圓周鋪不滿平面, 卻能充填整個空間

王爾山

本文將向高中及大學非數學專業學生介紹十年前的一項數學發現: 圓周不能鋪滿平面, 卻能填滿整個空間。

一. 鋪填問題

鋪填問題說的是用圓周充填平面和空間的問題。讀者可能會想, 這還不是很簡單的嗎? 只要拼命推上去, 總會填滿的。比方說要用圓周鋪填一個平面, 只需過平面上的每一點, 都作一個圓 (見圖1), 不就填滿了嗎?

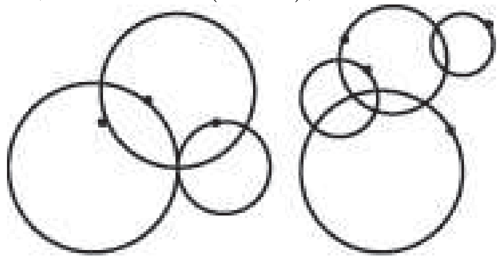

圖1

不錯, 如果沒有任何規則, 只是亂七八糟地堆砌, 那麼鋪填問題也就不成其爲問題了。事實上, 在數學上用圓周鋪填平面和空間, 必須遵守兩個原則:

1. 空間或平面被填滿, 意即在空間中或在平面上的每一個點都有一個圓周經過;

2. 圓周之間無粘連相交, 意即任何兩個圓周不得相交, 亦即每一個點只屬於一個圓周。

明瞭了規則, 就不難看出如圖1所示的做法是犯規的。

二. 圓周鋪不滿平面

數學家們早就知道圓周無法鋪滿平面。這是爲什麼呢?

設想有人宣稱他已經用圓周鋪滿平面。我們用下面的方法必定能找出其中的破綻。

請他在“鋪滿”平面的圓周中, 任意地取出一個, 記作C_o。設C_o的直徑是D, 圓心是a_1。既然圓周“鋪滿”了平面, 就一定有一個經過a_1的圓周, 把它記作C_1。C_1的直徑肯定比C_0的直徑D的一半還要小, 否則C_1與C_0相交。設C_1的圓心是a_2, 再把經過a_2的圓周叫做C_2。根據同樣道理, C_2的直徑比C_1的一半還要小。

設C_2的圓心是a_3, 再將經過a_3的圓周記作 C_3。如此一次一次做下去, 就會得到一組圓周 $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_k, \ldots$, 它們有兩個性質 (見圖2):

(1) 一個套住一個: C_0套住C_1, C_1套住$C_2, \ldots, C_k$套住$C_{k+1}, \ldots$;

(2) 後一個的直徑比前一個的直徑的一半還要小, 因此C_k的直徑小於$D/2^k$。

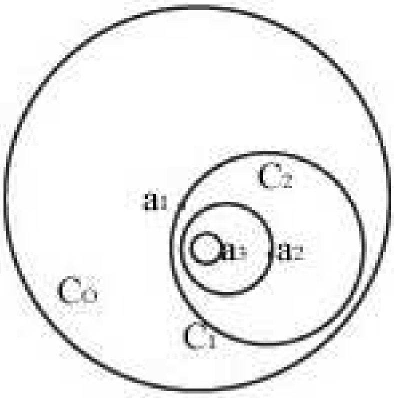

圖2

這樣的一組急劇縮小的圓周最後將套住一個點a。我們要証明a就是他的破綻: 沒有一個圓周經過a點!

理由何在? 假若有經過a的圓周c, 設它的直徑爲d。當然有$d > 0$, 否則C不是圓周。注意當k增大時$D/2^k$對半對半地減小, 且越來越接近0。於是我們總可以找到一個k, 使得$D/2^k < d$。這時, 既要使C_k套住C, 又要令C_k的直徑小於d, 除非犯規, 否則是辨不到的。所以a沒有被圓周鋪住, 也就是說, 圓周沒有鋪滿平面。

問題就出在一個點上。 有趣的是, 平面不能用圓周鋪滿。但挖去一個點的平面卻可以很輕易地被圓周鋪滿。如圖三所示, 所有互不相交的同心圓周, 把挖去圓心這一點的平面鋪滿了。

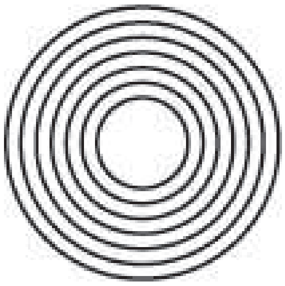

圖3

三. 試試用球面填空間

下面考慮的是, 怎樣用圓周填滿空間。在解決這一問題之前, 我們先試試能否用球面填滿空間。

在空間中隨意固定一個點記作O。以O爲球心的所有同心球面, 差一點就把空間塡滿了。所差的一點就是O本身, 如果能夠把O去掉, 那該多好!

