從Fourier 的十七線問題談起

柳柏濂

1.Fourier 提出的問題

十八世紀, 法國著名數學物理學家 Jaseph Fourier 在二十歲的時候 (1788) 給他的朋友 C. L. Bonard寫了一封信, 信中提出了一個有趣的幾何組合問題:

"這裡有一個奇特的小問題, 它使我想起了我們在好幾個時候討論過的, Euclid幾何的某些性質。在同一平面上安排十七條直線, 假設這些直線可以無限伸延且無三線共點, 那麼, 如何安排這十七條線, 使之交出101個點。"

如果我們限定17條直線兩兩相交, 則它們的交點數是$\binom{17}{2} = 136 > 101$, 顯然這個問題無解。

於是, 我們必須考有某些直線是互相平行的。下面, 把 Fourier 問題置於一般的情況下去思考。

2. 更一般的問題

我們更廣泛地提出如下問題。

平面上有n條直線, 無三線共點, 要使這些直線交出m個點, 應如何安排這n條直線?

爲方便敍述, 我們把一組平行線稱爲平行線族。

先求n條直線交點數的最大值。

顯見, 若這些直線無平行線族的話, 它們的交點數最大, 這個數是$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$。

如果n條直線的某種安排使其交點數不是$\binom{n}{2}$, 因爲已知無三線共點, 故, 這n條直線必有平行線族。

設這n條直線含k族平行線族($1 \leq k \leq [\frac{n}{2}]$), 它們所含的直線條數分別是$j_1, j_2, \cdots, j_k$, 這裡, $j_1, j_2, \cdots, j_k$都是不小於2的整數, 且滿足$j_1 + j_2 + \cdots + j_k \leq n$。

因爲所要求的交點總數是m, 顯然

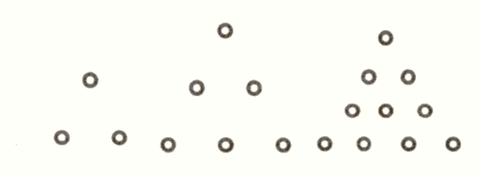
$$m \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

故交點的總數比最大值減少了$\frac{n(n-1)}{2} - m$個。

易知, 導致交點數的減少是因爲有平行線族。k族平行線, 每一族中的$j_t (t = 1, 2, \ldots k)$條直線彼此無交點。故交點數比最大值減少了$\sum_{t=1}^{k} \binom{j_t}{2}$個。

於是 $$\frac{n(n-1)}{2} - m = \sum_{t=1}^{k} \frac{j_t(j_t-1)}{2} \qquad (2.1)$$

(2.1) 式右邊各項都是第 $j_t - 1 (t = 1, 2, \ldots k)$ 個三角數。所謂第$j_t - 1$個三角數, 即以$j_t - 1$個點爲邊組成的三角形的總點數。例如$\frac{3(3-1)}{2}$, $\frac{4(4-1)}{2}$, $\frac{5(5-1)}{2}$的幾何意義如圖1所示。



$\frac{3(3-1)}{2}=3$ $\frac{4(4-1)}{2}=6$ $\frac{5(5-1)}{2}=10$

圖1

(2.1) 式告訴我們: Fourier問題有解的必要條件是n條直線交點的最大值與m的差必須是三角數之和。

對於三角數, 古希臘的數學家已經注意到它的有趣性質。例如, 相鄰兩個三角數之和必是平方數。早在十七世紀, 法國數學家 Fermat 已經發現三角數的這樣的一個性質: 任一個正整數都可以表示爲一個, 兩個或3個三角數之和。直到1815年, 這一性質才由數學大師 Cauchy 嚴格證明出來, 運用這個性質, 我們在檢查必要條件 (2.1) 時, 只須檢查$\sum_{t=1}^{k} j_t$不大於n就可以了。

