1994年海峽兩岸大學聯考試題比較

陳振宣

楊象富

我們對大陸 (統一考試, 分文科、理科)、台灣 (分社會組、自然組) 兩套高考試卷作了初步的對比分析, 現將結果羅列如下, 供兩岸的專家和廣大教師參考。

一. 知識含蓋面的對比

大陸、台灣的教學大綱 (課程標準) 不同, 互有出入。台灣的知識面較寬, 向量、空間解析幾何、概率統計、簡易微積分大陸暫未列入考試範圍。大陸對立體幾何的要求明顯高於台灣。這些差異都反映到試卷上。相對於各自的教學要求, 大陸試卷的知識含蓋面高於台灣, 但台灣考查的知識面又較大陸爲寬。這主要是教學大綱不同所導致的結果, 當然也與考試時間的多少有關, 大陸統一考試爲120分鐘考題25則, 台灣爲80分鐘考題15則。兩套考題的知識含蓋面情況, 請參閱附表。

二. 對基礎知識與基本技能的要求對比

從兩套試卷看, 大陸、台灣對數學的“雙基”的考試都很重視。如大陸文、理科第 (1)、(2)、(3)、(4)、(6)、(8)、(16) 題等, 台灣社會組第一大題的1、3, 第二大題的1、2、3、5、9; 自然組的第 [一] 1、2、3, [二] 6、7, [三] 1、4 等題, 所占比重都較大。在這方面, 兩岸的要求比較一致。

三. 兩套試卷的題型對比

兩套試卷的題型都分選擇題、填空題和解答題三類, 大體上一致。台灣的選擇題安排了五個選擇支, 大陸是四個選擇支。台灣的選擇題、填空題有的是系列題逐步深入, 要求逐題升高, 大陸無系列題。這樣, 台灣此類試題的區分度可能高於大陸, 但知識含蓋面會比大陸略小。至於解答題, 大陸的題量更多, 難度也較高。

四. 對常用數學思想方法考查的對比

自八十年代以來, 數學教學中普遍重視能力的培養, 因此對數學思想方法的教育逐步得到不同程度的發展。從兩套試卷可以發現大陸與台灣都已開始注重數學思想方法的考查。

1.對方程、函數思想 (數學模型方法) 的考查

這是兩套試卷中考查最廣泛的一種數學思想方法, 如大陸文科的 (2)、(5)、(14)、(15); 理科的 (2)、(5)、(15)、(17)、(21); 台灣社會組的 [一] 2、4, 計算題三, 自然組的填空題 1、2, 計算題四。難度上大陸的高於台灣, 如大陸的選擇題 (15)。

2. 邏輯推理的考查

在這方面, 大陸的考試面比台灣的廣, 要求也比台灣的高。如大陸文科的 (11)、(22)、(23), 理科的 (11)、(22)、(23) 題, 台灣的試卷中缺乏這類試題。

3. 數形轉化的考查

兩套試卷對此都較重視, 如台灣社會組填空題第八題, 自然組選擇題 [二]; 大陸文科的 (12)、(24), 理科的 (12)、(24), 值得提出的是台灣社會組填空題 8 題, 這類要求在台灣自然組和大陸文理兩科中均未涉及, 難怪有人說台灣的社會組試題不比自然組容易。

4. 等價轉化的考查

大陸、台灣的試卷對此都作了考查。如台灣社會組填空題6, 自然組選擇題9, 計算題二。大陸的文科 (21) 題, 理科 (22) 題。在數學式的變形方面, 台灣側重於對數恆等變換, 而大陸則重在考查三角恆等變換。

5. 遞推思想的考查

大陸文、理科的最後一題 (第25題) 都考查遞推這一重要數學思想方法。大陸從八十年代起對此引起重視, 一度成爲熱點, 如84年, 87年遞推的要求很高, 近年已降到適當程度。94年的台灣試題中未出現此類問題。

6. 邏輯劃分的考查

大陸歷年來都很重視, 今年則未著意涉及。可能是有意採取降溫措施, 台灣的試卷中也未涉及。上海市今年的高考試卷 (單獨命題) 中仍有這方面的要求。

五. 對數學應用的考查

兩岸對此都已引起重視, 這是令人欣喜的, 希望今後繼續適當加強。

我們希望兩岸交流高考命題研究的成果, 促使數學教育走出“題海戰術”的怪圈, 早日步上提高數學素質的康莊大道。

—本文作者分別任職教上海市新學科研究所思維科學室暨中國管理科學研究院思維科學研究所研究員與浙江省中學教學特級教師, 浙江省宁海中學教育科學研究室主任—

附表:

