

丘成桐教授清華大學座談

時間：一九九二年元月

記錄：賴鵬仁

昨天我還和張樹城談起唸數學的問題，我想這個唸數學，其實就是看你自己的興趣。

國家需要各種人才，不一定要唸數學

從前我們的時代，唸中學和大學的時候，能夠挑的科目不是很多；現在比從前有點大不同，可挑的比較多的多。如果是要賺大錢，你可以唸工商管理，很多不同的科目，你可以賺很多的錢。其實對整個國家來講。需要的是能夠管經濟或管其它的人才，賺錢沒什麼不好的。國家我指台灣或中國。

所以對於國家，整個社會來講，沒有講一定要唸數學。其實要混口飯吃的其它學科很多，同時可能也比較容易點，所以唸數學沒有必要是爲了混一口飯就好了。就是講你跳出這門課來看的時候，最好不要講數學就是混口飯吃或爲什麼東西的。所以假如你不想唸數學，就早點決定不要唸數學，你真的想唸數學的話，你就花功夫在這上面。

決定唸數學就不要三心兩意

我的結論就是假如你決定要唸數學，挑選了數學以後，你就花全部工夫在數學上面去，希望對數學有興趣，在數學裡面你可以得

到很大的樂趣。同時這樣決定了，對你以後的成就也會有很大的影響。

我覺得最不好的就是你既然對數學有興趣，卻爲了賺錢就跑到其它的科目，其實你也不見得賺得到錢。這是講你的決心要下得很大，不要三心兩意，「讓我試著唸唸看，假如不行的話再轉」，很多人是這個樣子，尤其是中國學生，進了大學試試看嘛，這兒不行就轉轉，最後搞得兩邊都不如願時，就自己怪自己，好像很灰心的樣子，很多人是這個樣子，爲什麼一定要這樣？

這是決心的問題，一個很重要的決定，就是你進數學系時，你預計要做什麼事情。對我自己來講，我很早就下了決心我要唸數學，所以從來沒有想過要轉其它的或是爲了其它的事情不唸數學。

懂得愈多，才知興趣所在

到了你決定以後，你要懂得數學有很多不同門，就是分支，你在大學，對每一門分支的了解可能差得遠。就是講你很難在大學裡就決定對數學裡那一門興趣大一點。

其實興趣和你懂得的學問是有關係的，因爲你可能對某件東西有興趣，不過你不曉

得它時，你就不可能對他有興趣。譬如你去爬山，你爬過了小山才看到大山，你還沒有看到後面的山以前，就不可能對後面的山有興趣，所以所謂興趣和你了解的多少是一種非線性(笑)的關連。

興趣和時空關連很大

所以這個興趣和你當時的地理環境有關係，跟當時的時間也很有關係，就是和當時的時空關連很大。譬如來講，因為你剛好在台灣，你旁邊的教授若是單做那一行的，你對其它行就不見得曉得。就整個世界來講，雖然你剛好走到某個地方，也許時間剛好不對，大部份數學家對這一方面問題興趣不大，對其它問題興趣大一點，並不表示其他問題就沒什麼重要。所以這整個數學家對數學的了解，跟時空有關，因此興趣也會跟這個有關。

開放心胸，了解基本課程

我覺得一個年輕的學生，首先要 open-minded，就是講你要曉得，你唸的學科，有很多時候跟其它的學科關係很大，不要以為我唸的這門學科跟其它的完全無關，其他的就不唸了。

例如很多學生，講我對某些文學課有興趣，凡是跟這個文學門沒有關係的，我就不想再去唸它。不然講我對泛函分析有興趣，我天下之間就只有泛函分析，跟泛函分析關係不大的，就算有一點關係我也不想去看，這是一個錯誤的觀念。其實泛函分析是跟偏微分方程及很多不同的理論有關，才開始產生的，可是慢慢的發展以後，就把前面的引起泛函分析發展的學科忘掉了，這是很不幸的。

大學是一個通才教育，就算你單對代數有興趣，除了代數要懂以外，對微積分也要懂，其實微積分對代數也有很大的影響。所以基本上，大學所能 offer 的課程，我覺得你們年輕人都應該去學，不單要學，而且要學得很懂。

基礎打好，對以後研究幫助很大

很難想像有什麼大學課程在研究院是不重要的，你在大學裡唸的每一門課，和以後的研究都有很大的關係，我想關係是絕對有的，就算在研究院頭一二年的課，我想對你以後的研究也是有很大的好處，所以應該盡量將基礎打好。

其實到你真的在做研究時，你會發現你需要很多工具，很不幸，很多東西，你在唸大學，唸研究院時沒有好好地唸好。到了唸博士那個時候，你常常要趕寫論文什麼的，你發現工具不夠，要花很多時間去唸，工具不夠又不想去唸，你就很麻煩。畢業拿個博士以後，你又有很多其他不同的壓力，台灣比較少，至少在美國是很大的，你要盡量發表文章，一下子沒有那麼多時間將那門工具重新再唸過。所以唸大學跟唸研究院那二年的時候，要盡量將所有的基本工具全部唸懂，我想這是很有必要的。

懂得兩門以上分支，才能活躍作研究

譬如來講，我很多朋友是代數幾何做的很好，可是需要用到分析做工具時，他們就覺得很怕，反過來講，分析唸得很好，可是需要代數時就很怕。不過我覺得一個好的數學家，至少要懂得兩門以上的數學分支。當題目來

的時候不會恐懼，才能夠很活躍的做一個好的研究。

唸到對問題有想法，會找文獻

一門學科你要唸到什麼地步？你自己要曉得。就是講你遇到一個 research 的問題的時候，你雖然並不見得能夠解決掉，至少你要曉得你可以坐下來對這個問題產生一個想法，同時可以找這方面的文獻，曉得那裡去找，將它基本的 terminology 弄懂。曉得怎麼去攻進這個問題，開始解這個問題。這個問題不一定能夠解決，不過至少你覺得 comfortable，曉得怎麼樣去對付這個問題。要做到這個地步，其實是要懂相當多的東西，普通要經過相當久的 training 才能夠達到這個地步。