下面, 我們用 (2.1) 式解 Fourier 的十七線問題。

令$n=17$, $m=101$, 由 (2.1) 式得

$\frac{j_1(j_1-1)}{2}+\frac{j_2(j_2-1)}{2}+\cdots+\frac{j_k(j_k-1)}{2}=\frac{17(17-1)}{2}-101$

即 $\frac{j_1(j_1-1)}{2}+\frac{j_2(j_2-1)}{2}+\cdots+\frac{j_k(j_k-1)}{2}=35$

$j_1+j_2+\cdots+j_k\leq 17$

我們把不大於35的所有三角數列出來

j_t	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{j_t(j_t-1)}{2}$	1	3	6	10	15	21	28	36

表1

由上表可見, 35這個數不是三角數, 也不是兩個三角數之和, 即17條直線要交出101個點必不能僅有一族或兩族平行線。由三角數的性質知, 它至少是三個三角數之和。

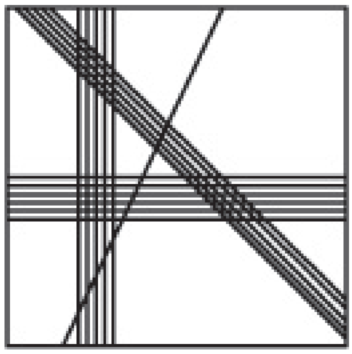
對照上表, 由 (2.1) 式, 我們不難得到 Fourier 十七線問題的全部4個解。

(1) $j_1=5$, $j_2=5$, $j_3=6$及1條直線(圖2(a))

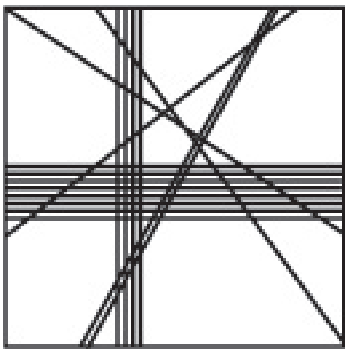
(2) $j_1=2$, $j_2=4$, $j_3=8$及3條不成平行線族的直線。(圖2(b))

(3) $j_1=2$, $j_2=3$, $j_3=3$, $j_4=8$ 和1條直線。(圖2, (c))

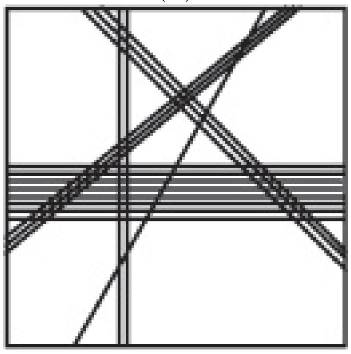
(4) $j_1=2$, $j_2=3$, $j_3=5$, $j_4=7$(圖2(d))



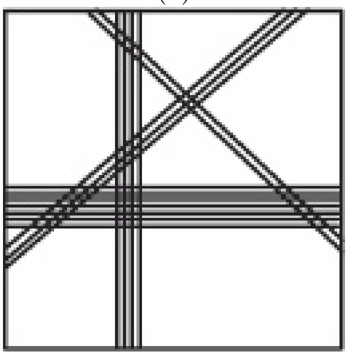
(a)



(b)



(c)



(d)

圖2

讀者可以看到, Fourier 的十七線問題如果僅用幾何的方法去解, 即使求一個解也是不容易的, 然而, 這裡用三角數的組合方法把它的所有4個解都找出來了! 作爲一個練習, 讀者們可以嘗試一下, 把 Fourier 的17線改爲變成131個點, 則直線如何安排? (兩個解: (1)5個2線組平行線族, 7條不成族的直線 (2)2個2線組平行線族, 1個3線組平行線族, 10條不成族的直線)

3. 三角形的個數問題

Fourier一百多年前提出的問題已得到圓滿解決。但是, 我們言猶未盡, 如果把 Fourier 問題中所規定的交點數改爲三角形個數, 問題是否能夠類似地得到解決呢?

問題的一般提法是:

在平面上給出n條直線$(n \geq 3)$, 無三線共點, 若要交出m個三角形, 如何安排這些直線?