1994年兩岸數學高考內容比較表

高考內容	文科	理科	社會組	自然組
集合、函數 (冪、指、對)	√	√	√	√
三角函數	√	√	√	√
兩角和 (差) 的三角函數	√	√	√	√
反三角函數, 簡單三角方程	×	√	×	×
數學歸納法	√	√	×	×
數列及其極限	√	√	√	×
不等式	√	√	√	√
複數	√	√	√	×
排列與組合	√	√	√	√
二項式定理	√	√	×	×
(立體幾何) 直線與平面	√	√	×	×
多面體和旋轉體	√	√	×	×
(解析幾何) 直線與圓	√	√	√	√
圓錐曲線	√	√	√	√
參數方程與極坐標	×	√	×	×
多項式, 高次方程 (不等式)	×	×	√	×
向量	×	×	√	√
空間解析幾何	×	×	√	√
行列式、矩陣	×	×	×	√
概率與統計	×	×	√	√
簡單微積分	×	×	√	√
數論初步	×	×	√	×

附件: 大陸1994年高考數學試題、答案及評分標準。

1994年普通高等學校招生全國統一考試試題、答案及評分標準

數 學 (文史類)

一、選擇題: 本大題共15小題; 第 (1)–(10) 題每小題3分. 第 (11)–(15) 題每小題4分, 共50分. 在每小題給出的四個選項中, 只有一項是符合題目要求的. 把所選項前的字母填在題後括號內.

(1) 點 (0,5) 到直線 $y=2x$ 的距離是
A. $\frac{5}{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(2) 如果方程 $x^2+ky^2=2$ 表示焦點在y軸上的橢圓, 那麼實數 k 的取值範圍是

A. $(0,+\infty)$ B. $(0,2)$

C. $(1,+\infty)$ D. $(0,1)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n}{1+2+2^2+\ldots+2^n}=$
A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

(4) 設θ 是第二象限的角, 則必有

A. $\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}>\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}$ B. $\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}<\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}$
C. $\sin\frac{\theta}{2}>\cos\frac{\theta}{2}$ D. $\sin\frac{\theta}{2}<\cos\frac{\theta}{2}$

(5) 若直線 $x+ay+2=0$ 和 $2x+3y+1=0$ 互相垂直, 則 $a=$
A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

(6) 某種細菌在培養過程中, 每20分鐘分裂一次 (一個分裂爲兩個). 經過3小時, 這種細菌由1個可繁殖成 A. 511個 B. 512個

C. 1023個 D. 1024個

(7) 在下列函數中, 以 $\frac{\pi}{2}$ 爲周期的函數是

A. $y=\sin 2x+\cos 4x$

B. $y=\sin 2x\cos 4x$

C. $y=\sin 2x+\cos 2x$

D. $y=\sin 2x\cos 2x$

(8) 已知正六稜台的上、下底面邊長分別爲2和4, 高爲2, 則其體積爲

A. $32\sqrt{3}$ B. $28\sqrt{3}$

C. $24\sqrt{3}$ D. $20\sqrt{3}$

(9) 使 $(\sqrt{6}-\sqrt{2}i)^n$ 是純虛數的最小自然數 $n=$

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

(10) 有甲、乙、丙三項任務, 甲需2人承擔, 乙、丙各需1人承擔, 從10人中選派4人承擔這三項任務, 不同的選法共有

A. 1260 種 B. 2025 種

A. 2520 種 D. 5040 種

(11) 對於直線m,n和平面a、β, $\alpha\perp\beta$的一個充分條件是

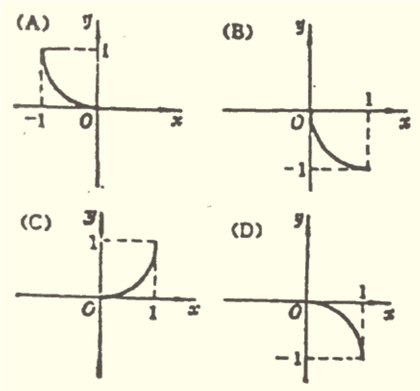
A. $m\perp n, m//a, n//\beta$

B. $m\perp n, \alpha\cap\beta=m, n\subset\alpha$

C. $m//n, n\perp\beta, m\subset\alpha$

D. $m//n, m\perp\alpha, n\perp\beta$

(12) 設函數$f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}(-1 \le x \le 0)$, 則函數$y = f^{-1}(x)$ 的圖象是



(13) 已知過球面上 A、B、C 三點的截面和球心的距離等於球半徑的一半, 且 $AB = BC = CA = 2$, 則球面面積是

A. $\frac{16}{9}\pi$　B. $\frac{8}{3}\pi$

C. 4π　D. $\frac{64}{9}\pi$

(14) 如果函數 $y = \sin 2x + a\cos 2x$ 的圖象關於直線 $x = -\frac{\pi}{8}$ 對稱, 那麼 $a =$

A. $\sqrt{2}$　B. $-\sqrt{2}$

C. 1　D.-1

(15) 定義在 $(-\infty, +\infty)$ 上的任意函數 $f(x)$ 都可以表示成一個奇函數 $g(x)$ 和一個偶函數 $h(x)$ 之和. 如果 $f(x) = \lg(10^x+1), x \in (-\infty, +\infty)$, 那麼

A. $g(x) = x$, $h(x) = \lg(10^x + 10^{-x} + 2)$

B. $g(x) = \frac{1}{2}[\lg(10^x+1)+x]$,
$h(x) = \frac{1}{2}[\lg(10^x+1)-x]$

C. $g(x) = \frac{x}{2}$, $h(x) = \lg(10^x+1) - \frac{x}{2}$

D. $g(x) = -\frac{x}{2}$, $h(x) = \lg(10^x+1) + \frac{x}{2}$

二、填空題: 本大題共5小題; 每小題4分, 共20分. 把答案填在題中橫線上.

