳性能的穩定控制器。

從以上的討論看起來,「控制」這門學問它不僅僅一個單一的學問, 它更結合了其它不同學科的東西, 例如: 動力系統、最佳化理論、數值分析、系統原理等等, 所以說控制它本身眞是一科名符其實的應用科學。

—本文作者任教於東海大學數學系—