先計算n條直線在平面上交出的三角形個數的最大值。顯然, 當此n條直線均無兩直線平行時, 所交出的三角形個數$\binom{n}{3}$最大。

若$m < \binom{n}{3}$, 則n條直線中至少有兩直線平行。設n條直線共分爲k組平行線。每組的線數分別爲$j_1, j_2, \cdots, j_k$,

$j_1 + j_2 + \cdots + j_k$=n, $1 \leq j_t \leq n (t = 1, 2, \cdots k)$, 這裡, 我們廣義地約定, 當$j_t = 1$時, 第$t$組直線非平行線族, 僅爲1條直線。

由上述的討論知, 若n條直線無兩條互相平行, 交出的三角形個數最大, 而由於出現了平行線族, n條直線交出的三角形個數變成了$m \leq \binom{n}{3}$, 故三角形個數減少了。

$$\binom{n}{3} - m \tag{3.1}$$

我們又從另一方面計算三角形減少的個數。

考察其中一組j_t條平行線。任取j_t條平行線中的2條, 再和剩下的$(n-2)$條直線中

之任一條都不能組成三角形。於是, 這些失去的三角形的個數是$\binom{j_t}{2}(n-2)$個, 對t求和, 其個數一共是

$$\sum_{t=1}^{k}\binom{j_t}{2}(n-2)=(n-2)\sum_{t=1}^{k}\binom{j_t}{2} \qquad (3.2)$$

此外, 我們注意到, 在同一平行線族的j_t條平行直線中, 每3條平行線亦不能構成三角形。這些3線組數是$\binom{j_t}{3}$, 但這類三線組在(3.2) 式中已被重複算了3次, 故當有平行線k條, 各有$j_1, j_2, \cdots j_k$條平行線時, 應減去2倍$\binom{j_t}{3}$。對t求和, 失去的三角形總數應是

$$(n-2)\sum_{t=1}^{k}\binom{j_t}{2}-2\sum_{t=1}^{k}\binom{j_t}{3} \qquad (3.3)$$

因爲 (3.1)(3.3) 式都表示同一個量, 故得

$$\binom{n}{3}-m=(n-2)\sum_{t=1}^{k}\binom{j_t}{2}-2\sum_{t=1}^{k}\binom{j_t}{3} \quad (3.4)$$

(3.4) 式是一個關於$j_t(t=1,2,\cdots,k)$的不定方程, 若求得一組解$j_1, j_2, \cdots, j_k$, 便對應於一組符合題意的直線安排。從理論上, (3.4) 式的解是不易求出的, 但我們從組合數學的觀點, 還是有辦法求出具體問題的解來。

一個很自然的想法是, 由$\binom{j_t}{3}=\frac{j_t-2}{3}\binom{j_t}{2}$, 可以把 (3.4) 式化爲僅含$\binom{j_t}{2}$的式子。但是, 這樣一來, 在$\binom{j_t}{2}$ 的係數部份又增加了變量j_t, 增加了求解的困難。

現在, 我們考慮另一種算法。

把$\binom{j}{2}$, $\binom{j}{3}$列表如下:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$
$\binom{j}{2}$	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	$\cdots$
$\binom{j}{3}=\frac{(j-2)}{3}\binom{j}{2}$	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	$\cdots$

表2

令$x=\sum_{t=1}^{k}\binom{j_t}{2}$,

$y=\sum_{t=1}^{k}\binom{j_t}{3}$

(3.4) 式變成

$$\binom{n}{3}-m=(n-2)x-2y \qquad (3.5)$$

對於給定的n, m, 我們可先求不定方程 (3.5) 的非負整數解(x, y)。

由組合意義, 易見$\sum_{t=1}^{k}\binom{j_t}{3}\le\binom{n}{3}$, 其中$\sum_{t=1}^{k}j_t=n$, 故必有

$$0\le y\le\binom{n}{3} \qquad (3.6)$$

又由$y=\frac{(n-2)x+m-\binom{n}{3}}{2}$, 相應於不等式(3.6), 有

$$0\le\frac{(n-2)x+m-\binom{n}{3}}{2}\le\binom{n}{3},$$

故得 $\frac{\binom{n}{3}-m}{(n-2)} \le x \le \frac{3\binom{n}{3}-m}{(n-2)}$, $(n \ge 3)$ (3.7)

