三角形的內切橢圓

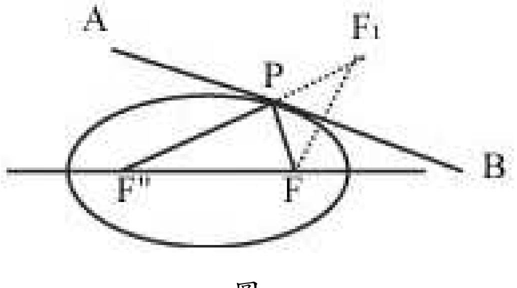
何聖宗·賴堯暉

我們以前學過一些圓的切線的性質, 例如: 過圓外一點與圓相切的兩線段必等長, 三角形的內切圓唯一存在, 而且我們知道如何去找它。圓可當作橢圓的特例, 如果考慮三角形的內切橢圓, 會有那些性質呢? 例如: 是否唯一 (因爲圓是橢圓的特例, 故已知存在)? 如何去找它?

我們知道圓是平面上與某定點距離爲定值之所有點的軌跡, 而橢圓則是平面上與某兩定點距離和爲定值之所有點的軌跡, 此二點稱爲橢圓的焦點。因此橢圓完全由二焦點及其上一點來決定, 顯然在橢圓的討論中, 焦點扮演了很重要的角色。

首先, 我們想要了解橢圓切線的基本性質, 特別是它和圓的切線所具有的性質可以做何比較。我們發覺在文獻上有關此問題的討論並不多, 較重要的性質有:

1. 橢圓之任意切線與過切點的兩焦半徑所夾銳角相等。



圖一

這個性質就是 「圓的切線與過其切點之圓的直徑互相垂直」 之性質的推廣。此性質一般書上都有證明, 我們可以簡單這樣看: 直線AB與橢圓的切點P 是此直線上與焦點F, F'距離和爲最小的點, 若以F_1表F對直線AB的對稱點, 則由距離和爲最小的性質得知$F'PF_1$ 爲一直線, 所以$\angle APF' = \angle F_1PB = \angle FPB$ (因爲PB垂直平分$\overline{FF_1}$)。

2. P爲橢圓外一點, 自P作橢圓的二條切線切橢圓於A, B, F, F' 爲橢圓之兩焦點, 則 $\angle APF' = \angle BPF$。

對應於圓的情形: 圓O外一點P作圓的二切線與$\overline{OP}$所夾之角相等。此性質與後面的討論無關, 故省略其證明。

如果給定一直線L及直線外一點P, 則我們就知道如何以P爲圓心作一圓與L 相切, 類似的性質在橢圓的情形也成立:

3. 給定兩相異點 F, F' 及一直線 L, 且線段 $\overline{FF'}$ 與L不相交, 則恰有一橢圓以F, F'爲焦點且與L相切。

這個性質的證明可以這樣解釋: 令P點爲L上與F, F' 距離之和爲最小的點 (只要取 F 對 L 的對稱點F_1, 連接$F'F_1$

與 L 的交點即為P), 則以F, F'為焦點且過P之橢圓Γ即為所求。由P點的選取知L只與Γ在P相交, 故P為切點。

由於書上討論的不多, 我們從最基本的性質開始:

給定一個焦點為F, F'的橢圓Γ, 我們可以選擇坐標系, 以連線FF'為x軸, $\overline{FF'}$的中垂線為y軸, 則在此坐標系下Γ可以表示成 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。而$\Gamma$上任意點可表示為$(a\cos\theta, b\sin\theta)$且 $0\le\theta<2\pi$, 設過橢圓Γ上一點$(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 的切線方程式為$y-b\sin\theta=m(x-a\cos\theta)$, 將此式代入橢圓的方程式得

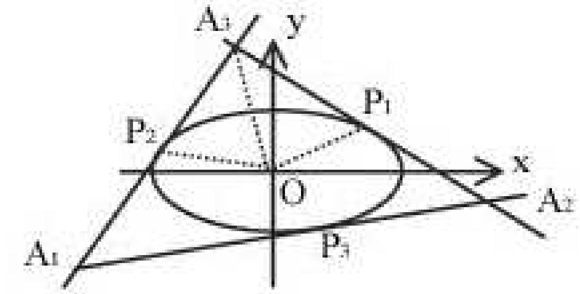
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(m(x-a\cos\theta)+b\sin\theta)^2}{b^2}=1,$$

化簡此式得

$$\begin{aligned}
& b^2x^2+a^2m^2(x^2+a^2\cos^2\theta-2ax\cos\theta) \\
& +a^2b^2\sin^2\theta+2a^2bm\sin\theta(x-a\cos\theta) \\
= \; & a^2b^2, \text{ 由根與係數的關係} \\
\Rightarrow \; & \frac{a^3m^2\cos\theta-a^2bm\sin\theta}{a^2m^2+b^2}=a\cos\theta \\
& (\text{因}a\cos\theta\text{是上式的唯一解}) \\
\Rightarrow \; & -a^2bm\sin\theta=ab^2\cos\theta \\
\Rightarrow \; & m=-\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta},
\end{aligned}$$

故切線方程式為$a\sin\theta y+b\cos\theta x=ab$

設$P_1(a\cos\theta_1, b\sin\theta_1)$, $P_2(a\cos\theta_2, b\sin\theta_2)$, $P_3(a\cos\theta_3, b\sin\theta_3)$為橢圓上三個相異點, 且過$P_1, P_2, P_3$ 之切線兩兩相交於A_3, A_1, A_2



圖二

(如圖二)。可設$0\le\theta_1<\theta_2<\theta_3<2\pi$, 且相鄰兩者之差小於$\pi$。以$L_1, L_2, L_3$分別表過$P_1, P_2, P_3$ 與橢圓相切的直線, 則其方程式分別為

$$\begin{aligned}
L_1: a\sin\theta_1 y+b\cos\theta_1 x &= ab \\
L_2: a\sin\theta_2 y+b\cos\theta_2 x &= ab \\
L_3: a\sin\theta_3 y+b\cos\theta_3 x &= ab
\end{aligned}$$