要訓練自己去發問

因為我們能力有限，一個人不可能每門都懂，並不是我們不想，可是到了一個題目來的時候，我們往往會產生很多不同的問題，這個題目並不見得是我們本行，我們希望能夠找文獻或者至少找個適當的做研究的人，問他們碰到這個問題要怎麼對付。

所以你們在大學或研究院要懂得怎麼發問，這是一個很重要的 training。發問的訓練，從小的方面來講就是問老師或同學，從大的來講，就是自己做一些比較起來還沒有人問過的問題。一個好的數學家跟差的數學家，往往決定於你問的問題有沒有意思，是不是重要的問題。你要做到後來成爲一個專家時，才曉得你問的問題有沒有意思。

不過對你們年輕人來講，問一些你自己認爲有意思的問題是一個很好的訓練，你問

的問題可能是 well-known 或人家已經解決了，其實也沒有什麼關係，問問題是一個很重要的訓練，並不容易，不過你要盡量在這方面自己訓練自己。

我想你們大學唸到一年班，二年班時，應當從跟同學討論這邊來自我訓練，也要由問老師問題來訓練自己。

討論問題，對懂者或不懂者皆有好處

我不曉得你們清華的同學之間，彼此討論的情況怎麼樣？我覺得這是很重要的。無論是懂跟不懂的人講，或是不懂跟懂的人問，這兩方面都有很大的好處。

當然你自己不懂的問題去問很懂的人，得到的當然對你自己有好處，是 obvious。反過來講，你自己很懂跟一個不懂的人解釋自己懂的東西，也是一個很好的 training。因為往往我們認爲很懂的東西，在向別人解釋時，才發覺自己其實不懂。很多 obvious 的問題，可能是 known 或是 unknown 的。數學命題（一般來講，你大學讀到的是比較已知的命題），你向對方解釋時，往往會發現本來認爲是對的解釋其實是錯的。所以無論是你自己覺得自己學問不大好的，或者是自己學問做得很好的，我覺得互相討論對自己都有好處。

高年級同學比較知道，你在看課外書或參考書時，可以在前面的第一章時，覺得很容易，第二章也很容易，到第三章可能模糊，到第四章時好像很 formal，並不懂什麼意思。爲什麼會產生這現象呢？這很簡單，因爲第一章比較淺一點，你是真的看懂了，第二章其實你不懂，你就跳過去了。這個證明沒看懂，以爲啊，大概這樣子就對了。越看越多時，前

面知識越累積向後面，錯就越來越多，到了最後時，根本就完全沒辦法控制。

假如你看一本書時，你對一個人講，甚至對一個黑板講也可以。對其他同學講，不單有意思，而且同學往往會問你些問題，讓你曉得你什麼地方是沒搞清楚，經過整個 procedure 以後，你會曉得什麼地方你懂，什麼東西你不懂。所以我們往往鼓勵學生一定要教書。

做研究的人也要教書

我們作研究的人也一樣，一定要教書，不能夠單單作研究就算了，不用教書。教書的好處跟剛才講的一樣，你在講自己的研究的時候，甚至在講一個命題時，你往往一路講一路發覺自己有什麼不足的地方。你不講自己的研究，你發覺你好像很模糊搞不清楚；當你向別人講時，一點一滴講出來，你就曉得自己在那方面不足，中間的連繫，並不是你想像的那麼完善。常常因為我們發覺研究不夠 perfect，所以我們還要向前作研究。假如研究都是充足的話，那就可以告一段落了。

所以同學跟同學間，和同學跟老師間的討論，我想都是很重要的。

問問題是重要的訓練

我們的科學（不一定是數學），並不是很 perfect 的科學，在每一個層以上我們都可以問一些很重要的問題。基本上數學裡所有的很簡單的學問，你也可以問出很重要的問題，這些問題你並不一定能夠解決，你可以跟老師討論或是跟同學討論。

不過你在問問題時，你可以將自己整個思想，思考搞得很清楚，是一個很重要的 training，我很鼓勵你們儘量去問一些問題。

中學時問問題的經驗

我覺得很得意的，就是我從很早的時候，就常問一些數學問題。我在中學時開始問一些問題，自己看有沒有辦法解決。

其中有一個問題，我考慮了一年——給了三角形的多少 data，可以決定一個三角形呢？普通給定三個 data，例如一線段兩個角 (ASA) 或三個線段 (SSS) 可以決定一三角形，假如給的是三個分角線的長又如何呢？三角形的 data 一般有邊長，角度，分角線長，中垂線長等等，隨便抽三個出來是否就能決定一個三角形？

你試試看，大部份都能解，只有一、二個不能解。我中學的時候研究過這個問題，考慮了一年多，turns out 這個問題並不簡單。我小時候坐火車，在火車上我都在想，最後看了一本參考書才知道能不能解，不過整個過程對我的思考幫助很大。

從前是二年班的時候開始唸平面幾何，我在三年班的時候開始想這個問題，還有很多比較 complicate 的問題比這個更複雜，所以在最簡單最平凡的問題中你可以找到很多有意思的問題問自己。

問題並不少，在自然界裡或數學中多的不得了，問題是自己去找或如何去找。這個要自己訓練，方法很多，要自己努力，同時要跟別人多來往。訓練要花很多工夫，就是問，從早到晚你究竟花了多少工夫在那裡？你要動腦筋，不是隨便講兩句就行了。