(16) 拋物線$y^2 = 8 - 4x$的準線方程是___.

(17) 在$(x+m)^7 (m \in N)$ 的展開式中, x^5的係數是x^6的係數與x^4的係數的等差中項, 則$m =$ ___.

(18)若$\frac{5}{4}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi, \sin 2\theta = a$, 則$\cos\theta - \sin\theta$的值是___.

(19) 設圓錐底面圓周上兩點A、B間的距爲2, 圓錐頂點到直線AB的距離爲$\sqrt{3}$, AB和圓錐的軸的距離爲1, 則該圓錐的體積爲___.

(20) 在測量某物理量的過程中, 因儀器和觀察的誤差, 使得n次測量分別得到$a_1, a_2, \ldots, a_n$, 共n個數據. 我們規定所測量物理量的"最佳近似值"a是這樣一個量: 與其他近似值比較, a與各數據的差的平方和最小. 依此規定, 從$a_1, a_2, \ldots, a_n$推出的$a =$ ___.

三、解答題: 本大題共5小題; 共50分. 解答應寫出文字說明、證明過程或推演步驟.

(21) (**本小題滿分8分**)

求函數 $y = \frac{\sin 3x \sin^3 x + \cos 3x \cos^3 x}{\cos^2 2x} + \sin 2x$ 的最小值.

(22) (**本小題滿分**10**分**)

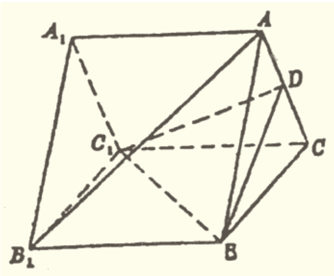
已知函數$f(x)=\lg x(x\in R^+)$. 若$x_1,x_2\in R^+$, 判斷$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$與$f(\frac{x_1+x_2}{2})$的大小, 並加以證明.

(23) (**本小題滿分**10**分**)

如圖, 已知 $A_1B_1C_1-ABC$ 是正三稜柱, D 是 AC 中點.

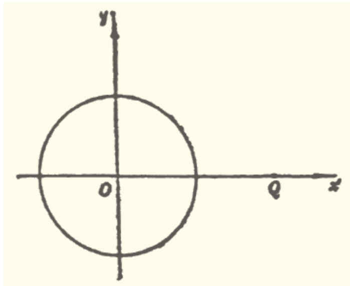
(I)證明$AB_1//$平面DBC_1;

(II) 假設$AB_1\perp BC_1, BC=2$, 求線段AB_1在側面B_1BCC_1上的射影長.



(24)(**本小題滿分**10**分**)

已知直角坐標平面上一點$Q(2,0)$和圓$C: x^2+y^2=1$, 動點M到圓C的切線長與$|MQ|$ 的比等於$\sqrt{2}$. 求動點M的軌跡方程, 說明它表示什麼曲線.



(25) (**本小題滿分**12**分**)

設數列$\{a_n\}$的前n項和爲S_n, 若對所有自然數n, 都有$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$, 證明$\{a_n\}$是等差數列.

數學試題(文史類) 參考答案及評分標準

一、選擇題: 本題考查基本知識和基本運算. 第 (1)−(10) **題每小題**3**分. 第**(11)−(15) **題每小題**4**分, 共**50**分.**

(1) B	(2) D	(3) B	(4) A	(5) A
(6) B	(7) D	(8) B	(9) A	(10) C
(11) C	(12) B	(13) D	(14) D	(15) C

二、 填空題: 本題考查基本知識和基本運算.每小題4**分, 滿分**20**分.**

(16) $x=3$ (17) 1 (18) $\sqrt{1-a}$

(19) $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ (20) $\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$

三、解答題

(21) 本小題考查利用有關三角公式並借助輔助角求三角函數式最小值的方法及運算能力. 滿分8分.

解: 因爲 $\sin 3x\sin^3 x+\cos 3x\cos^3 x$

$=(\sin 3x\sin x)\sin^2 x+(\cos 3x\cos x)\cos^2 x$

$=\frac{1}{2}[(\cos 2x-\cos 4x)\sin^2 x+(\cos 2x+\cos 4x))\cos^2 x]$

...... 3分

$= \frac{1}{2}[(\sin^2 x + \cos^2 x)\cos 2x$
$+(\cos^2 x - \sin^2 x)\cos 4x]$
$= \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 2x \cos 4x)$
$= \frac{1}{2}\cos 2x(1+\cos 4x)$
$= \cos^3 2x,$ 6分

所以 $y = \frac{\cos^3 2x}{\cos^2 2x} + \sin 2x$
$= \cos 2x + \sin 2x$
$= \sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$.

當 $\sin(2x+\frac{\pi}{4}) = -1$ 時,
y 取最小值$-\sqrt{2}$. 8分

(22) 本小題考查對數函數性質、平均值不等式等知識及推理論證的能力. 滿分10分.

