

八十三學年度大學聯考數學試題面面觀

林初堂

壹、前言

八十三學年度大學聯考各項作業業已逐漸完成，在此謹對試題做不同面向的討論，就教於有識。

我們大致是從下面幾個向度進行分析：

一、**認知層次**：以 George Bloom 在 1966 年所定的認知六層次操作型定義作為藍本，從學生解題觀點為準的解法下，逐題分為「知識、理解、應用、分析、綜合、評鑑」等六個層次。對每題的認定依據以解題過程中所牽涉到的最高認知活動為準。

二、**命題旨意**：主要在於以該題應該評量的能力，與試題實際上能評量出來的能力間的差異，細分為

1. **概念甄別力**：指對試題所考的概念能夠甄別理解的能力。我們只分析所考的概念內容別以及有無整合性。

(1) **實質概念**：指解題時實際要用到哪些數學概念。依現行教科書中的章節名稱為給定單位。

(2) **概念統整性**：指所考概念，在解題時是否牽涉不同範疇概念的統整性。依其統合及整合性分為下列三類：

A: 同範疇獨立概念。

B: 異範疇之獨立概念。

C: 異範疇，但概念之間彼此須有交互關係。

2. **計算能力**：指解題時除了甄別理解所考概念外，必須對式子有完整的計算能力。分為：

A: 定義、定理概念之測驗，無實際數值計算。

B: 直接代公式，簡單根式、分式、多項式在不超過三次，及整數的計算。

C: 較複雜之根式、分式、多項式在 4 次 (或 4 次以上)，未知元在三個以上。

D: 非直接代入之定理及方法之應用，如棣美弗定理的應用，數學歸納之演繹證明，線性規畫之計算，勘根定理等。

E: 能充份掌握及安排兩個或兩個以上 D 類上之方法或定理及計算順序，如牛頓法、Simpson 法等。

3. **邏輯建構能力**：指解題時除了甄別理解所測概念外，尚須測試之運用邏輯方面的分析及組織能力。在建構能力的分析方面，我們依

據解題流程中的「階段性目標」為單位，對每一階段之單位建構給以如下之分類：

- A: 毫無建構行為。
- B: 單純的循序行為，但不含其他如 C、D、E 類者。
- C: 判斷，在解題建構過程中牽涉多種解題途徑，而適切的選擇，足以使往後的解題工作順利執行。
- D: 遞迴，解題時須能建構遞迴關係以供解題者。(幾條直線可以切割平面為若干區域問題)

E: 迴圈，在解題過程中，須反覆檢核每一過程與結論之關係者。(如 Simpson 法之證明)

三、數學方法：試題是否真正抓住在整個理論系統中的核心方法，而不僅止於附屬過程中的一部份。

四、落點分析：考題內容在現行高中數學教材中所在章冊。

貳、試題分析

八十三學年度大學聯考自然組數學試題分析總整理表

題號	配分	冊-章	實質概念	概念統整	計算能力	邏輯能力	認知層次
[一]	10	2-2	簡易三角測量	A	B	B	理解
[二]	10	2-1 5-4	對數函數圖形、 切線方程式	B	B	B	應用
填 1	5	1-4	一元二次函數	A	B	A	知識
填 2	10	5-3	一元二次函數積分	B	B	C	理解
填 3	10	5-2	切線方程式	A	B	B	理解
填 4	10	6-2	矩陣乘法、 三角和差公式	B	A	A	知識
填 5	5	4-1	環狀排列	A	A	B	理解
填 6	10	4-1 4-2	組合、機率	B	A	C	理解
計二	10	2-1	對數基本運算	A	B	B	理解
計三	10	3-1	空間平面、直線	B	B	B	理解
計四	10	5-2 2-4	切線方程式、 二元二次方程組	B	B	C	理解

(註：理科數學上、下冊分別以5、6表示。)

根據上表統計出

分析、綜合、評鑑三層次均為 0 分

一、實質概念：

- | | |
|-------------|-------|
| (1) 一元二次函數 | 占 10分 |
| (2) 對數 | 占 17分 |
| (3) 三角 | 占 15分 |
| (4) 空間概念 | 占 10分 |
| (5) 排列組合與機率 | 占 15分 |
| (6) 微分 | 占 23分 |
| (7) 積分 | 占 5分 |
| (8) 矩陣 | 占 5分 |

二、概念統整性：

- A 級占 40 分
- B 級占 60 分
- C 級占 0 分

三、完整計算能力：

- A 級占 25 分
- B 級占 75 分
- C 級、D 級、E 級均為 0 分

四、邏輯建構能力：

- A 級占 15 分
- B 級占 55 分
- C 級占 30 分
- D 級、E 級均為 0 分

五、認知層次：

- 中下級認知層次(知識、理解)占 94 分
- 應用層次占 6 分

參、討論

一、從上述分項整理，我們發現這是一份「偏頗」的試題。先從實質概念來看。

以對數配分為例，共配了 17 分，經更精細的觀察，這 17 分完全沒有與其他範疇概念有實際統合之處，而且就完整計算能力言，也僅停留在初級的計算，又邏輯建構能力亦未超過簡單的循序建構。再以「微分」為例，共配了 23 分，但卻完全落在切線這一點上，無論從「認知」層次、「觀念統整性」、「完整計算能力」、「邏輯建構能力」上幾乎都是中下級的水平。復以三角而言，占 15 分其中除了死背一個和角公式外，不見任何由國中概念延伸至高中概念的過程及方法。由表中亦可看出各分項分析均屬中下水平。以上三例，共占 55 分。此為其偏頗之一。