設L_1, L_2的交點為$A_3(x_3, y_3)$, 則

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{\begin{vmatrix} ab & a\sin\theta_1 \\ ab & a\sin\theta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b\cos\theta_1 & a\sin\theta_1 \\ b\cos\theta_2 & a\sin\theta_2 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{a(\sin\theta_2-\sin\theta_1)}{\sin\theta_2\cos\theta_1-\sin\theta_1\cos\theta_2} \\
&= \frac{a(\sin\theta_2-\sin\theta_1)}{\sin(\theta_2-\theta_1)} \\
y_3 &= \frac{\begin{vmatrix} ab & b\cos\theta_1 \\ ab & b\cos\theta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a\sin\theta_1 & b\cos\theta_1 \\ a\sin\theta_2 & b\cos\theta_2 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{b(\cos\theta_2-\cos\theta_1)}{\sin\theta_2\cos\theta_1-\sin\theta_1\cos\theta_2} \\
&= \frac{b(\cos\theta_1-\cos\theta_2)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}
\end{aligned}$$

同理, L_2, L_3的交點爲

$$A_1\left(\frac{a(\sin\theta_3-\sin\theta_2)}{\sin(\theta_3-\theta_2)},\frac{b(\cos\theta_2-\cos\theta_3)}{\sin(\theta_3-\theta_2)}\right),$$

L_3, L_1的交點爲

$$A_2\left(\frac{a(\sin\theta_1-\sin\theta_3)}{\sin(\theta_1-\theta_3)},\frac{b(\cos\theta_3-\cos\theta_1)}{\sin(\theta_1-\theta_3)}\right)。$$

由圖二, $\triangle OA_3P_2$之面積爲

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left|\frac{b}{\sin\theta_2}\left(\frac{a(\sin\theta_2-\sin\theta_1)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}-a\cos\theta_2\right)\right|\\
=&\ \frac{ab}{2}\left|\frac{1}{\sin\theta_2}\cdot\frac{A}{\sin(\theta_2-\theta_1)}\right|\\
&(\text{其中 } A=\sin\theta_2-\sin\theta_1-\sin\theta_2\cos\theta_1\cos\theta_2\\
&\qquad+\sin\theta_1\cos^2\theta_2)\\
=&\ \frac{ab}{2}\left|\frac{B}{\sin\theta_2\sin(\theta_2-\theta_1)}\right|\\
&(\text{其中 } B=\sin\theta_2-\sin\theta_1(1-\cos^2\theta_2)\\
&\qquad-\sin\theta_2\cos\theta_1\cos\theta_2)\\
=&\ \frac{ab}{2}\left|\frac{1-\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_2-\theta_1)}\right|\\
=&\ \frac{ab}{2}\left|\frac{1-\cos(\theta_2-\theta_1)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}\right|
\end{aligned}$$

在以上計算過程中, 我們假設了$\theta_2\neq\pi$, 但在$\theta_2=\pi$時, 由圖一可知$\triangle OA_3P_2$之面積爲$\frac{ab}{2}\left|\frac{1+\cos\theta_1}{\sin\theta_1}\right|$, 故上述面積公式依然成立。同理, 在$\theta_1\neq\frac{\pi}{2}$時$\triangle OA_3P_1$面積爲

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left|\frac{a}{\cos\theta_1}\left(\frac{b(\cos\theta_1-\cos\theta_2)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}-b\sin\theta_1\right)\right|\\
=&\ \frac{ab}{2}\left|\frac{1-\cos(\theta_2-\theta_1)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}\right|
\end{aligned}$$

而在$\theta_1=\frac{\pi}{2}$時$\triangle OA_3P_1$之面積爲$\frac{ab}{2}\left|\frac{1-\sin\theta_2}{\cos\theta_2}\right|$, 故上述公式在此情形依然成立。因此我們得到

定理一: 自橢圓外一點作兩切線與橢圓中心所成之兩三角形面積相等。

利用此定理, 我們可以證明

定理二: 三角形內切橢圓在各邊之切點將三邊所分線段比值之乘積爲1。

證明: 由圖二, $\triangle OA_1P_2$之面積$=\triangle OA_1P_3$之面積$=\alpha$, $\triangle OA_3P_2$之面積$=\triangle OA_3P_1$之面積$=\beta$, $\triangle OA_2P_3$之面積$=\triangle OA_2P_1$之面積$=\gamma$, 則

$$\frac{\overline{A_1P_2}}{\overline{P_2A_3}}\times\frac{\overline{A_3P_1}}{\overline{P_1A_2}}\times\frac{\overline{A_2P_3}}{\overline{P_3A_1}}=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\gamma}\times\frac{\gamma}{\alpha}=1$$

根據西瓦定理, $\overline{A_1P_1},\overline{A_2P_2},\overline{A_3P_3}$ 交於三角形內一點, 則一個很自然的問題是: 此交點是否爲橢圓中心? 在一般情形下, 這是不對的。事實上, 我們發現了下述定理。

定理三: 三角形各頂點與內切橢圓在對邊上之切點的連線交於橢圓中心$\Leftrightarrow$ 切點均爲中點。

證明:若橢圓中心$(0,0)$在$\overline{A_1P_1}$上, 則$\overline{A_1P_1}$之斜率滿足

$$\begin{aligned}
&-\frac{b\sin\theta_1}{a\cos\theta_1}=\frac{b(\cos\theta_2-\cos\theta_3)}{a(\sin\theta_3-\sin\theta_2)}\\
\Rightarrow\ &-\sin\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_3\\
&=\cos\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\cos\theta_3\\
\Rightarrow\ &\cos(\theta_1-\theta_2)=\cos(\theta_1-\theta_3)\\
\Rightarrow\ &|\sin(\theta_1-\theta_2)|=|\sin(\theta_1-\theta_3)|
\end{aligned}$$

同理, 若$\overline{A_3P_3}$過$(0,0)$, 則

$$\begin{aligned}
&\cos(\theta_2-\theta_3)=\cos(\theta_1-\theta_3)\\
=\ &\cos(\theta_1-\theta_2)\Rightarrow|\sin(\theta_2-\theta_3)|\\
=\ &\sin(\theta_1-\theta_3)=|\sin(\theta_1-\theta_2)|
\end{aligned}$$

此時,

$$\begin{aligned} & \triangle OP_1A_3\text{之面積} \\ = & \frac{ab}{2}\left|\frac{1-\cos(\theta_2-\theta_1)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}\right| \\ = & \frac{ab}{2}\left|\frac{1-\cos(\theta_1-\theta_3)}{\sin(\theta_1-\theta_3)}\right| \\ = & \triangle OP_1A_2\text{之面積}, \end{aligned}$$