做學問用功很重要

我從前有個 PH. D. 的學生，資質不錯，想法也不錯，我跟他說你一天，最少要花六個鐘點在數學上面想論文，他說不行，後來他也沒有再做下去了。我不曉得你們能不能坐六個鐘頭在想數學，或看數學？做學問跟做數學，concentration 很重要，假如你覺得不能 concentration 的話，你乾脆不要唸數學算了。

從前我大學畢業後，我一天最少有十個多鐘頭在想數學，你並不一定要這樣子，不過你至少要花一定工夫的 concentration 才能做一個好的數學家。你願意花很多工夫後，我想你一定會有收穫。

當然，一個好的數學家，除了用功之外，也有一些運氣在裡面，聰明也有影響。你們能考上清華，聰明應該不會差太遠，不過，我想關係不大，真的要靠的話，我想還是靠你的 concentration。

現在環境比以前好，靠自己都可做好學問

從前，我們在香港長大，很想看參考書，但又貴又不容易找到。你們現在在清華，我想，你們要找什麼都找得到，要找些比較好的研究員來跟你講東西，現在台灣容易得多了，所以我想是在你能不能夠做，最好不要找藉口。

在國外很多大的學校，學生很多，不大容易找得到老師，研究的機會可能也比這邊少得多，我 undergraduate 的經驗就是這樣，主要是你肯用功。

做學問是靠自己；做研究也靠自己，一般來講你到一個學校有剛好跟你做同一行的很少很少，普通頂多二、三個而已。基本上是靠自己。在台灣參考書都有了，不一定要靠別人，要有發動自己的能力，自己肯問問題，單靠自己應該不會差太遠的。

培養興趣越做越有意思

所以你開始做決定後，你要 enjoy 做數學，好比下棋，假若對下棋沒興趣，被逼去下棋就很痛苦，可是你對下棋有興趣的話，你越下越有意思，下到困難的地方更有意思，做數學也一樣，碰到困難的問題更有意思，所以興趣一定是要 establish。

興趣是完全要培養的。如果你問一個小學生：「你對微積分有沒有興趣？」你當然可以講他對微積分沒有興趣，因為他根本不懂微積分。同樣的意思，如果我問你對微分幾何有多大興趣，在你還沒有開始做以前，你當然不曉得，因為你根本不懂微分幾何，這其實是很空洞的問題，不能講我現在有興趣，或我現在沒興趣。

不過你可以講 roughly 你對它有興趣，到你真的做進去以後，你才發現你對它有很大的興趣，有很大的意思。

你們問一些問題好了。

一、(王南傑)：請問丘成桐老師，您當初是什麼原因才選擇做幾何這方面？是否有什麼機緣？另一個問題是我已經大四了，一些老師問過我以後想唸些什麼，我以前的想法是要唸數學，現在碰到這樣的問題，就想好像對分析，幾何比較有感覺，可是唸到代數和

拓樸，又覺得很有挑戰性，好像很可以去唸一番，以您的經驗，不知您有什麼建議？

答：我從前在香港時，覺得泛函分析很有意思，我很想唸泛函分析，你講我為什麼對幾何有興趣，因剛好我去 Berkley 以後，很多人在談幾何的問題，我自己也在看一些幾何的問題，剛好做出一個問題，就這樣做進去了。

其實我的興趣在很多方面，不能講我的興趣就在幾何。我覺得數學不應當將它們分界得很明顯，我也做很多其他方面的，這是第一點。

弄懂第一個問題的回答後，也很容易回答你第二個問題。因為整個數學的走向不應當有很大的分界線，你現在唸大四，既然對代數，拓樸也有很大的興趣，你就應該花很大的工夫去看，將這幾方面基礎全部打好。你要 open minded，根本不要講你對那幾門有興趣，乾脆每一門都儘量唸好就差不多了。

譬如你想唸微分幾何，幾何的東西是在一個流形，在一個拓樸流形才能做的，你非要將拓樸搞清楚，才能做微分幾何，對不對？

假如你要唸分析，其實現在有很多人用拓樸的方法去做，用不動點原理，用比較不同的 topology 去做，這也要學。不然就像我很多朋友，分析很好很好，可是一遇到所謂微分流形上的方程，或一些與這些有關的問題就通通不敢碰。當然也不能講一定不好，就是有一定的 limitation 在裡面。

一個好的數學家，每一門都要做得很好。你現在大四，唸了幾門，至少在大學的課程裡面，每一門都應該唸好。你不要講你有沒有能

力做到，事實上你一定有能力。你現在不把大學課程唸好，你以後還是要唸好。

因為數學本來無分彼此，不要分得太厲害，所以我的建議是在大學時，不一定就講你固定喜歡那一門，可是你可以講我現在是對某門興趣比較大，不過你隨時可以 change，我想這是比較好的觀點。

數學是按重要不重要來分，不是按這一門那一門來分

數學裡面是很自然的科學，就是很 natural 的 phenomena，所以你看了以後知道什麼東西比較重要，什麼東西沒什麼重要。有一些數學我是不願意做的，因為比較 artificial。每個人的觀點不同，我的觀點是我不願意做這些事。我是這樣分的，而不是講你要唸那門那門。因為假如分了以後，到了這一門不能再向前走時，你怎麼辦呢？這是很麻煩的。

許多科目功成就身退，不懂其他就麻煩

歷史上有很多科目到了某一地方以後，不是講他們不行了，而是他們 mature 到了一個地步，被 absorb 到其他科目去了，這個 field 基本上，便不存在。如 general topology, general topology 在歷史上起了一定的重要性，可是在變成 foundation 以後，全被 absorb 到所有 field 去，我們現在根本不談了。General topology 變成一個工具，不成為一個 field 了。

我們可以想像數學裡面有很多這種課，就是講到了某個地步以後，我們對整個理論

understood, 不再需要分這門課, 假如你剛好唸到這門課, 而你又不願意且不懂其他門課, 你做這行就很麻煩了。

二、問: (周鄭州) 我聽說有些數學家會對其它東西感興趣, 譬如對哲學有興趣, 不知道實際上怎麼樣?