解: $f(x_1)+f(x_2) = \lg x_1 + \lg x_2 = \lg(x_1x_2)$,
因爲 $x_1, x_2 \in R^+$,
所以 $x_1x_2 \le \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$
(當且僅當$x_1 = x_2$時取"="號).
...... 3分

由常用對數底大於1, 有
$\lg(x_1,x_2) \le \lg\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$,
...... 7分

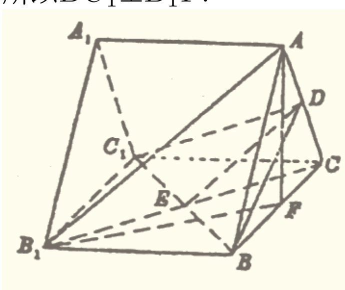
所以$\frac{1}{2}\lg(x_1x_2) \le \lg\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$,
$\frac{1}{2}(\lg x_1 + \lg x_2) \le \lg\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$,
即$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)] \le f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$
(當且僅當$x_1 = x_2$ 時取"="號).
[註] 將" $\le$(或$\ge$)"寫成" $<$(或$>$)", 扣1 分.

(23) 本小題考查空間線面關係, 正棱柱的性質, 空間想像能力和邏輯推理能力. 滿分10分.

(I) 證明:
因爲$A_1B_1C_1 - ABC$ 是正三棱柱,
所以 四邊形B_1BCC_1是矩形.
連結B_1C, 交BC_1於E,
則$B_1E = EC$. 連結 DE.
在$\triangle AB_1C$ 中,
因爲$AD = DC$,
所以$DE // AB_1$, ... 2分
又 $AB_1 \not\subset$平面DBC_1, $DE \subset$ 平面DBC_1,
所以$AB_1 //$平面DBC_1.
...... 4分

(II) 解: 作 $AF \perp BC$, 垂足爲 F. 因爲面 $ABC \perp$ 面 B_1BCC_1, 所以 $AF \perp$ 平面 B_1BCC_1. 連結 B_1F, 則 B_1F 是 AB_1 在平面 B_1BCC_1 內的射影.
...... 7分

因爲$BC_1 \perp AB_1$,
所以$BC_1 \perp B_1F$.



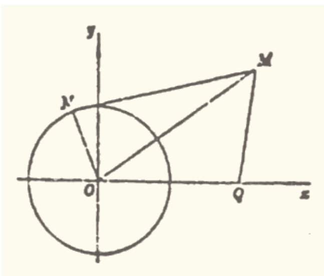
因爲 四邊形 B_1BCC_1是矩形.
所以$\angle B_1BF = \angle BCC_1 = 90°$,
又$\angle FB_1B = \angle C_1BC$,
所以$\triangle B_1BF \sim \triangle BCC_1$.

所以$\frac{B_1B}{BC}=\frac{BF}{CC_1}=\frac{BF}{B_1B}$.
又F爲正三角形 ABC 的 BC 邊中點,
因而 $B_1B^2=BF\cdot BC=1\times 2=2$,
於是 $B_1F^2=B_1B^2+BF^2=3$,
所以$B_1F=\sqrt{3}$.
即線段AB_1 在平面 B_1BCC_1 內的射影長爲 $\sqrt{3}$.

$\cdots\cdots$ 10分

(24) 本小題考查曲線與方程的關係, 軌跡的概念等解析幾何的基本思想以及綜合應用知識的能力. 滿分10分.

解:如圖, 設MN切圓於N, 則動點M組成的集合是



$$P=\{M\big||MN|=\sqrt{2}|MQ|\},$$

$\cdots\cdots$ 2 分

因爲圓的半徑$|ON|=1$,

所以 $|MN|^2=|MO|^2-|ON|^2$

$=|MO|^2-1.$ $\cdots\cdots$ 4 分

設點M的坐標爲(x,y), 則 $\sqrt{x^2+y^2-1}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x-2)^2+y^2}$. $\cdots$ 6分

整理得 $x^2+y^2-8x+9=0$. 經檢驗, 坐標適合這個方程的點都屬於集合P, 故這個方程爲所求的軌跡方程. $\cdots\cdots$ 8分

化方程爲$(x-4)^2+y^2=7$, 知它表示一個圓, 圓心坐標爲 (4,0), 半徑爲$\sqrt{7}$. $\cdots\cdots$ 10分

(25) 本小題考查等差數列的基礎知識, 數學歸納法及推理論證能力. 滿分12分.