從概念統整性、完整計算能力、邏輯建構能力來看，這份試題的特點在於每一題目幾乎都僅考到某單一理論體系的開頭，就停止不前了。解題僅須用到少許的定義、知識及簡單代數運算即可，根本無法進入一個理論的中心思想、精華所在，就無法測知學生分析、綜合、評鑑的能力。反之，這份試卷在「說服」學生「不要放棄數學、幫助拿分數」方面，蠻具肯定積極的作用，高標 57 分就是明證。唯其如此，這一份試題對於數學能力優異的學生來說，絕難與中下能力的學生鑑別。此為其偏頗之二。

另外，從解題中所使用的數學方法來看，沒有突出「重要的數學方法」以測知推理思考活用綜合能力，只強調到局部機械式的操作熟練度。再以對數為例，如果出如下這題

$$\text{求 } \sqrt[7]{\frac{36.5^3}{19.94^5 \times 3612^4}} \text{ 的近似值}$$

則在解題過程中就必須把對數的基本運算性質都用上，並且也使用了對數表(隱含函數圖形的概念)，也讓學生體會到當初發明對數的主要用途，即「化乘除為加減」。微分方面也只有考到切線方程式，三角學更只有國中層次的內容，有關尋求三角函數性質的方法卻沒有評量。此為其偏頗之三。

二、命題技巧方面，有以下值得討論的：

1. 選擇第7題與教科書第2冊第1章習題1-6第7題雷同，作為自然組的一個考題是否恰當？雖然其立意是作為後兩題的前導，但簡單更換數據應不是難事。此外，本題傾向於鼓勵考生用圖形法解題，而圖形法並不是一個具一般性的系統方法，若能改而強調數值方法中亦相當重要的迭代法，才不致使高中教學方向偏向特殊解題方法。命題先生切莫罔顧「升學領導教學」的事實。
2. 填充第1題可純粹硬套公式解出，完全不須知其所以然，如果改成 $ax^2 - 2ax + 3 \geq 0$ 便能測出考生有無真正了解此部份內容。

3. 填充第4題到底評量考生的什麼能力，值得配給10分嗎？我們實在難以猜測。不出完全公式化題目才容易達到「鑑別取材」的目的。
4. 計算第四題中 Γ_1 是兩條相交直線，不是一般常態的圓錐曲線。我們考慮曲線的切線是為瞭解曲線在某點附近的最佳線性近似。 $1+2+3+\dots+10$ 還須要估計它的整數部份嗎？如果須要的話，那直線本身的最佳線性近似為何，確實也就值得探討了。對於那些看出是兩條相交直線的考生來說，其中屬於中上程度者卻會難於下手，反觀那些直接套公式的中下程度考生，可能自始至終都未注意到是兩條相交直線卻順利拿到分數，本題的鑑別力也就值得商榷了。
5. 選目安排我也想說一句話。對於升大學的學生，我們無須評量他對選目的謹慎細心與否，所以選目的答案是數值時宜依大小次序排列。順便就社會組選擇第1題的提問技巧討論，該題的答案 $\cos 2\theta$ 與作出前半段的答案 $\sin \theta$ 均為 $1/2$ 實在沒有辦法從考生答案中判別到底是只做了前半還是確實得出答案了。
6. 社會組填充第2題有必要考到第五項嗎？其實只要前三項就能把題旨完全掌握住了。就算需要考到第五項，也沒有必要使用 Σ 的符號，因為這樣會導致部份考生將求和的上限誤為而求無窮等比級數的和。

7. 社會組計算第三題的圖形不僅示意而且也顯示了正確的比例，可以直接看出 k 值，誤導學生解題方法。本題的解答不下十種，很難要求評分的一致性。本題到底是在評量考生的什麼數學概念、方法？實難猜測。

肆、結語

觀察一般媒體對於大學聯考數學試題的報導，大多集中在「試題簡單化」、「鼓勵考生」的方面，常可耳聞「本次數學科分數可望再次提高」。不過從另一個角度來看，大學聯考的目的是在評量考生對於高中課程的吸收程度、並預見考生是否能夠適應大學程度的學習，所以對考生程度的鑑別力才是命題先生們應該努力的目標。數學科配分 100 分即代表數學受到了 100 分的重視，命題者應該要尊重這 100 分的命題空間；如今若是數學科分數

一再拉高造成 100 分的數學命題空間只剩下 60 分的鑑別效果，豈不是數學自貶身價嗎？

更甚者，此份考題對於那些本著正常教學、學習，努力探討數學觀念來龍去脈，積極培養綜合、歸納、推理、思考能力，重視理論架構、連貫性及整體性的師生們，不但沒有達到鼓勵作用，反而打擊他們的努力，連剩下 60 分的鑑別效果都被用來鑑別「背多分」的學生，這似乎是本末倒置的作法。

媒體對於數學科試題強調分數提高的重要性，但對於其他科試題卻高喊提高鑑別度的口號。請命題先生們不要受役於媒體，反而要積極地導正媒體視聽，這才是全國考生之福。

感謝同仁李瑞先生提供部份資料。

—本文作者目前任教於建國中學—