答: 當然每一個人在課餘的時候, 都會有不同的興趣, 這是很重要的。我認為凡是對思考有幫助的科目, 你去看它總有好處。哲學對你的思考有幫助, 有好處。譬如愛因斯坦就對哲學有很大的興趣, 愛因斯坦一開始在做廣義相對論的時候, 討論過它哲學上的問題, 他也受了一定的影響。

我們是唸數學, 當然主要的精神是用在數學上面, 我想唸其他對你思考有幫助, 很明顯對你的學科本身也會有好處。每一個人有不同的反應, 你對文學可能有興趣, 我個人喜歡看歷史, 我覺得歷史對我很有幫助。

三、問: 可不可以具體一點說明, 像歷史對數學的幫助在那?

二流數學家做一流問題也算是一流數學家, 歷史經驗幫你選取一流問題

答: 歷史總歸來講, 就是看從前的經驗, 對事物對不同東西的經驗。經驗對你在做題目時是有好處的。

對一個題目取捨的問題, 就是一開始講的, 這是一個表面上很簡單的問題, 其實有很大的學問。一個第一流的數學家, 假如他選取的問題都是第二流的, 他頂多也只能做個第二流的數學家。一個第二流的數學家, 假如他選取的題目都是第一流的, 他不一定做得到

這個題目, 可是他做到這個题目的二分之一, 他也算是第一流的數學家, 因為他對整個數學的發展有一定的貢獻。

什麼叫第二流的學問? 就是講瑣碎的問題, 我們基本上對這些問題都有一定的 insight, 有很多人不太願意做, 或是有其他的原因不大願意去做。你做第二流的問題, 用了很大工夫去做, 你做通了, 對整個數學的進展沒有很大的幫助。

對题目的取捨, 往往是 nonscientific 的, 跟你的經驗有關。譬如哲學的問題或是歷史的問題, 你可以曉得, 經驗對你有幫助, 唸其他書有時對你也有幫助。像文學好了, 你看某些小說, 或是看一本好的小說, 我是講很 standard 的文學小說, 或者紅樓夢或者三國演義, 我不是講武俠小說不行 (笑), 你就曉得取捨的問題有很大的不同。

四、問: (林德鴻) 過去數學家發展很多理論, 後來物理學家發現有許多物理理論的結構跟數學的結構一樣。最近十年超弦的發現, 是因物理學家認為應該用到更複雜的數學來研究高能物理, 所以他們把代數幾何或更抽象的數學引進來, 你覺得這樣走的路會不會是錯的? 楊振寧說過這種從抽象數學出發的路對的機會不大, 不曉得你的看法如何?

答: 這個問題是看你怎麼講法。愛因斯坦一開始做廣義相對論的時候, 是沒有物理的支持, 他是從哲學或者科學哲學的方面來講, 曉得他會要什麼東西, 同時有數學的工具幫忙, 做成了廣義相對論。剛好過沒多久, 就有證明, 某種程度的證明, 廣義相對論是對的。

可是最大的問題是超弦不像愛因斯坦那樣子，積極找出他需要的哲學的 background, philosophically 他需要什麼東西，超弦理論是剛好它沒有一個 strong philosophic background。On the other hand, 他知道有某些東西在裡面，就是講有某種程度的對，不過還沒找到數學的 background 在裡面，所以現在正在找，最大的問題並不是數學問題，而是物理上的 philosophic background 在什麼地方。現在差不多好像在釣魚，你看到魚竿在動，可是看不到魚在那裡，也不知道是不是真的是一條魚（笑）。

不過問題是我們從種種跡象來看，因為它在數學上面是 remarkably consistent, 至少做為一個數學家，我認為在某種程度上超弦應當是描述一個自然界的現象，否則不應當會有這樣一個 consistent 的數學理論在裡面。基本上很多人都是這樣子的看法，就是說我們要找它的 philosophic background 在那裡。現在還沒有找到，基本上的原因是這樣的，超弦 suppose 是 nonperturbative 的理論，可是現在所有的理論都是 perturbative 出來的，問題是 perturbative 和 non-perturbative 的關係是相差很遠的，所以我們不曉得究竟是什麼原因。

問：不過我們用量子場論的方法，也就是用 perturbative 的方法用得非常好，突然一下子跳到超弦這個 level ？

答：我想問題不單是在超弦，力分四個，一個 strong interaction (強作用力)，一個是 gravity (重力)，一個是 weak interaction (弱作用力)，一個是 Maxwell equation

(電磁力)，在 strong interaction, perturbative 就已經不行，已經不對了。

問：Q.C.D. 還是一個 perturbative theory ？

答：不過，Q.C.D. 裡面很多用 linear perturbation 做出來的結果跟實驗已經不符合了。所以我想在 Q.C.D. 就已經開始出現分歧，所以並沒有十分證據顯示超弦理論不對，因為 string theory 假設是 nongravity, 所以我認為並不能成為超弦理論的致命工具。

問：不過蘇聯有一個很好的物理學家，認為 gravitation 甚至不是一個基本力，他覺得重力不該 quantize, 如果從這裡出發的話，那整個超弦理論就錯了，超弦理論是為了要把重力 quantize 。

相信宇宙法則簡單，故希望統一四種力

答：（笑）這個問題是這樣子，我記得陳省身常常跟我講，四個力在那邊很好嘛，為什麼要 unify 它？就是剛才講的，我們相信什麼東西，假如你相信這個宇宙是從一個很簡單的 ground build up, 那為什麼有四種不同的力，我們沒有辦法解釋它，那就一定要 unify 它。就好像數學上，平面幾何有很多不同的公理，不同的理論，可是為什麼我們很高興找到幾個公理，全部將它解釋掉。問題是同樣意思，這是一個信念，我們相信有這個 simplicity, 我們要找幾個公理可以假設，或是幾個簡單的 rule 可以解釋不同的現象，越簡單越好。你們相信的話，這個問題就沒什麼好講的。