故$\overline{A_2P_1}=\overline{A_3P_1}$, P_1爲中點。

同理, P_2, P_3亦分別爲$\overline{A_3A_1}$, $\overline{A_1A_2}$ 之中點。

反之, 若P_1是$\overline{A_2A_3}$的中點, 則$\triangle A_1P_1A_2$與$\triangle A_1P_1A_3$面積相等, 且$\triangle OP_1A_2$ 與 $\triangle OP_1A_3$ 面積相等。由定理一及上式得知 $\triangle OA_1A_2$ 與$\triangle OA_1A_3$等面積, 故O 必在$\overline{A_1P_1}$上。因此當 P_1, P_2, P_3均爲中點時, 三角形各頂點與內切橢圓在對邊上之切點的連線交於橢圓中心。換言之, 定理三之逆命題成立。

現在讓我們來看看: 當P_1, P_2, P_3爲三邊中點時, 我們已設

$$\begin{aligned} & 0\le\theta_1<\theta_2<\theta_3<2\pi, \\ \text{且}\quad & 0<\theta_2-\theta_1, \theta_3-\theta_2<\pi, \end{aligned}$$

由於

$$\begin{aligned} \cos(\theta_2-\theta_1) &= \cos(\theta_3-\theta_2) \\ &= \cos(\theta_3-\theta_1), \end{aligned}$$

我們得到

$$\begin{aligned} \theta_2-\theta_1 &= \theta_3-\theta_2 \\ &= 2\pi-(\theta_3-\theta_1), \end{aligned}$$

所以均爲$\frac{2}{3}\pi$, 因此得知

$$\begin{aligned} & \cos(\theta_2-\theta_1)=\cos(\theta_3-\theta_2) \\ = & \cos(\theta_1-\theta_3)=-\frac{1}{2}, \sin(\theta_2-\theta_1) \\ = & \sin(\theta_3-\theta_2)=\sin(\theta_1-\theta_3)=\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

因此A_1之坐標爲

$$\begin{aligned} & \Big(\frac{2a}{\sqrt{3}}(\sin(\theta_1+\frac{4}{3}\pi)-\sin(\theta_1+\frac{2}{3}\pi)), \\ & \quad \frac{2b}{\sqrt{3}}(\cos(\theta_1+\frac{2}{3}\pi)-\cos(\theta_1+\frac{4}{3}\pi))\Big) \\ = & (-2a\cos\theta_1, -2b\sin\theta_1), \end{aligned}$$

同理, A_2之坐標爲

$$\begin{aligned} & \Big(\frac{2a}{\sqrt{3}}(\sin\theta_1-\sin(\theta_1+\frac{4}{3}\pi)), \\ & \quad \frac{2b}{\sqrt{3}}(\cos(\theta_1+\frac{4}{3}\pi)-\cos\theta_1)\Big) \\ = & (a(\sqrt{3}\sin\theta_1+\cos\theta_1), b(\sin\theta_1-\sqrt{3}\cos\theta_1)); \end{aligned}$$

A_3之 坐標爲

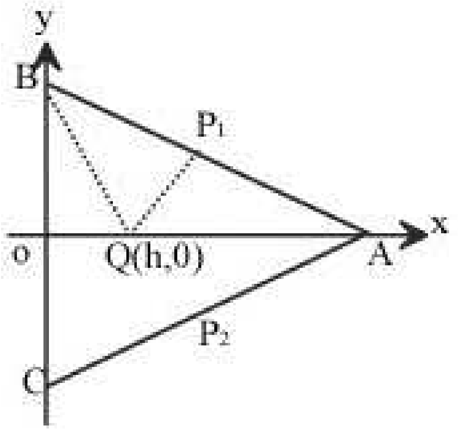
$$\begin{aligned} & \Big(\frac{2a}{\sqrt{3}}(\sin(\theta_1+\frac{2}{3}\pi)-\sin\theta_1), \\ & \quad \frac{2b}{\sqrt{3}}(\cos\theta_1-\cos(\theta_1+\frac{2}{3}\pi))\Big) \\ = & (a(\cos\theta_1-\sqrt{3}\sin\theta_1), b(\sqrt{3}\cos\theta_1+\sin\theta_1))\text{。} \end{aligned}$$

這些式子將在後面用到, 既然剛剛證明了定理三, 現在就順便計算出來。

其次, 一個很有趣的問題是: 定理二之逆敍述是否成立? 換言之, 給三角形三邊上三個分點使所分線段比值之乘積爲1, 是否存在橢圓內切三角形於此三點? 由於標準橢圓的方程式比較容易表示, 所以

我們先來考慮等腰三角形的情形。給定一等腰$\triangle ABC$(如圖三), 可以選定坐標系以底邊$\overline{BC}$ 爲y軸, 底邊中線$\overline{OA}$爲x軸, 令三頂點爲$A(\alpha,0), B(0,\gamma), C(0,-\gamma)$, 此處$\alpha,\gamma>0$, 因爲我們只考慮標準橢圓, 所以讓我們假設橢圓切$\overline{BC}$ 於中點O, 則在兩腰上的切點P_1, P_2必滿足$\overline{AP_1}=\overline{AP_2}$ (因爲

$$\frac{\overline{AP_1}}{\overline{AB}-\overline{AP_1}}\cdot\frac{\overline{AC}-\overline{AP_2}}{\overline{AP_2}}=1).$$



圖三

故可設$P_1(x_0,y_0)$, $P_2(x_0,-y_0)$, $0<y_0<\gamma$, 直線AB之方程式爲$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\gamma}=1$。由對稱性可知$x$軸必爲橢圓之長軸或短軸, 因此我們可以設橢圓中心爲$(h,0)$, 方程式爲