(3.6), (3.7) 式給出了非負整數解x和y的取值範圍, 故理論上是能夠求出 (3.5) 的有限組非負整數解(x,y)來。

下一步, 再對於 (3.5) 式的每一組符合要求的解(x,y), 對照表2的$\binom{j}{2}$, $\binom{j}{3}$, 找出一組正整數 $(j_1, j_2, \cdots, j_k)$, $1 \le k \le n$, 使

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{k} \binom{j_t}{2} = x \\ \sum_{t=1}^{k} \binom{j_t}{3} = y \\ \sum_{t=1}^{k} j_t = n \end{cases} \tag{3.8}$$

其中$j_1, j_2, \cdots, j_k$不必互異。

於是, $(j_1, j_2, \cdots, j_k)(1 \le k \le n)$便是$n$條直線產生$m$個三角形的一種安排方案, 其幾何意義是,$n$條直線中有$k$組互不平行的直線$j_1, j_2, \cdots, j_k$, 其中第$t$組直線由$j_t$條平行線所組成。

因為當$k > 5$時, $\binom{k}{3} > \binom{k}{2}$, 故在求 (3.8) 式的解時, 應先以 $\binom{j}{3}$的一行湊起, 對照表2, 一組滿足 (3.8) 式的正整數是不難組合而成的。

現舉例如下:

例1. $n=5$, $m=7$

解: 由(3.5) 式, 得

$$\binom{5}{3} - 7 = 3x - 2y$$

即 $$3x - 2y = 3 \tag{3.9}$$

易見, 要保證y是整數, x必須是奇數, 且由不等式 (3.6), (3.7) 有$1 \le x \le 7$, $0 \le y \le 10$。

由 (3.9) 式得符合要求的非負整數解(x,y) 如下

x	1	3	5	7
y	0	3	6	9

檢查上面4組解, 我們發現, 對解 (1, 0) 有

$j_1 = j_2 = j_3 = 1$, $j_4 = 2$, 使

$$\begin{cases} \binom{1}{2} + \binom{1}{2} + \binom{1}{2} + \binom{2}{2} = 1 \\ \binom{1}{3} + \binom{1}{3} + \binom{1}{3} + \binom{2}{3} = 0 \\ 1+1+1+2 = 5 \end{cases}$$

於是, 平面上5條直線, 要交出7個三角形, 必須有且僅有一對平行線。(如圖3)

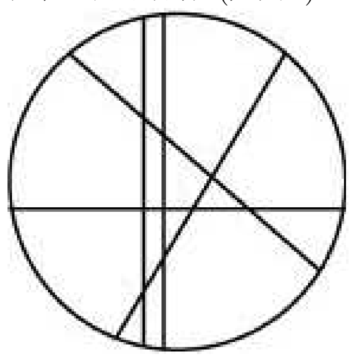


圖3

例 2. $n=8$, $m=18$

解: 由(3.5) 式得

$$\binom{8}{3} - 18 = (8-2)x - 2y$$

即 $$3x - y = 19 \tag{3.10}$$

由不等式 (3.6), (3.7) 得非負整數解x, y的範圍是$7 \le x \le 25$, $0 \le y \le 56$。

由 (3.10) 式得到非負整數解(x,y)如下表

x	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
y	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32

x	18	19	20	21	22	23	24	25
y	35	38	41	44	47	50	53	56

易見, 對 (7,2) 有$j_1=2$, $j_2=3$, $j_3=3$使

$$\begin{cases} \binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{3}{2}=7 \\ \binom{2}{3}+\binom{3}{3}+\binom{3}{3}=2 \\ 2+3+3=8 \end{cases}$$