問：那依照您的看法，超弦這種東西跟自然界過程還是有某種程度的關連？

超弦可能不能解釋原來想解釋的東西，而是解釋另種現象

答：就是剛才講的，因為它在數學上得到不同的 consistency，因為不是一個 field，而是好幾個不同 field 都很 consistent，這個 consistency 是很 sophisticatedly consistent，基本上它不能解釋它本來要解釋的東西，它應當解釋另一種物理現象。

像從前做規範場 Yang-Mills 的時候，或是從前 Hermann Weyl 作 gauge theory 的時候，往往一開始解釋的物理現象不是要解釋的，最後得到的是一個對的理論，不過這個理論解釋不同的物理現象。

五、問（林吉田）：對於大學部高年級同學，若是對微分幾何有興趣，是否有那些書較適合讀？

答：我不曉得你們這邊唸微分幾何 undergraduate 唸什麼書？（答：通常是 Do Carmo）Do Carmo 唸懂了也很不錯了，算是一個 background。

微幾的書其實也不少，看你自己唸還是跟別人唸。自己唸的話，Spivak 的那本書寫的很 detail，好像還不錯吧！Spivak 的好處就是講它的 notation 弄得很乾淨，讓你知道 notation 是什麼意思，寫得很清楚。

你要跟一個 seminar 唸的話就大不同，Spivak 不是專家，就是不算懂微分幾何，他的書本身沒有給你 feeling，做微分幾何的 feeling。你要唸微幾不要單為唸微幾而唸微

幾，Spivak 的書你唸完後，將基本的 notation 搞懂，應唸其他比較好的書。Milnor 寫幾本書寫得很好，我覺得，其實我從前唸微分幾何就是從 Milnor 那本 Morse Theory 開始唸的，寫的很簡單很 condensed，幾個 chapter 我就看得很多。

六、問（周鄭州）：大學裡面，除了數學以外有很多其他的科系，我們會想去碰文學或其他的東西。做為一個數學家，不曉得對這些身外的世界有什麼看法？

先將本行搞通，再去別做的

答：剛剛一開始講過，第一件事，你一定要決定自己想做什麼。無論做什麼學問，不只數學，你一定要有一段時間 concentrate 得很厲害，一定要將某門學問搞得很懂，搞到一個可以自認是 expert 的地步。你搞得很專以後，其間可能還會牽涉到其他學問，不過，你主要的 concentration 是在那個地方。譬如來講，我一天花十多個鐘頭唸數學，當然有其它幾個鐘頭是跟其他人談談其他東西，有時候系裡的課也聽聽，有時候物理的課也聽聽，不過我有一個主要的 concentration 在那個地方。我不反對你們去看歷史，去看哲學，文學，不過，你要曉得你的主題在什麼地方，就是剛才講的，你認為什麼東西最重要。

又紅又專，兩頭落空

一個人不可能又紅又專（笑），你剛開始的時候，假如你認為你可以同時又搞文學又搞數學，我想你兩頭都搞不好，這我想是不大可能同時搞好的。這種能同時搞兩個完全不同學問還能搞得好的所謂天才，我還沒見過。

有一些人講你要對社會關心，你對社會關心對你做數學並沒有矛盾，你在做數學的同時花了時間去關心社會我不反對，我也不反對你花全部精神作 social 的問題，不過你在做這個決定的時候，你要曉得你數學會做不好，因為你事實上沒有這麼大的天才，能夠同時專心在兩個不同的問題上。我從前在唸研究院的時候，正是釣魚台運動開始的時候，有些人書唸得很好，就開始做釣魚台運動，搞一搞慢慢數學就不行了，並不是他本身不行，而是他花的時間不在那上面，就很難再做下去，這是很自然的過程，沒什麼好講的。

不過問題有層次的分別。歷史上我還沒見過同時搞兩門學門同時搞得真正通的，不大可能的。可是這並不排除你將數學搞通以後，你再去搞文學，或者搞完文學再來搞數學，當然搞完文學再搞數學要比較困難一點(笑)。

很多數學家彈琴彈得很好，唱歌唱得很好，什麼東西都有，有幾個彈琴彈得第一流，不過，很明顯他們曉得什麼是主要的什麼是次要的。做偏微分方程做的很出名的 Morrey，彈琴彈的第一流，在 Banach space 上做 operator algebra 做的很出名的 Enflo，Enflo 跟我同事過，年紀跟我差不多，他彈琴在瑞典是第一名或是第二名，不過並沒有矛盾，他是在做完數學再去彈的，就是說你有個先後。

七、問：老師剛剛說做學問最主要的是 concentration。年輕人感情的問題常會造成困擾，老師當年求學是不是也有這種困擾？如何處理這種事情？能不能給個建議？

答：不應當有矛盾的(笑)。跟剛才一樣，你做學問跟其它東西，感情這個東西可以分得很乾淨的。你應當可以分得很乾淨，我看不出有什麼特別道理有很大的矛盾。

出名的數學家如 Euler，他有十多個兒子，家事很忙。從前做數學跟現在不同，比現在辛苦，你還要去支持整個家庭，有一大堆小孩要 take care，你數學還要做得好。你去圖書館看 Euler 寫的文章，至少幾十本書，就是 collected 幾十本，你單抄書卡就要抄很久才抄得完。這樣子，可見並不一定有矛盾。你不可能整天在想女孩子吧？(笑)。