不過, 即使用球面塡滿了空間, 還要考慮怎樣用圓周塡滿球面。設想在球面上畫出緯線, 所有緯線"差兩點"就把球面塡滿了 (見圖4)。這兩點可以看作是南極和北極。

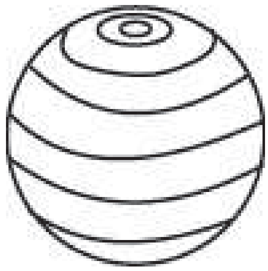

圖4

用圓周塡球面, 就差了兩個點。事實上, 只要在球面上任意挖掉兩點, 這兩點不必是南極和北極, 我們就可以用圓周鋪滿這個球面。例如: 設挖掉的兩點是u和v, 過u,v分別作球面的切平面。如果兩個切平面平行, 那

麼把u當北極, v當南極, 所有緯線可填滿挖去u, v兩點的球面。如果兩切平面不平行 (圖5), 它們就相交於一條直線。那麼過這條直線且夾在兩個切平面之間的任何平面, 與球面均可相交成圓周。所有這些圓周互不粘連, 且把挖掉u,v兩點的球面填滿了 (圖6)。

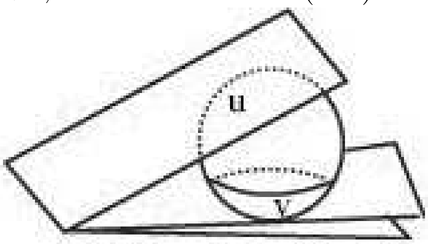

圖5

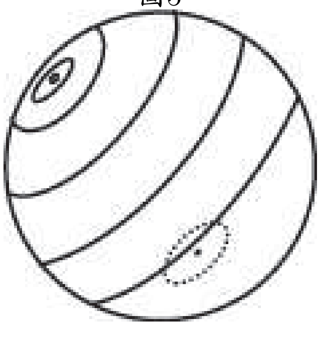

圖6

四. 借用一直線, 圓周即可充填空間

從前分析可以知道, 若去掉經過O點的直線, 則以O爲球心的挖掉兩個點的同心球面, 可以填滿餘下的整個空間。這些缺少兩個點的球面, 都可以如上 所述分割成互不相交的圓周。將所有這些缺少兩個點的球面上的圓周算在一起, 我們就知道, 借用一條直線, 或者說空間中去掉一條直線, 就可以用圓周充填餘下的空間。圖7 就是這種充填方式的側視示意圖。

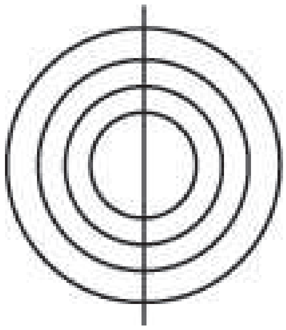

圖7

照理說, 那一條直線可以看作是半徑無窮大的圓周。這樣, 用圓周充填空間的問題似乎也得到一種答案。可惜, 這樣勉強交差講不過去。事實上, 如果直線可以看作是圓周, 平面鋪填和空間充填問題也就未免太簡單了。

五. 圓周巧填空間

用球面填充空間和用圓周填充球面的嘗試, 表明不能圓滿地解決問題, 它們不是差一點, 就是差兩點。然而, 失敗往往孕育著成功。因爲我們知道了所有同心球面可以填滿挖去球心的空間, 被任意挖掉兩點的球面可以用圓周填滿。正是在這個基礎上, 瑞典斯德哥爾摩大學數學系的舒爾金 (Andrzej Szulkin) 設計了一種巧妙的方法, 從每個同心球面上挖掉兩個點, 這些點與同心球心O一起, 恰好填成一個個無粘連相交的且半徑都等於1的小圓周, 而每個被挖掉兩點的球面又都可用圓周填滿。這樣整個空間就被圓周填滿了!

舒爾金是怎麼做到的呢? 圖 8 是側視示意圖: 過同心球面的球心O作一個平面, 在這個平面上過O畫一條直線, 把這條直線看作是以0爲原點的數軸。以數軸上的坐

標爲$1, 5, 9, 13, \ldots$ 和$-3, -7, -11, \ldots$ 即$4m+1, m=0, \pm 1, \ldots$ 的點爲圓心, 在平面上作出一串半徑爲1的圓周, 那麼空間裡每個以O爲球心的球面都與小圓周相交於兩點。它們或者是一個球面與某一個小圓周相交於兩點 (如圖 8 中C和C'那樣的球面), 或者是一個球面與小圓周在數軸上相交 (如圖 8 中A,B那樣的球面)。此時, 該球面若與一個小圓周的左端點相交, 則它必定還與另一個小圓周的右端點相交。這樣, 所有的同心球面就都被挖掉兩點, 於是我們由第三部分可知這些球面均可以被圓周填滿; 而挖掉的所有的點恰好與O(同心球心) 一起, 填成上述以數軸上的坐標爲$4m+1, m=0, \pm 1, \ldots$的點爲圓心的半徑都是1的小圓周。

至此, 用圓周填滿空間的問題就圓滿解決了。

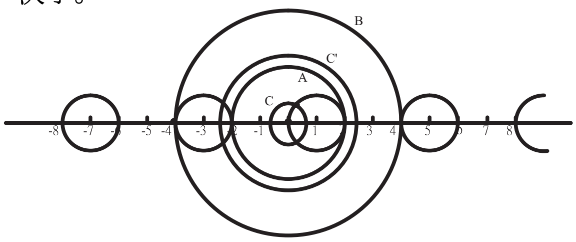

圖8

參考文獻

1. Andrzej Szulkin: R^3 is the union of disjoint circles, Amer. Math. Monthly, 90(1983):9, 640-641。

—本文作者1994年夏畢業於廣州中山大學信息系—