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

而因爲x 軸是橢圓之一軸且橢圓與$\overline{BC}$相切於O點, 故$a=h$。由定理一我們得知$\triangle OBQ$, $\triangle P_1BQ$ 面積相等, 故

$$\frac{1}{2}h\gamma=\frac{1}{2}(\alpha-h)(\gamma-y_0),$$

由此即可得

$$h=\frac{\alpha(\gamma-y_0)}{2\gamma-y_0};$$

又(x_0,y_0)在橢圓上, 我們得到

$$\frac{y_0^2}{b^2}=1-\frac{(x_0-h)^2}{h^2}=\frac{-x_0^2+2x_0h}{h^2},$$

且因(x_0,y_0)在直線AB上, 滿足

$$\frac{x_0}{\alpha}+\frac{y_0}{\gamma}=1,$$

將

$$x_0=\frac{\alpha(\gamma-y_0)}{\gamma}$$

代入

$$b^2=\frac{y_0^2h^2}{-x_0^2+2x_0h}$$

得到

$$\begin{aligned} b^2 &= \frac{y_0^2h^2}{\frac{\alpha(y_0-\gamma)}{\gamma}\times\frac{(\gamma-y_0)-2\alpha\gamma}{\gamma}} \\ &= \frac{\alpha^2(\gamma-y_0)^2}{(2\gamma-y_0)^2}\times\frac{\gamma^2y_0^2}{-\alpha^2(\gamma-y_0)^2+\frac{2\alpha^2\gamma(\gamma-y_0)^2}{2\gamma-y_0}} \\ &= \frac{\gamma^2y_0^2}{(2\gamma-y_0)^2\times\frac{y_0}{2\gamma-y_0}}=\frac{\gamma^2y_0}{2\gamma-y_0}, \end{aligned}$$

因此橢圓方程式爲

$$\frac{(x-\frac{\alpha(\gamma-y_0)}{2\gamma-y_0})^2}{(\frac{\alpha(\gamma-y_0)}{2\gamma-y_0})^2}+\frac{(2\gamma-y_0)y^2}{\gamma^2y_0}=1,\quad 即$$

$$\frac{((2\gamma-y_0)x-\alpha(\gamma-y_0))^2}{\alpha^2(\gamma-y_0)^2}+\frac{(2\gamma-y_0)y^2}{\gamma^2y_0}=1$$

我們證明了

定理四: 等腰$\triangle ABC$腰上任給二對稱點P_1, P_2 ($\overline{AP_1}=\overline{AP_2}$) 都可找到一個橢圓切兩腰於$P_1$, P_2, 且切底邊$\overline{BC}$於其中點。

換言之, 定理二之逆命題在此特殊情形是成立的。我們相信這個性質在一般情形也是成立的, 只是一般橢圓的方程式極不易表示, 因此我們還沒有找到此臆測的證明方法。

不過由定理四至少可以相信三角形的內切橢圓有無限多個, 如果我們考慮一個正三角形, 則對於每一個邊, 我們都可以找到一個橢圓切此邊於中點, 且切另外兩邊於任意給定的兩對稱點, 因此我們得到了三「群」內切橢圓。

對於上述等腰三角形的內切標準橢圓, 其圖形之變化情形, 我們可再詳加討論如下:

$$\begin{aligned} & a^2-b^2 \\ =\ & \frac{1}{(2\gamma-y_0)^2}(\alpha^2(\gamma-y_0)^2-\gamma^2 y_0(2\gamma-y_0)) \\ =\ & \frac{1}{(2\gamma-y_0)^2}(y_0^2(\alpha^2+\gamma^2)-2\gamma y_0(\alpha^2+\gamma^2)+\alpha^2\gamma^2) \\ =\ & \frac{(\alpha^2+\gamma^2)(\gamma-y_0)^2-\gamma^4}{(2\gamma-y_0)^2} \\ =\ & \frac{\alpha^2+\gamma^2}{(2\gamma-y_0)^2}((\gamma-y_0)^2-\frac{\gamma^4}{\alpha^2+\gamma^2}), \end{aligned}$$

此處$0<y_0<\gamma$。

i) $a^2>b^2 \Leftrightarrow (\gamma-y_0)^2>\frac{\gamma^4}{\alpha^2+\gamma^2} \Leftrightarrow 0<y_0<\gamma(1-\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}})$, 此時長軸爲$x$軸。

ii) $a^2=b^2 \Leftrightarrow y_0=\gamma(1-\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}})$, 此時爲內切圓。

iii) $a^2<b^2 \Leftrightarrow \gamma(1-\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}})<y_0<\gamma$, 此時$x$軸爲短軸, 長軸與$y$軸平行。

同時, 我們可以知道這些內切橢圓的面積分別爲

$$\begin{aligned} \pi ab &= \pi\frac{\alpha(\gamma-y_0)}{2\gamma-y_0}\frac{\sqrt{y_0}\gamma}{\sqrt{2\gamma-y_0}} \\ &= \frac{\pi\alpha\gamma(\gamma-y_0)\sqrt{y_0}}{(2\gamma-y_0)^{3/2}} \end{aligned}$$

現在讓我們來看一個實例: 考慮頂點分別爲　$A(1,0),B(0,1),C(0,-1)$的等腰三角形, 取兩腰的中點$P_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2}),P_2(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, 則由定理四證明過程的公式得知內切三邊於$P_1,P_2,O$之橢圓方程式爲

$$\frac{(x-\frac{1}{3})^2}{\frac{1}{9}}+\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1,$$

亦即

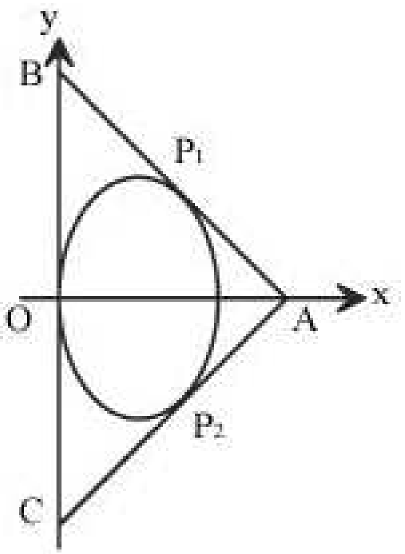
$$(3x-1)^2+3y^2=1。$$

此橢圓之焦距c滿足

$$c^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9},$$

故焦點爲

$$(\frac{1}{3},\pm\frac{\sqrt{2}}{3})。$$



圖四

在此例子中, 若將平面上的點以複數坐標表示, 則頂點分別爲$A(1),B(i),C(-i)$, 橢圓的焦點爲

$$\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{2}}{3}i,$$

以焦點爲零位的二次多項式爲

$$g(x)=3x^2-2x+1,$$

而以頂點爲零位的三次多項式爲

$$f(x)=(x-1)(x^2+1)=x^3-x^2+x-1,$$

我們發現$g(x)$恰爲$f(x)$的導函數$f'(x)$。此現象對於一般情形是否成立呢? 我們考慮圖二的一般等腰三角形, 所找出來的內切橢圓

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

之焦點有下列兩種可能:

i) $a^2\geq b^2$時, 焦點爲$(a\pm c,0)$, 以實數$a\pm c$ 爲零位的二次多項式爲$x^2-2ax+b^2$(因爲$(a+c)(a-c)=a^2-c^2=b^2$)。

ii) $a^2\leq b^2$時, 焦點爲$(a,\pm c)$, 以$a\pm ci$爲零位的二次多項式也是$x^2-2ax+b^2$(因爲$(a+ci)(a-ci)=a^2+c^2=b^2$)。