八、問：愛因斯坦說過一句話：「專家不過是訓練有素的狗。」不曉得你對這句話的看法？

答：首先我不相信愛因斯坦說過這句話。(笑)。其次什麼叫做專家是很難講的問題。假如單是能夠 repeat 人家能夠做的，叫做專家的話，你可以講你說的話是對的。你可以做一個 professional student，每次考試都考得最好，這是訓練有素的，你叫他做狗也好，叫什麼也好。專家不專家實在很難定義，有時候你看小孩子玩 computer game，我覺得他們比我懂，他也算是專家。

機器不如人，乃因無法決定定理好壞

不要講一條狗，一條狗其實比 machine 聰明。現在很多人在做 computer，在做 application，訓練 computer 想題目或者是做定理。現在還差的很遠，最簡單的問題就是“taste”的問題沒有辦法解決，就是一開始我講的選題目的問題。你要決定一條定理好或

一條定理不好，這個問題是 machine 沒有辦法決定的，狗也沒有辦法決定。假使你所謂的專家是這樣子的專家，他當然沒有辦法決定。

我覺得怎麼決定你做的研究有沒有意思，是第一流的還是第二流的，這是一個很嚴重的問題。你當然可以講所謂第一流，第二流是一個封建形式，隨便你講。不過微積分跟加減乘除既然有差別，研究當然也有好的差的。假如你連這點都沒有辦法分開，我們就不能講 high level research。

九、問：我們大一要唸計算機概論，有人說對計算機懂一些對我們將來學數學會蠻有用的，又有人說沒有用。請就您的瞭解；說明計算機跟數學有多大的關係？

利用計算機做數學實驗，對研究有幫助

答：就是剛才講的，其實你學到一門 nontrivial 的學問，對你的學問總是有好處，計算機基本上也是一樣。

尤其是我們做數學，總是不懂我們要什麼東西，不曉得應當什麼是對的，什麼應當是不對的，做研究的趣味就在這裡。假如我們自己曉得什麼是對什麼是錯的話，當然還是可以再前去證明，不過最有意思還是沒有決定什麼是對什麼不對的時候，這時往往我們要做實驗。

我們數學上的實驗很多是用 computer 做，現在因為 computer 比從前 sophisticated 多了，所以對純數學本身有很大的好處。跟剛剛找題目的意思一樣，statistically 我們找找看有沒有辦法曉得有一定的規律出

來，然後從那邊再找我們要求的定理是什麼東西。就是講，你除了單在腦子裡猜外，還可以用 computer 幫你的忙。譬如研究 non-linear 常微分方程和 nonlinear 的偏微分方程，你很難 predict 它的大範圍（大域）的 behavior 是怎麼樣。假如你 computer 弄得很好，你可以用 computer 算看看它怎麼走法，對你有很大幫助。

我個人其實不懂怎麼做數學實驗，我是找人家幫忙，所以你能夠大學裡面就學懂怎麼做這個程序，做一個好的數學實驗，本身是一個很重要的 contribution。

十、問（周鄭州）：在十六、十七世紀的數學家，好像比較涉及其他的領域，比如物理天文方面，現在的數學家好像比較專注於數學，似乎不太一樣，對不對？

現在數學和理論物理的關係與十六世紀差不多

答：其實沒有不一樣。問題是現在的天文，物理比從前的難，沒有辦法不難，我們 observe 的 data 多得多，就實驗物理來講，我們做數學的很難去接觸，並不是我們不想接觸，而是因為 data 實在太多了，很難處理。我覺得我們現在跟理論物理的關係和十六、七八世紀也差不了太遠，不過那時學問分的沒有這麼細，所以看起來好像比較密切一點。其實我想再過 100 年重新再看 20 世紀的數學跟物理的關係，我想不見得差的很遠。

後世視從前，只見重要者，方覺數學與物理關係密切

首先你要曉得因為我們生在這個時代，很多東西看起來比較亂；其實過了一百年後，我們現在做的學問大部份都被忘掉了，剩下幾個重要的，所以那時候看可能比較清楚一點。

我想你看十六、十七世紀的學問，很多東西根本不見了，所以你看不出來，就是當時很多做的全部與數學無關的你也不曉得，單做數學的你也看不出來，你看到幾個主要的人物，看到 Newton 啦，看到 Leibnitz，沒有多少人物可以數得出來，你單看到幾個人的工作，所以看起來好像很密切的樣子。所以再過一百年以後，你看這個世界的工作，也是只看到幾個人而已。圖書館裡面，一天可以找到很多發表的文章，一千多篇文章都有，大部份文章都不見了，所以你可以想像得到。

問：那些不見了的東西，有沒有它的實質？

答：問題是這樣子的，好像打仗一樣，幾十萬人去打仗，結果幾十萬人你都不記得他們的名字，只記得幾個將軍，或者幾個國家。你講他們不重要，他們當然是最重要的，基本上是一樣的意思。

十一、問：老師您會不會覺得我們現在唸的東西相對以前要困難很多？譬如說平面幾何，以前是第一流的數學家在做的，現在我們拿來當基本工具。

學問剛開始時覺得困難，時間一久，了解清楚就容易

答：跟剛才講的意思是一樣的，很多東西當時是困難，過了五十年以後，你再看這

些東西是 trivial。你想想看量子力學在幾十年前除了幾個出名的物理學家以外，可能對所有的物理學家是很難的問題，現在每一個人都在用，同時用的時候 assume take for granted 根本沒有問題。這什麼原因？我們開始研究的時候，整個在 struggle，有不同的理論在裡面，不同的理論當然有錯的或不完美的，最後你要丟掉它，你丟掉他以後，就很乾淨很容易看。這樣我們一路做，一路將整個學問了解得清楚很多，到了解以後，這個學問變得 trivial, absorb 到其他不同的 concept 裡面，就不見了。