故 (2, 3, 3) 是其中一解。又, 不難檢驗, 其餘18組解, 均不能找出合乎方程組 (3.8) 的 $(j_1,j_2,\cdots j_k)$。故要由平面上的8條直線產生18個三角形, 當且僅當有3組平行線 (各組平行線數分別是2, 3, 3) 相交而成。(如圖4)。

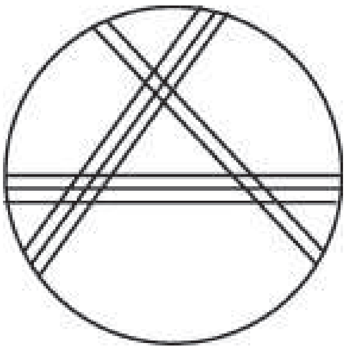


圖4

現在, 我們沿用 Fourier 的十七線問題, 給出另一個例子。

例3. $n=17$, $m=275$

解: 由 (3.5) 式, 得

$$\binom{17}{3}-275=(17-2)x-2y$$

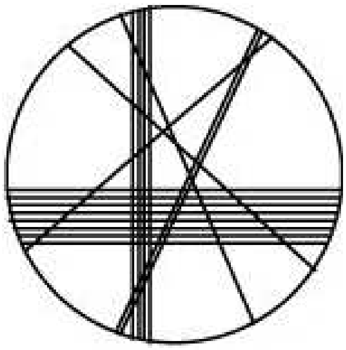
即 $15x-2y=405$ (3.11)

易見, x必為奇數。由不等式 (3.6), (3.7) 得 $27\le x\le 117$, $0\le y\le 680$

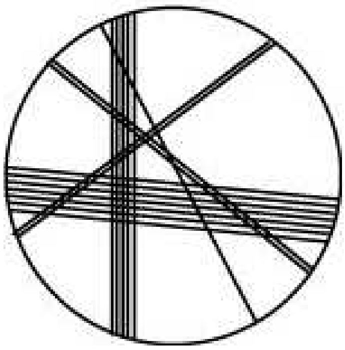
(3.11) 式對應有45組非負整數解(x,y) (略)。經檢驗,

(33, 45) 有對應解(j_1,j_2,j_3,j_4,j_5) $=(1,2,2,5,7)$

(35, 60) 有對應解$(j_1,j_2,j_3,j_4,j_5,j_6)=(1,1,1,2,4,8)$, 按此兩組作出的17條直線恰好交出275個三角形。(見圖5)



(1,1,1,2,4,8)



(1,2,2,5,7)

圖5

4. 由極端情形驗證方法

在數學中, 要確認一個公式或方法正確與否, 當然可以用計算的結果來驗證。但是, 對於組合問題的結果, 由於數字較大, 往往不容易直接檢驗。於是, 我們可以考慮極端的情形與實際是否一致。

我們考察直線交出三角形問題的極端情形。當$m=\binom{n}{3}$時, 交出的三角形個數應是$\binom{n}{3}$, 而當$m=0$時, 直線不交出任何三角形。我們驗證一下 (3.4) 式的結果與幾何直觀是否一致。

當$m=\binom{n}{3}$, 由 (3.4) 式得

$$0=(n-2)\sum_{t=1}^{k}\binom{j_t}{2}-2\sum_{t=1}^{k}\binom{j_t}{3} \quad (4.1)$$

$$\text{即 } \sum_{t=1}^{k}\binom{j_t}{3}=\sum_{t=1}^{k}(\tfrac{n}{2}-1)\binom{j_t}{2} \quad (4.2)$$

又因爲 $\sum_{t=1}^{k}\binom{j_t}{3}=\sum_{t=1}^{k}\frac{j_t-2}{3}\binom{j_t}{2}$
故 (4.2)變爲

$$\sum_{t=1}^{k}(\tfrac{n}{2}-1)\binom{j_t}{2}=\sum_{t=1}^{k}\frac{j_t-2}{3}\binom{j_t}{2}$$