當切點P_1,P_2爲兩腰之中點時, 即$P_1(\frac{\alpha}{2},\frac{\gamma}{2})$
, 則由定理四的公式得知橢圓的兩軸滿足

$$a=h=\frac{\alpha\cdot\frac{\gamma}{2}}{2\gamma-\frac{\gamma}{2}}=\frac{\alpha}{3},$$
$$b^2=\frac{\gamma^2\cdot\frac{\gamma}{2}}{2\gamma-\frac{\gamma}{2}}=\frac{\gamma^2}{3},$$

因此橢圓的方程式爲

$$\frac{9(x-\frac{\alpha}{3})^2}{\alpha^2}+\frac{3y^2}{\gamma^2}=1,$$

由前段的討論可知以兩焦點爲零位的二次多項式爲$g(x)=3x^2-2\alpha x+\gamma^2$, 以三頂點$\alpha,\pm\gamma i$爲零位的三次多項式是$f(x)=(x-\alpha)(x^2+\gamma^2)=x^3-\alpha x^2+\gamma^2x-\alpha\gamma^2$, 簡單地計算後可知$f'(x)=g(x)$。因此我們證明了下面這有趣的定理

定理五: 設$f(x)$表實係數三次多項式, 且其三個零位在複數平面上不共線, 則以導函數$f'(x)$之二個零位爲焦點的橢圓中有一個恰爲以$f(x)=0$的三根爲頂點之三角形的內切橢圓, 且切點均爲中點。

討論: $f(x)$爲實係數三次多項式, 故$f(x)=0$必有一實根, 又因爲我們已假設三根不共線(才能形成一個三角形), 另二根必爲共軛虛根, 故此時$f(x)=0$的三根所決定的三角形必等腰, 所以我們已經證明了定理五。

這個定理告訴我們三次實係數多項式$f(x)$和它的導函數$f'(x)$ 間的關係與三角形之內切橢圓有關。這眞是一個令人驚奇的性質。

如果我們考慮一般三角形以及切其三邊於中點的橢圓, 以三頂點爲零位的三次多項式與以橢圓焦點爲零位的二次多項式之間是否也有類似性質呢?

回到圖二, 考慮橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 並且設$P_1,P_2,P_3$分別爲$\overline{A_2A_3},\overline{A_3A_1},\overline{A_1A_2}$的中點, 將$A_1,A_2,A_3$的坐標表成複數$z_1,z_2,z_3$, 則由前面的計算得知

$$\begin{aligned}
z_1 &= \alpha_1+\beta_1 i=-2a\cos\theta_1-2b\sin\theta_1 i,\\
z_2 &= \alpha_2+\beta_2 i=a(\sqrt{3}\sin\theta_1+\cos\theta_1)\\
&\quad +b(\sin\theta_1-\sqrt{3}\cos\theta_1)i,\\
z_3 &= \alpha_3+\beta_3 i=a(\cos\theta_1-\sqrt{3}\sin\theta_1)\\
&\quad +b(\sqrt{3}\cos\theta_1+\sin\theta_1)i
\end{aligned}$$

因此$z_1+z_2+z_3=0$

$$\begin{aligned}
&z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=-z_1^2+z_2z_3\\
=\ &-(\alpha_1^2-\beta_1^2+2\alpha_1\beta_1 i)\\
&+(\alpha_2\alpha_3-\beta_2\beta_3)+(\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -4(a^2\cos^2\theta_1 - b^2\sin^2\theta_1\\
&\quad +2ab\sin\theta_1\cos\theta_1)+a^2(\cos^2\theta_1-3\sin^2\theta_1)\\
&\quad -b^2(\sin^2\theta_1-3\cos^2\theta_1)+8ab\sin\theta_1\cos\theta_1 i\\
&= -3a^2\cos^2\theta_1+4b^2\sin^2\theta_1-3a^2\sin^2\theta_1\\
&\quad -b^2\sin^2\theta_1+3b^2\cos^2\theta_1\\
&= (-3a^2+3b^2)(\sin^2\theta_1+\cos^2\theta_1)\\
&= 3(b^2-a^2)
\end{aligned}$$

因此以z_1, z_2, z_3爲零位的三次多項式是$f(x) = x^3 \pm 3c^2x + k$, 其中$k = -z_1z_2z_3$爲一常數。 橢圓長軸在x軸上時, $f(x) = x^3 - 3c^2x + k$, 而以焦點$\pm c$爲零位的二次多項式是$g(x) = 3x^2 - 3c^2 = f'(x)$; 當橢圓的長軸在$y$ 軸上時, $f(x) = x^3 + 3c^2x + k$, 此時焦點爲$\pm ci$, 以其爲零位的二次多項式是$g(x) = 3x^2 + 3c^2 = f'(x)$。所以定理五可推廣到複係數的情形。

定理五$'$: 設$f(x)$表複係數三次多項式, 且其三個零位在複數平面上不共線, 則以其導函數$f'(x)$ 的二個零位爲焦點的橢圓中有一個恰爲以$f(x) = 0$的三根爲頂點之三角形的內切橢圓, 且切點均爲中點。

此定理提供了一個找內切於所給三角形之各邊中點的橢圓的方法。現在讓我們來看一個例子:

例: 考慮多項式$f(x) = x^3-225x-2(616-1521i)$, 其零位爲$-16-6i, 2(4+3\sqrt{3})+(3-4\sqrt{3})i, 2(4-3\sqrt{3})+(3+4\sqrt{3})i$, 則其導函數$f'(x) = 3x^2 - 225$ 的零位爲$\pm 5\sqrt{3}$。由前述定理, 以$f(x)$ 的零位爲頂點的三角形有一個內切橢圓以$(5\sqrt{3}, 0)(-5\sqrt{3}, 0)$爲焦點, 而切三角形之一邊於其中點$P_1(8, 3)$, 故此橢圓之長軸爲$x$軸, 且

$$\begin{aligned}
2a &= \sqrt{(5\sqrt{3}+8)^2+9}+\sqrt{(5\sqrt{3}-8)^2+9}\\
&= 10+4\sqrt{3}+10-4\sqrt{3}-20,\\
&\text{故}\qquad a = 10,\\
b &= \sqrt{a^2-c^2} = \sqrt{100-75} = 5,
\end{aligned}$$

而橢圓的方程式爲$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25} = 1$。

我們再看一個“眞正的”例子:

例: 考慮多項式$f(x) = (x+1)(x-2)(x-i)$, 其零位爲$-1, 2, i$, 導函數$f'(x) = 3x^2-(2+2i)x-2+i$的零位爲

$$\frac{1+i}{3} \pm (\sqrt{\frac{\sqrt{37}+6}{18}} - \sqrt{\frac{\sqrt{37}-6}{18}} i)$$

(此處我們是用計算機得到的)。以此兩點爲焦點的橢圓Γ之中心在$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, 焦距 c 滿足$c^2 = \frac{\sqrt{37}}{9}$; 設此橢圓之長軸長爲$a$。爲了簡單, 我們令

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sqrt{\frac{\sqrt{37}+6}{18}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{37}-6}{18}},\\
u &= x-\frac{1}{3}, v = y-\frac{1}{3};
\end{aligned}$$

則Γ上的點(x, y)滿足

$$\begin{aligned}
&(u-\alpha)^2+(v+\beta)^2\\
= \ &(2a-\sqrt{(u+\alpha)^2+(v-\beta)^2)})^2,
\end{aligned}$$

化簡此式得

$$\begin{aligned}
&a^2((u+\alpha)^2+(v-\beta)^2)\\
= \ &(a^2+\alpha u-\beta v)^2,
\end{aligned}$$

展開得

$$(a^2-\alpha^2)u^2+\frac{1}{9}uv+(a^2-\beta^2)v^2$$
$$+a^2(\frac{\sqrt{37}}{9}-a^2)=0。$$

設Γ與$(-1,0),(2,0)$之連線$y=0$相切, 代入上式得一元二次方程式

$$(a^2-\frac{\sqrt{37}+6}{18})u^2-\frac{1}{27}u$$
$$+\frac{1}{9}(a^2-\frac{\sqrt{37}-6}{18})+\frac{\sqrt{37}}{9}a^2-a^4=0,$$

由於此式僅有一解, 故判別式爲

$$\begin{aligned}0 &= (\frac{1}{27})^2-4(a^2-\frac{\sqrt{37}-6}{18})\\ &\quad\cdot(-a^4+\frac{\sqrt{37}+1}{9}a^2-\frac{\sqrt{37}-6}{162})\\ &= 4a^2(a^4-\frac{3\sqrt{37}+8}{18}a^2+\frac{37+8\sqrt{37}}{162})\\ &= 4a^2(a^2-\frac{\sqrt{37}}{9})(a^2-\frac{\sqrt{37}+8}{18}),\end{aligned}$$

但$a^2>c^2=\frac{\sqrt{37}}{9}$, 故$a^2=\frac{\sqrt{37}+8}{18}$。由此得知橢圓$\Gamma$ 之方程式爲

$$(x-\frac{1}{3})^2+(x-\frac{1}{3})(y-\frac{1}{3})+7(y-\frac{1}{3})^2=\frac{3}{4}。$$

考慮頂點爲 $A(0,1),B(-1,0),C(2,0)$之三角形, 則邊BC(方程式爲$y=0$) 與Γ之交點之$x-$座標滿足$(x-\frac{1}{3})^2-\frac{1}{3}(x-\frac{1}{3})+\frac{7}{9}-\frac{3}{4}=0$, 此式有唯一解$x=\frac{1}{2}$; 同理$AB$邊$y=x+1$與$\Gamma$之交點之 $x-$座標滿足$(x-\frac{1}{3})^2+(x-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3}+1)+7(x-\frac{1}{3}+1)^2-\frac{3}{4}=0$, 即$x=-\frac{1}{2}$; 而$AC$邊$y=1-\frac{x}{2}$ 與Γ之交點的$x-$座標爲$x=1$。故橢圓Γ與三邊$\overline{BC},\overline{AB},\overline{AC}$分別切於$(\frac{1}{2},0),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(1,\frac{1}{2})$, 不難驗證均爲中點。

可是三角形的其他內切橢圓是否有類似的求法呢? 考慮圖四的例子, 若橢圓切$\overline{AB}$於$P_1(\frac{m}{m+n},\frac{n}{m+n})$, 我們設$m,n\in N$, 由定理四的公式

$$a=\frac{\alpha(\gamma-y_0)}{2\gamma-y_0},b^2=\frac{\gamma^2y_0}{2\gamma-y_0},$$

因爲$\alpha=\gamma=1,y_0=\frac{n}{m+n}$, 故

$$a=\frac{m}{2m+n},b^2=\frac{n}{2m+n},$$

以此內切橢圓的焦點爲零位的二次多項式是

$$g(x)=(2m+n)x^2-2mx+n,$$

考慮$f(x)=(x-1)^n(x^2+1)^m$, 則

$$\begin{aligned}f'(x) &= n(x-1)^{n-1}(x^2+1)^m+m(x-1)^n\\ &\quad\cdot(x^2+1)^{m-1}(2x)\\ &= (x-1)^{n-1}(x^2+1)^{m-1}g(x)。\end{aligned}$$

因此$f'(x)$的零位除了$f(x)$的零位之外只有內切橢圓的焦點。 接著讓我們看看一般等腰三角形的情形 (如圖三), 設$P_1(x_0,y_0)$將$\overline{AB}$分成$\overline{AP_1}:\overline{P_1B}=m:n$, 則

$$y_0=\tfrac{m\gamma}{m+n}\Rightarrow a=\tfrac{\alpha n}{m+2n},b^2=\tfrac{\gamma^2m}{m+2n},$$