我舉個例子來講，當年 Gauss 算很多微分幾何的東西的時候，都覺得很 mysterious，對當時而言，Gauss 出名的定理就是說 curvature 是 intrinsic invariant。我記得我大學的時候，寫得很複雜的型式，看起來難得不得了，可是大概在你懂得微分幾何以後，你就覺得是很 trivial 的 consequence。就是很多計算或很多重要的東西，時代遠了以後，慢慢將它融會，變做一個數學裡面的觀念，不再是工具，這個觀念你接受以後，你根本不會覺得困難。所以我並不覺得我們現在的科學比以前難得多，而是我們剛剛好在這個時候發展科學，很多觀念還沒有弄清楚，才覺得困難。

問：可是整體上知識的累積還是越來越多？

答：我想 so far 我們腦袋可以容許這些，並不見得有特別困難。因為知識不斷的進來，我們不斷的消化它。一個好的定理不 trivial, actually, 一個定理剛證明時，在當時難得不

得了，幾百頁的證明，你當然曉得 Picard 定理，Picard 證明這定理的時候，是一百多二百頁的證明，現在 Picard 定理，大 Picard 定理的證明可以一頁多就證完了，這什麼原因？我們說這個定理重要，或者 for some other reasons 怎麼重要法，就是因為它重要，我們慢慢將它消化了，所以最後的定理是 trivial 的，基本上重要的定理，就算不是短期的，十年，二十年後，這個證明會 trivial，因為普通我們將這些定理的證明分解，分解成很小部份，各小部份 absorb 到不同地方去，最後剩下的是一個 trivial 的證明，歷史上所有的 development 都是這樣。

數學上面，你講平面幾何好了，在埃及的時代，由於阿拉伯人一把火把埃及 Alexandria 圖書館燒掉了，埃及當然是沒有文獻留下來。不過我相信埃及做金字塔做了二千年，做很多不同的，他一定搜存了很多關於平面幾何的定理或者 facts，很多 phenomena，當時沒有 Euclidean axiom，所有的現象很亂，亂得不得了，這邊一條定理，那邊一條定理，你可能覺得很難很難。可是這整個東西，等你定理整個了解以後，就變得簡單了，我想差不多是這個意思。

十二、問 (林吉田)：通常一個數學問題，會衍生二、三個問題來，但是數學家增加的速率遠比問題增加的速率小，會不會造成一大堆問題做不完？

答：這個問題不大嘛，譬如剛才講的平面幾何，到現在你要找平面幾何難的問題還是很多，你去看 Erdős 的 problem section，很多是平面幾何的問題還沒有解決。沒解決

並不表示我們對平面幾何不懂，我們平面幾何基本上是懂的，可是有 open problems 在裡面，並不表示不好，而是表示這個 field 還是很 active 的 field，表示 research 還可以再做下去，這個 field 還有展望。反過來講，一個 field 裡面，沒有 open problem，表示這個 field 我們整個了解，沒有東西讓我們繼續再做下去。這個 field 就是死掉的 field 了。

十三、問：如果您現在從頭再當大一學生，整個生活可以按照自己理想安排，你會怎麼安排大學一直到研究所的生活？

從前大學環境不如現在，經濟，圖書，師資都差很多

答：我剛開始第一句話就講，我從前當學生的過程和現在不一定一樣，因為時代不同，我們那時的香港和你們這個時代就很不同。譬如來講，你們比我們富有多了，我們那時，簡單一句話講，根本沒有錢。你們現在找圖書沒有問題，我猜你們沒有人 complain 圖書不夠，現在專業的工具也是完備多了。我們那時在香港要找一篇文章或一本書都很難，能夠買的書主要是中文書，大陸出版的，要找一本英文書要台灣翻版的，運到香港去偷印，這樣才想辦法弄出來 (笑)，所以我們那時候要找書本身就是個很大的困難，找到有沒錢買也是很大問題。那時老師比你們現在的不行，老師拿一個博士學位就已經很了不起了，不要講懂，大部份拿個碩士我們就覺得很不錯了。所以我大學經驗和你們的經驗有很多不同。

你們的經驗跟我在研究院的經驗差不了太遠，有好的研究人才，借書什麼都不成問

題。那時候我覺得在裡面能夠 concentration, 我在研究院一年半的時候, 基本上 Berkley 能夠 offer 的所有數學課程我都聽過, 我去聽有時還在課裡面講課, 不單是聽, 同時要真的去做。所以要花很多時間, 我不相信你們願花時間去做到這一點。大學跟研究生的時候, 是最容易唸書, 也是了解全部基本工具的最好時候, 否則你畢業以後, 有種種不同的因素, 要重新再唸基本工具就困難得多了。所以我說你能夠花多少時間就儘量花進去, 基本的課程要儘量能夠唸。甚至我認爲你能夠去唸理論物理, 去唸理論化學都很好, 看你自己的興趣, 對你會有很大幫助。

當然你對實驗物理也有興趣最好, 只是這樣你不會來唸數學就是了。

十四、問: 在大學的時代, 尤其像我們大一應看些什麼課外書或雜誌? 因爲大一, 很多東西還沒學, 應該多看多學不同的東西還是多做練習? 譬如平面幾何的練習或高中大學的練習?

大一先唸透微積分, 再來唸課外書

答: 不能籠統的這麼講, 要看每一個人的程度。你大一基本的東西還沒懂的話, 還能看什麼課外書? 我不曉得你們大一唸什麼課? 線性代數唸不唸? (答: 大二才唸。) 主要是唸微積分? 微積分唸懂了沒? 唸不懂就不要跟人家講什麼東西了。至少要將微積分唸得很透, 就是剛才講過, 你不要以爲你要唸代數, 所以不唸微積分, 這不可能的事, 微積分在代數裡面很重要, 所以微積分你非要弄得很懂不可, 否則的話, 根本沒有什麼好講

的。課裡面的書, 你一定要唸懂, 習題要懂得做, 這是第一點。習題要做不是爲了考試, 而是 test 一下你對書裡面內容有多少了解, 然後你再去唸課外書。課外書微積分可以唸很多有意思的課外書, 看你自己的 taste。你去唸一般的, Hardy-Littlewood 很多文章和書其實跟微積分關係大, 或者你去唸 Fourier analysis, 你也可以看分析怎麼應用到 number theory。其實參考書很多, 你儘量去多看一下。不過這跟每個人的興趣有點關係啦! 或者代數的書, linear algebra 都可以。

十五、問 (林吉田): 現在教科書, 像微積分這類書, 越寫越厚, 習題一大堆, 對於這點, 不知您的看法如何?