證法一: 令$d=a_2-a_1$. 下面用數學歸納法證明

$$a_n=a_1+(n-1)d\quad (n\in N).$$

(1) 當 $n=1$ 時上述等式爲恆等式 $a_1=a_1$. 當 $n=2$時, $a_1+(2-1)d=a_1+(a_2-a_1)=a_2$, 等式成立. $\cdots\cdots$ 4分

(2) 假設當$n=k(k\geq 2)$時命題成立, $a_k=a_1+(k-1)d$. 由題設, 有 $S_k=\frac{k(a_1+a_k)}{2}$,

$$S_{k+1}=\frac{(k+1)(a_1+a_{k+1})}{2},$$

又 $S_{k+1}=S_k+a_{k+1}$, 所以 $\frac{(k+1)(a_1+a_{k+1})}{2}=\frac{k(a_1+a_k)}{2}+a_{k+1}$. $\cdots\cdots$ 8分

把 $a_k=a_1+(k-1)d$ 代入上式, 得 $(k+1)(a_1+a_{k+1})=2ka_1+k(k-1)d+2a_{k+1}$. 整理得$(k-1)a_{k+1}=(k-1)a_1+k(k-1)d$.

因爲$k\geq 2$,

所以$a_{k+1}=a_1+kd$.

即當 $n = k + 1$ 時等式成立. 由 (1) 和 (2), 等式對所有的自然數n成立, 從而$\{a_n\}$ 是等差數列. $\cdots\cdots$ 12分

證法二: 當$n \geq 2$ 時, 由題設, $S_{n-1} = \frac{(n-1)(a_1+a_{n-1})}{2}$, $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$.

所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n(a_1+a_n)}{2} - \frac{(n-1)(a_1+a_{n-1})}{2}$. ... 5分

同理有 $a_{n+1} = \frac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2} - \frac{n(a_1+a_n)}{2}$. ... 7分

從而 $a_{n+1}-a_n = \frac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2} - n(a_1 + a_n) + \frac{(n-1)(a_1+a_{n-1})}{2}$. $\cdots\cdots$10分

整理得 $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$ 對於任意 $n \geq 2$成立.

因此 $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} = \ldots = a_2 - a_1$, 從而 $\{a_n\}$ 是等差數列. ...... 12 分

數　學 (理工農醫類)

一、選擇題: **本大題共**15**小題**; **第**(1) – (10)**題每小題**3**分**. **第**(11) – (15)**題每小題**4**分**, **共**50**分**. **在每小題給出的四個選項中**, **只有一項是符合題目要求的**. **把所選項前的字母填在題後括號內**.