故以內切於P_1,P_2,O之橢圓的焦點爲零位的二次多項式是$g(x)=(m+2n)x^2-2\alpha nx+m\gamma^2$, 令$f(x)=(x-\alpha)^m(x^2+\gamma^2)^n$, 則$f'(x)=(x-\alpha)^{m-1}(x^2+\gamma^2)^{n-1}g(x)$。因此我們得到

定理六: 設等腰三角形之頂點爲$\alpha, \pm\gamma i$, 考慮多項式$f(x) = (x-\alpha)^m(x^2+\gamma^2)^n, (m,n \in N)$, 若$f'(x) = (x-\alpha)^{m-1}(x^2+\gamma^2)^{n-1}g(x)$, 其中$g(x)$爲二次多項式, 則以$g(x)$的零位爲焦點的橢圓中有一個內切此三角形於底邊中點, 同時在兩腰上之切點恰將兩腰長分別分成$m:n$及$n:m$。

我們自然也可以問: 一般的三角形可不可以用類似的方法來找內切橢圓? 讓我們來看兩個例子:

例: 考慮頂點爲$A(0,1)B(-1,0), C(2,0)$的三角形, 考慮以$-1, 2, i$ 爲零位的多項式

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-2)^2(x-i)^3, \\ \text{則}\quad f'(x) &= (x-2)(x+i)^2g(x), \\ \text{此處}g(x) &= 2x^2-(1+i)x-2 \end{aligned}$$

的零位爲

$$\frac{1\pm\sqrt{\sqrt{65}+8}}{4}+\frac{1\pm\sqrt{\sqrt{65}-8}}{4}i;$$

以此兩點爲焦點的橢圓Γ 之中心在$(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$, 焦距$c$滿足$c^2=\frac{\sqrt{65}}{8}$。以$a$表長軸之長, 令

$$\begin{aligned} u &= x-\frac{1}{4}, v=y-\frac{1}{4}, \\ \alpha &= \frac{\sqrt{\sqrt{65}+8}}{4}, \beta=\frac{\sqrt{\sqrt{65}-8}}{4}, \end{aligned}$$

則Γ的點(x,y)滿足

$$\begin{aligned} & (u+\alpha)^2+(v+\beta)^2 \\ = & (2a-\sqrt{(u-\alpha)^2+(v-\beta)^2})^2, \end{aligned}$$

化簡之得

$$(\alpha u+\beta v-a^2)^2=a^2((u-\alpha)^2+(v-\beta)^2),$$

亦即

$$\begin{aligned} & (a^2-\alpha^2)u^2+(a^2-\beta^2)v^2 \\ & -\frac{1}{8}uv-a^2(a^2-\frac{\sqrt{65}}{8})=0。 \end{aligned}$$

設Γ與BC邊相切, 將BC的方程式$y=0$代入上式得

$$\begin{aligned} & (a^2-\frac{\sqrt{65}+8}{16})(x-\frac{1}{4})^2+\frac{1}{16}(a^2-\frac{\sqrt{65}-8}{16}) \\ & +\frac{1}{32}(x-\frac{1}{4})-a^2(a^2-\frac{\sqrt{65}}{8})=0, \end{aligned}$$

此式有唯一解$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} 0 &= (\frac{1}{32})^2+4(a^2-\frac{\sqrt{65}+8}{16}) \\ & \quad \times(a^4-\frac{2\sqrt{65}+1}{16}a^2+\frac{\sqrt{65}-8}{256}) \\ &= 4a^2(a^4-\frac{3\sqrt{65}+9}{16}a^2+\frac{65+9\sqrt{65}}{128}) \\ &= 4a^2(a^2-\frac{\sqrt{65}}{8})(a^2-\frac{\sqrt{65}+9}{16}) \\ \Rightarrow \quad & a^2=\frac{\sqrt{65}+9}{16}, \end{aligned}$$

故Γ之方程式爲

$$(x-\tfrac{1}{4})^2+17(y-\tfrac{1}{4})^2-2(x-\tfrac{1}{4})(y-\tfrac{1}{4})=1,$$

Γ與$y=0$之交點的 $x-$ 座標滿足

$$(x-\frac{1}{4})^2+\frac{1}{8}(x-\frac{1}{4})+\frac{17}{16}-1=0,$$

此式有唯一解$x=0$, 故Γ切$\overline{BC}$於$O(0,0)$; 同理, Γ 與AB邊$y=x+1$之交點的 $x-$座標僅有一解$x=-\frac{3}{4}$, 即Γ切$\overline{AB}$於$P(-\frac{3}{4},\frac{1}{4})$,

而Γ與AC 邊$y = 1 - \frac{x}{2}$的交點滿足$x = \frac{6}{5}$, 即切於$Q(\frac{6}{5}, \frac{2}{5})$。容易驗證在三邊$\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{BC}$的切點將三邊所分線段滿足$\overline{BO} : \overline{CO} = 1 : 2$, $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$, $\overline{AQ} : \overline{CQ} = 3 : 2$。

例: 再看以$A(0,1)B(-1,0)C(3,0)$爲頂點的三角形, 考慮以$-1, 3, i$ 爲零位的多項式

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-3)^3(x-i)^4, \\ \text{則} \quad & f'(x) = 4(x-3)^2(x-i)^3 g(x), \end{aligned}$$

此處二次多項式$g(x)$的零位是

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{745}+27}{32}} + (\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{745}-27}{32}})i;$$

以此兩點爲焦點的橢圓Γ之中心在$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, 而焦距$c$滿足$c^2 = \frac{\sqrt{745}}{16}$, 設 Γ與BC邊相切, 經類似於前例的計算得知Γ的長軸長度a滿足

$$a^2 = \frac{29+\sqrt{745}}{32},$$

Γ的方程式爲

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16}(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}(x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{4}) \\ & + \frac{7}{4}(y-\frac{1}{4})^2 = \frac{3}{32}。\end{aligned}$$

Γ與BC邊$y = 0$ 切於$O(0,0)$, 與AB邊$y = x+1$ 切於$P(-\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$, 與$AC$邊$y = 1 - \frac{x}{3}$切於$Q(\frac{12}{7}, \frac{3}{7})$。故$\Gamma$爲三角形$ABC$ 的一個內切橢圓, 且切點將三邊$\overline{BC}$, $\overline{AB}, \overline{AC}$ 分成$\overline{BO} : \overline{CO} = 1 : 3$, $\overline{AP} : \overline{BP} = 4 : 1$, $\overline{AQ} : \overline{CQ} = 4 : 3$。