注意到上式各項非負, 故必有

$$\frac{n}{2}-1=\frac{j_t-2}{3}, t=1,2,\cdots,k \quad (4.3)$$

或 $\binom{j_t}{2}=0,\ t=1,2,\cdots k$,

$$\sum_{t=1}^{k}j_t=n \quad (4.4)$$

若 (4.3) 成立, 則$j_t=\frac{3n}{2}-1>n$ (因$n\ge 3$), 矛盾!

若 (4.4) 成立, 得$j_1=j_2=\cdots=j_n=1$。顯見

$$\binom{1}{2}+\binom{1}{2}+\cdots+\binom{1}{2}=0$$

$$\binom{1}{3}+\binom{1}{3}+\cdots+\binom{1}{3}=0$$

滿足 (4.1) 式且

$$\sum_{t=1}^{n}j_t=\sum_{t=1}^{n}1=n。$$

這時, 即n條直線無兩條平行。

當$m=0$, 即n條直線不交出任何三角形。從幾何直觀易見, 這時n條直線所分的平行線族必須不多於 2 族。下面, 我們試用 (3.4) 式驗證: 若有非負整數j_1, j_2使

$$j_1+j_2=n,$$

則 $m=0$ 。(當然, 嚴格來說, 還須驗證, 若 $\sum_{t=1}^{k}j_t=n$中至少有 3 個正數j_t, 則$m>0$)。

事實上, 由 (3.4) 式, 右邊

$$(n-2)[\binom{j_1}{2}+\binom{j_2}{2}]-2[\binom{j_1}{3}+\binom{j_2}{3}]$$

$$=n[\binom{j_1}{2}+\binom{j_2}{2}]-2[\binom{j_1}{3}+\binom{j_1}{2}+\binom{j_2}{3}+\binom{j_2}{2}]$$

$$=n[\binom{j_1}{2}+\binom{j_2}{2}]-2[\binom{j_1+1}{3}+\binom{j_2+1}{3}]$$

$$=n\frac{j_1^2+j_2^2-n}{2}-2\frac{j_1^3+j_2^3-n}{3!}$$

$$=n\frac{j_1^2+j_2^2-n}{2}-\frac{n(j_1^2-j_1j_2+j_2^2)-n}{3}$$

$$=\frac{n}{6}(3j_1^2+3j_2^2-3n-2j_1^2$$
$$+2j_1j_2-2j_2^2+2)$$

$$=\frac{n}{6}[(j_1+j_2)^2-3n+2]$$

$$=\frac{n}{6}(n^2-3n+2)$$

$$=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)=\binom{n}{3}。$$

於是, 由 (3.4) 式

$$\binom{n}{3}-m=\binom{n}{3}$$

得　$m=0$, 這與直觀的幾何意義一致。

最後, 需要指出的是, 平面上放置n條直線使之交出m個三角形, 並不總是有解的。試看下列

例4. $n=5,\ m=2$

解: 由(3.5) 式, 得 $\binom{5}{2}-2=(5-2)x-2y$

得 $8=3x-2y$

顯見, x必須是偶數。由 (3.6), (3.7) 式得

$$4\le x\le 8,\ 0\le y\le 10。$$

解(x,y)如下

x	4	6	8
y	2	5	8

由表 2 不難驗證, 上述 3 組解中, 沒有一組能找出$j_1,j_2,\cdots,j_k$使之滿足方程組(3.8)。故此題無解。事實上, 讀者可在平面上直觀地驗證, 其幾何意義亦是頗爲明顯的。

參考文獻

1. B. Turner (1980), Fourier's seventeen Lines problem, Mathematics Magazine, Vol. 53. No. 4, pp 217-219.
2. 柳柏濂, 幾何組合計數趣談, 廣東教育出版社, 1988。

—本文作者任教於廣州華南師範大學數學—