(1) 極坐標方程$\rho = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$ 所表示的曲線是

A. 雙曲線　B. 橢圓

C. 拋物線　D. 圓

(2) 如果方程 $x^2 + ky^2 = 2$ 表示焦點在y軸上的橢圓, 那麼實數k的取值範圍是

A. $(0, +\infty)$　B. $(0, 2)$

C. $(1, +\infty)$　D. $(0, 1)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n}{1+2+2^2+\ldots+2^n} =$

A. 0　B. $\frac{1}{2}$　C. 1　D. 2

(4) 設θ是第二象限的角, 則必有

A. $tg\frac{\theta}{2} > ctg\frac{\theta}{2}$　B. $tg\frac{\theta}{2} < ctg\frac{\theta}{2}$

C. $\sin\frac{\theta}{2} > \cos\frac{\theta}{2}$　D. $\sin\frac{\theta}{2} < \cos\frac{\theta}{2}$

(5) 若直線 $x+ay+2 = 0$ 和 $2x+3y+1 = 0$ 互相垂直, 則 $a =$

A. $-\frac{2}{3}$　B. $-\frac{3}{2}$　C. $\frac{2}{3}$　D. $\frac{3}{2}$

(6) 某種細菌在培養過程中, 每20分鐘分裂一次 (一個分裂爲兩個). 經過3小時, 這種細菌由1個可繁殖成

A. 511 個　B. 512個

C. 1023 個　D. 1024 個

(7) 在下列函數中, 以$\frac{\pi}{2}$ 爲周期的函數是

A. $y = \sin 2x + \cos 4x$

B. $y = \sin 2x \cos 4x$

C. $y = \sin 2x + \cos 2x$

D. $y = \sin 2x \cos 2x$

(8) 已知正六稜台的上、下底面邊長分別爲 2 和 4, 高爲 2, 則其體積爲

A. $32\sqrt{3}$ B. $28\sqrt{3}$

C. $24\sqrt{3}$ D. $20\sqrt{3}$

(9) 使 $(\sqrt{6}-\sqrt{2}i)^n$ 是純虛數的最小自然數 $n=$

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

(10) 有甲、乙、丙三項任務, 甲需 2 人承擔, 乙、丙各需 1 人承擔. 從 10 人中選派 4 人承擔這三項任務, 不同的選法共有

A. 1260 種 B. 2025種

C. 2520 種 D. 5054種

(11) 對於直線m、n和平面α、β, $\alpha\perp\beta$ 的一個充分條件是

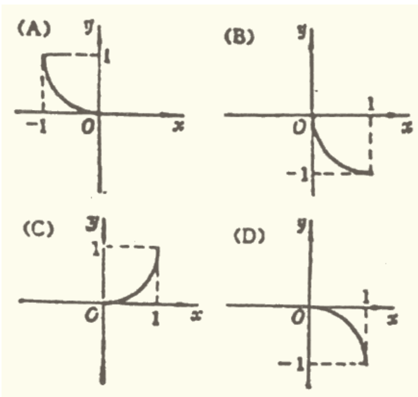
A. $m\perp n, m//\alpha, n//\beta$

B. $m\perp n, \alpha\cap\beta=m, n\subset\alpha$

C. $m//n, n\perp\beta, m\subset\alpha$

D. $m//n, m\perp\alpha, n\perp\beta$

(12) 設函數 $f(x)=1-\sqrt{1-x^2}(-1\le x\le 0)$, 則函數 $y=f^{-1}(x)$ 的圖象是



(13) 已知過球面上A、B、C 三點的截面和球心的距離等於球半徑的一半, 且 $AB=BC=CA=2$, 則球面面積是

A. $\frac{16}{9}\pi$ B. $\frac{8}{3}\pi$ C. 4π D. $\frac{64}{9}\pi$

(14) 函數 $y=\arccos(\sin x)\left(-\frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3}\right)$ 的值域是

A. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$ B. $\left[0,\frac{5\pi}{6}\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ D. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$

(15) 定義在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意函數 $f(x)$都可以表示成一個奇函數 $g(x)$ 和一個偶函數$h(x)$ 之和. 如果$f(x)=\lg(10^x+1), x\in(-\infty,+\infty)$, 那麼

A. $g(x)=x, h(x)=\lg(10^x+10^{-x}+2)$

B. $g(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)+x]$,

$h(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)-x]$

C. $g(x)=\frac{x}{2}, h(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}$

D. $g(x)=-\frac{x}{2}, h(x)=\lg(10^x+1)+\frac{x}{2}$

二、填空題: 本大題共5小題; 每小題4分, 共20分. 把答案填在題中橫線上.

(16) 抛物線$y^2=8-4x$的準線方程是___.

(17) 在$(x+m)^7(m\in N)$ 的展開式中, x^5的係數是x^6的係數與x^4的係數的等差中項, 則$m=$___.

(18)若$\frac{5}{4}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi, \sin 2\theta=a$, 則$\cos\theta-\sin\theta$的值是___.

(19) 設圓錐底面圓周上兩點A、B間的距離爲2, 圓錐頂點到直線AB的距離爲$\sqrt{3}$, AB和圓錐的軸的距離爲1, 則該圓錐的體積爲___.

(20) 在測量某物理量的過程中, 因儀器和觀察的誤差, 使得n次測量分別得到$a_1, a_2, \ldots,\ a_n$, 共n個數據. 我們規定所測量物理量的“最佳近似值”a是這樣一個量: 與其他近似值比較, a與各數據的差的平方和最小. 依此規定, 從$a_1, a_2, \ldots, a_n$推出的$a =$ ___.

三、解答題: 本大題共5小題; 共50分. 解答應寫出文字說明、證明過程或推演步驟.

(21) (**本小題滿分8分**)

已知$z = 1 + i$.

(I)設$\omega = z^2 + 3\bar{z} - 4$, 求$\omega$的三角形式;

(II) 如果$\frac{z^2+az+b}{z^2-z+1} = 1 - i$, 求實數$a, b$的值.

(22) (**本小題滿分10分**)

已知函數$f(x) = tgx,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 若$x_1, x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且$x_1 \neq x_2$, 證明

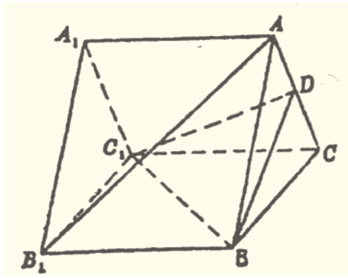
$$\frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)] > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

(23)(**本小題滿分10分**)

如圖, 已知 $A_1B_1C_1 - ABC$ 是正三棱柱, D 是 AC 中點.

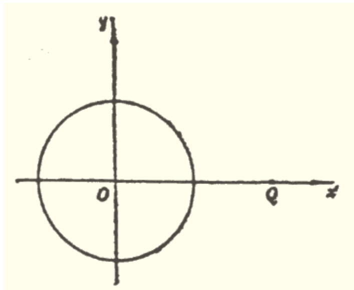
(I)證明$AB_1 // $平面$DBC_1$;

(II) 假設$AB_1 \perp BC_1$, 求以 BC_1 爲棱, DBC_1 與 CBC_1 爲二面角a的度數.



(24)(**本小題滿分10分**)

已知直角坐標平面上一點$Q(2, 0)$和圓$C: x^2 + y^2 = 1$, 動點M到圓C的切線長等於圓C的半徑與$|MQ|$的和. 求動點M的軌跡方程, 說明它表示什麼曲線, 並畫出草圖.



(25)(**本小題滿分12分**)

設$\{a_n\}$是正數組成的數列, 其前n項和爲S_n, 並且對於所有的自然數n, a_n與2的等差中項等於 S_n 與 2 的等比中項.

(I) 寫出數列$\{a_n\}$的前3項;

(II) 求數列$\{a_n\}$的通項公式 (寫出推證過程).

數學試題(理工農醫類) 參考答案及評分標準

一、選擇題: 本題考查基本知識和基本運算. 第 (1)-(10) 題每小題3分, 第 (11)-(15) 題每小題4分, 共50分.