由以上兩個例子, 我們可以相信定理六可以推廣到一般的三角形, 不過前面所使用的方法很難推廣到一般情形, 因爲這時很難找出$\theta_1, \theta_2, \theta_3$間的關係, 我們需要用其他方法來處理這個問題, 目前我們還沒想到可行辦法。

最後, 我們想要探討三角形之內切橢圓面積的極值問題。既然一個給定的三角形可以有無限多個內切橢圓, 我們可以問: 其中它們的面積有最大或最小值嗎? 我們還是先來考慮等腰三角形的情形 (如圖二), 前面說過: 當切點爲$O, P_1(x_0, y_0), P_2(x_0, -y_0)$時, 內切橢圓面積爲$\frac{\pi\alpha\gamma\sqrt{y_0}(\gamma-y_0)}{(2\gamma-y_0)^{\frac{3}{2}}}$。因爲$0 < y_0 < \gamma$, 故不會有極小值; 讓我來找$\frac{y_0(r-y_0)^2}{(2r-y_0)^3}$的極大值, 爲了使符號簡單, 令

$$A = \frac{y_0}{2\gamma - y_0}, B = \frac{\gamma - y_0}{2\gamma - y_0},$$

因爲

$$\begin{aligned} & A^3 + 2B^3 - 3AB^2 \\ = \ & (A+2B)(A^2 - 2AB + B^2) \\ = \ & (A-B)^2 \geq 0, \\ \text{所以} \quad & AB^2 \leq \frac{1}{3}(A^3 + 2B^3), \end{aligned}$$

且等號在$A = B (= \frac{1}{3})$, 即$y_0 = \frac{\gamma}{2}$時成立, 故內切於三邊中點時, 橢圓面積爲最大, 此時其面積爲$\frac{\pi\alpha\gamma}{3\sqrt{3}}$, 與$\triangle ABC$面積的比爲定值$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$。

對於一般的三角形, 我們不知道如何找出它所有內切橢圓的面積, 所以讓我們來考慮對偶的問題: 給定一個橢圓, 考慮它的所有外切三角形中, 面積何者最小? 在圖一中, 橢圓之面積爲πab, 外切三角形$A_1A_2A_3$之面積爲

$$ab\left(\left|\frac{1-\cos(\theta_2-\theta_1)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}\right| + \left|\frac{1-\cos(\theta_3-\theta_2)}{\sin(\theta_3-\theta_2)}\right| + \left|\frac{1-\cos(\theta_3-\theta_1)}{\sin(\theta_3-\theta_1)}\right|\right)。$$

前面說過: 我們可以設$0 \le \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < 2\pi, 0 < \theta_2-\theta_1, \theta_3-\theta_2 < \pi < \theta_3-\theta_1$。由於

$$\frac{1-\cos\phi}{\sin\phi}=\frac{2\sin^2\frac{\phi}{2}}{2\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}}=\tan\frac{\phi}{2},$$

上述面積可寫成

$$ab\left(\left|\tan\tfrac{\theta_2-\theta_1}{2}\right|+\left|\tan\tfrac{\theta_3-\theta_2}{2}\right|+\left|\tan\tfrac{\theta_3-\theta_1}{2}\right|\right);$$

讓我們來討論此式的極小值。爲了使符號簡單, 令$\varphi=\frac{\theta_2-\theta_1}{2}, \psi=\frac{\theta_3-\theta_2}{2}$, 因此我們有$0<\varphi,\psi<\frac{\pi}{2}<\varphi+\psi(<\pi)$, 令$x=\tan\varphi, y=\tan\psi(>0)$, 我們要找$k=\tan\varphi+\tan\psi+|\tan(\varphi+\psi)|=x+y+\frac{x+y}{xy-1}$ 的極小值, 由於x的二次方程式$yx^2+y(y-k)x+k=0$ 有實根, 故

$$\begin{aligned}&0\le y^2(y-k)^2-4ky\\=\;&y^2(k^2-2ky-4\frac{k}{y}+y^2)\\=\;&y^2[(k-(y+\frac{2}{y}))^2-\frac{4(1+y)^2}{y^2}],\end{aligned}$$

但$k>0$, 因此

$$k\ge\frac{y^2+2+2\sqrt{1+y^2}}{y}=\frac{(1+\sqrt{1+y^2})^2}{y},$$

而等號何時成立呢?

$$\begin{aligned}k(=\frac{xy(x+y)}{xy-1})&=\frac{y^2+2+2\sqrt{1+y^2}}{y}\\\Leftrightarrow x+\frac{x+y}{xy-1}&=\frac{2(1+\sqrt{1+y^2})}{y}\\\Leftrightarrow \frac{(xy-1)^2+y^2+1}{2(xy-1)}&=\sqrt{1+y^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow [(xy-1)^2-(y^2+1)]^2=0\\&\Leftrightarrow (xy-1)^2=y^2+1\\&\Leftrightarrow x^2y-2x-y=0\\&\Leftrightarrow x=\frac{x+y}{xy-1}\\&\Leftrightarrow \left|\tan\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right|=\left|\tan\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\right|\\&\Leftrightarrow \overline{P_1A_2}=\overline{P_1A_3},\end{aligned}$$

即P_1爲$\overline{A_2A_3}$ 的中點; 但我們也可將前述二次方程式$xy^2+x(x-k)y+k=0$ 表示爲y的二次式, 經由類似於前面的討論, 可知

$$\begin{aligned}&k\text{有最小值}\\&\Leftrightarrow y=\frac{x+y}{xy-1}\\&\Leftrightarrow \tan(\frac{\theta_3-\theta_2}{2})=\left|\tan\frac{\theta_3-\theta_1}{2}\right|\\&\Leftrightarrow \overline{P_3A_1}=\overline{P_3A_2},\end{aligned}$$

即P_3是$\overline{A_1A_2}$的中點。我們得到

定理七: 橢圓之外切三角形集合中, 面積最小者之三邊上的切點均爲中點。換言之, 給定一個三角形, 則其內切橢圓之集合中, 面積最大者切此三角形於各邊中點, 且此最大橢圓之面積與所切三角形之面積的比爲定值$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$。

我們謝謝淸大沈昭亮教授的指導與鼓勵。

—本文作者分別任教及就讀於新竹中學—