(1)D	(2)D	(3) B	(4)A
(5)A	(6)B	(7) D	(8)B
(9)A	(10)C	(11) C	(12)B
(13)D	(14)B	(15) C	

二、 填空題: 本題考查基本知識和基本運算.每小題4分, 滿分20分.

(16) $x=3$ (17) 1

(18) $\sqrt{1-a}$ (19) $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

(20) $\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$

三、解答題

(21) 本小題考查共軛複數、複數的三角形式等基礎知識及運算能力. 滿分8分.

解:

(I) 由$z=1+i$, 有

$$\begin{aligned}\omega &= z^2+3\bar{z}-4\\ &= (1+i)^2+3\overline{(1+i)}-4\\ &= 2i+3(1-i)-4\\ &= -1-i,\end{aligned}$$

ω的三角形式是$\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$. 4分

(II) 由$z=1+i$, 有

$$\begin{aligned}\frac{z^2+az+b}{z^2-z+1} &= \frac{(1+i)^2+a(1+i)+b}{(1+i)^2-(1+i)+1}\\ &= \frac{(a+b)+(a+2)i}{i}\\ &= (a+2)-(a+b)i.\cdots 6\text{分}\end{aligned}$$

由題設條件知$(a+2)-(a+b)i=1-i$.

根據複數相等的定義, 得$\begin{cases}a+2=1,\\ -(a+b)=-1.\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-1,\\ b=2\end{cases}$ $\cdots\cdots$ 8分

(22) 本小題考查三角函數基礎知識、三角函數性質及推理論證的能力. 滿分10分.

證明:

$$\begin{aligned}\mathrm{tg}x_1+\mathrm{tg}x_2 &= \frac{\sin x_1}{\cos x_1}+\frac{\sin x_2}{\cos x_2}\\ &= \frac{\sin x_1\cos x_2+\cos x_1\sin x_2}{\cos x_1\cos x_2}\\ &= \frac{\sin(x_1+x_2)}{\cos x_1\cos x_2}\\ &= \frac{2\sin(x_1+x_2)}{\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)}.\cdots\cdots 5\text{分}\end{aligned}$$

因爲$x_1,x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right), x_1\neq x_2$,

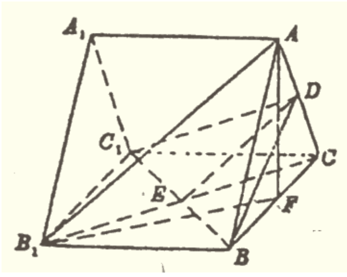
所以$2\sin(x_1+x_2)>0, \cos x_1\cos x_2>0$, 且 $0<\cos(x_1-x_2)<1$, 從而有 $0<\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)<1+\cos(x_1+x_2)$. $\cdots\cdots$ 7分

由此得 $tgx_1+tgx_2>\frac{2\sin(x_1+x_2)}{1+\cos(x_1+x_2)}$,

所以 $\frac{1}{2}(tgx_1+tgx_2)>tg\frac{x_1+x_2}{2}$,

即 $\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f(\frac{x_1+x_2}{2})$. $\cdots\cdots$ 10分

(23) 本小題考查空間線面關係, 正稜柱的性質, 空間想像能力和邏輯推理能力. 滿分10分.



(I) **證明**: 因爲$A_1B_1C_1-ABC$ 是正三稜柱, 所以 四邊形B_1BCC_1是矩形.

連結B_1C, 交BC_1於E, 則$B_1E = EC$. 連結 DE. 在$\triangle AB_1C$ 中,

因爲$AD = DC$,

所以$DE//AB_1$, ······ 2分

又 $AB_1 \not\subset$ 平面 DBC_1, $DE \subset$ 平面 DBC_1,

所以$AB_1//$平面DBC_1. ······ 4分

(II) **解**:作$DF \perp BC$,垂足爲F. 則$DF \perp$面B_1BCC_1.

連結EF, 則 EF 是 ED 在平面 B_1BCC_1 上的射影.

因爲$AB_1 \perp BC_1$,

由 (I) 知 $AB_1//DE$,

所以$DE \perp BC_1$, 從而$EF \perp BC_1$,

所以$\angle DEF$ 是二面角α的平面角. ··· 7分

設$AC = 1$ 則$DC = \frac{1}{2}$,

因爲$\triangle ABC$是正三角形,

所以在$\mathrm{Rt}\triangle DCF$ 中, $DF = DC \cdot \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $CF = DC \cdot \cos C = \frac{1}{4}$.

取BC中點G,

因爲$EB = EC$, 所以$EG \perp BC$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BEF$中, $EF^2 = BF \cdot GF$,

又 $BF = BC - FC = \frac{3}{4}, GF = \frac{1}{4}$,

所以$EF^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$, 即$EF = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

所以$tg\angle DEF = \frac{DF}{EF} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = 1$,

所以$\angle DEF = 45°$.

故二面角α 爲45°. ······ 10分

(24) 本小題考查曲線與方程的關係, 軌跡的概念等解析幾何的基本思想以及綜合運用知識的能力. 滿分10分.

解: 如圖, 設MN切圓於N, 又圓的半徑$|ON| = 1$,

$$\text{所以 } |OM|^2 = |MN|^2 + |ON|^2 = |MN|^2 + 1, \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

依題意, 動點M組成的集合爲

$P = \{M \big| |MN| = |MQ| + 1\} = \{M | \sqrt{|OM|^2 - 1} = |MQ| + 1\}$. ······4分

設點M的坐標爲(x, y), 則 $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} + 1$. ··· 6分

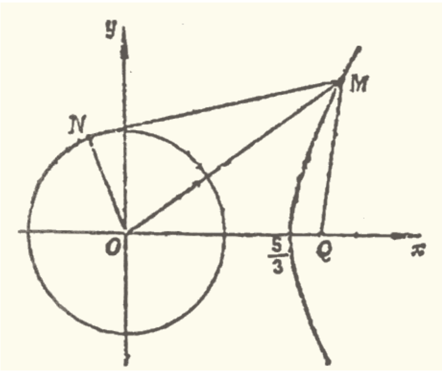
整理得 $2x - 3 = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \geq 0$, 即 $3x^2 - y^2 - 8x + 5 = 0\Big(x \geq \frac{3}{2}\Big)$.

經檢驗, 坐標適合這個方程的點都屬於集合P, 故這個方程爲所求的軌跡方程. $\cdots$ 8分

所求方程可化爲

$$\frac{(x-\frac{4}{3})^2}{\frac{1}{9}}-\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1\Big(x\geq\frac{3}{2}\Big).$$

它所表示的曲線是以點$(\frac{4}{3},0)$爲中心,



實軸在x軸上的雙曲線的右支, 頂點坐標爲$\Big(\frac{5}{3},0\Big)$. 如圖所示. $\cdots\cdots$ 10分

(25) 本小題考查等差數列、等比數列等基礎知識, 考查邏輯推理能力和分析問題與解決問題的能力. 滿分12分.

(I) **解**: 由題意, 當$n=1$ 時有

$$\frac{a_1+2}{2}=\sqrt{2S_1},\quad S_1=a_1,$$

$$所以\frac{a_1+2}{2}=\sqrt{2a_1},$$

解得 $a_1=2$. 當$n=2$時有

$$\frac{a_2+2}{2}=\sqrt{2S_2},\qquad S_2=a_1+a_2,$$

將$a_1=2$代入, 整理得 $(a_2-2)^2=16$,

由$a_2>0$, 解得 $a_2=6$.

當$n=3$時有

$$\frac{a_3+2}{2}=\sqrt{2S_3},\qquad S_3=a_1+a_2+a_3,$$

將$a_1=2$, $a_2=6$ 代入, 整理得

$$(a_3-2)^2=64,$$

由$a_3>0$, 解得 $a_3=10$. 故該數列的前3項爲2, 6, 10, $\cdots$ 4分

(II) **解法一**: 由(I) 猜想數列 $\{a_n\}$ 有通項公式 $a_n=4n-2$. 下面用數學歸納法證明數列 $\{a_n\}$ 的通項公式是 $a_n=4n-2\,(n\in N)$. $\cdots\cdots$ 6 分

(1) 當$n=1$時, 因爲$4\times1-2=2$, 又在 (I) 中已求出$a_1=2$, 所以上述結論成立. $\cdots\cdots$ 7 分

(2) 假設 $n=k$ 時結論成立, 即有$a_k=4k-2$. 由題意, 有$\frac{a_k+2}{2}=\sqrt{2S_k}$, 將$a_k=4k-2$代入上式, 得 $2k=\sqrt{2S_k}$, 解得 $S_k=2k^2$. 由題意, 有

$$\frac{a_{k+1}+2}{2}=\sqrt{2S_{k+1}},$$

$$S_{k+1}=S_k+a_{k+1},$$

將$S_k=2k^2$代入, 得

$$\Big(\frac{a_{k+1}+2}{2}\Big)^2=2(a_{k+1}+2k^2),$$

整理得 $a_{k+1}^2-4a_{k+1}+4-16k^2=0$. $\cdots\cdots$ 10分

由$a_{k+1}>0$, 解得 $a_{k+1}=2+4k$, 所以 $a_{k+1}=2+4k=$

$4(k+1)-2$. 這就是說, 當 $n=k+1$時, 上述結論成立. 根據 (1)、(2), 上述結論對所有的自然數n成立. ……12分

解法二: 由題意, 有

$$\frac{a_n+2}{2}=\sqrt{2S_n}(n\in N),$$

整理得 $S_n=\frac{1}{8}(a_n+2)^2$,

由此得 $S_{n+1}=\frac{1}{8}(a_{n+1}+2)^2$,

所以 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\frac{1}{8}[(a_{n+1}+2)^2-(a_n+2)^2]$, ……8分

整理得 $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-4)=0$, 由題意知 $a_{n+1}+a_n\neq 0$, 所以 $a_{n+1}-a_n=4$. 即數列$\{a_n\}$爲等差數列, 其中 $a_1=2$, 公差 $d=4$. 所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2+4(n-1)$, 即通項公式爲$a_n=4n-2$. ……12分