微積分老書 Apostol 不錯, Hardy 的 inequality 可參考, 可學基本工具

答: 微積分至少有一千多本書, 我不能够都看過(笑)。從前我們看從前的老書, 老書其實很好的, 我們大學的時代讀 Apostol 的書, 有兩本, 現在還蠻不錯的。我覺得在大學一年半, 我從那兩本書學了不少東西。裡面的習題前面一本比較容易做, 深的一本較難做, 我想都可以學學。從前英國式的如 Courant 或 Hardy 的書都寫得不錯, 他們是做分析的專家, 所以寫的書裡面有一定的深度。其實我們從前中學看過 Hardy 寫的一本 inequality, 就是不等式這本書, 是很好的書。這本書對你以後幫助很大, 就是了解不等式是怎麼 derive 的, 多學這個 trick, 怎麼將不等式怎麼弄, 我覺得很有意思。一般認爲很 fancy 的東西不一定就比較重要, 好像泛函分析啦,

Hilbert space 這些東西，並不見得最重要。很多做微積分裡面很基本的工具很重要，解題的方法，這很重要，有很多 combinatoric 的東西很多很要緊。

十六、問（周鄭州）我們唸數學書或上數學課的時候，往往感覺證明很長很長，弄不懂為什麼這麼證，又是怎麼想出來的？唸完整個領域，也搞不通它在幹什麼？

背多分非真懂，試著推廣定理可更了解

答：這是一個很重要的問題，學生往往背了方法，記下來，定理就懂了，證明就完了，因為你基本上將定理背懂了，當然你因此考試可以考得很高分。不過，你要將一個定理想想，最重要的你要了解，為什麼它要這樣子做，究竟為什麼要證這個定理，這個定理有什麼意思，這是第一件事。然後你想想假設你不懂這個證明以前，你怎麼樣去做這個證明，就是怎麼樣 approach 整個問題，這是很要緊的。爲了要了解這個定理，你應該想個辦法，將整個定理看看有沒有辦法 generalize 它，推廣這個定理，最廣泛的情形是怎麼樣？這個辦法是個 simple exercise，我並不是講你爲了推廣定理而推廣，這是一個學習的方法，從這個推廣的過程你會慢慢了解這個定理的證明。你可以隨便找個定理給我，我可以跟你講你大概怎麼樣去推廣它，試試看。

問：像隱函數定理？

隱函數定理是用 iteration 法找方程的解 y ，你可以上電腦試試，會更了解

答：你當然沒有學過 Hilbert space, instead 你試試在二維空間是怎麼樣。你看隱函數是什麼意思，你乾脆試試看你有沒有辦法寫下隱函數出來。隱函數定理你曉得是什麼東西？就是找個方程式，如 two-variable 的，你將一個方程寫下來，試試看找這個 y ，想想看怎麼去找 y ，爲什麼這樣子做法，你就可以曉得，隱函數定理是怎麼證的，回家試試看吧！隱函數定理是用 iteration 的方法證的，整個隱函數定理的 procedure 是如此，你可以試一個 explicit 寫下來的方程，在很具體的情況下，你試試看怎麼去證明它，你就可以曉得整個思路的過程是怎麼樣的。如果有 computer，你可以試試看這整個 iteration 過程裡面，他找的隱函數或他找的解，用 computer 是怎麼走出來的。你 run 它幾次以後，你就可以比較曉得你怎麼走，你可以發現它很慢，你可以 improve，你可以從想辦法 improve，曉得整個思路是什麼樣子。並不是講這個東西很多人想過，不過從企圖去 improve 中，你對這個問題會了解很多。

隱函數定理推廣到 Hilbert space, 就可解微分方程

隱函數定理 generalize 到 Hilbert 空間上面去以後，就成爲一個很重要的偏微分方程的方法，你可以試試看隱函數定理在 Hilbert 空間是怎麼做的，這個 generalize 很重要，當然你沒有學過 Hilbert 空間比較麻煩，不過你可以試試看，你因此可以將 Hilbert 空間學好，這個無限維空間是怎麼

搞，然後你 apply 在 Hilbert space 空間上，你看看這可以用來解微分方程。

隱函數定理是不動點 fixed point theorem 的應用，你當然曉得，你看整個 fixed point theorem 怎麼用，iterate 就是 contraction mapping，那邊可以有許多不同的做法。有很多人一輩子在做隱函數定理的 application，做一輩子 research 用隱函數定理。

所以隨便一個數學問題，你可以找到很多不同的討論的地方。最簡單的問題你都可以找到不同的有意思的地方，所以你這樣子才會將數學看得比較活一點。

十七、問：請問丘教授在大學時代，對數學就是做這樣的嘗試嗎？

答：為什麼不可以呢？反正有時間嘛(笑)。你大學的時候其實最舒服，你做不到也沒有關係，做得到最好，就有興趣。譬如來講，你玩玩 computer 看看，你覺好玩，就玩下去，不好就找個另外的問題再做，沒有誰講你今天做不出來你就不行。所以我想，這跟遊戲差不多，其實跟唸文學也差不多，主要是看你有沒有興趣的問題，你覺得有興趣就繼續玩下去，沒有興趣就算了。

系學會會長：因為時間的關係，我們留最後兩個問題。

十八、問：老師以前讀書的時候，有沒有碰到讀書的壓力？

譬如微積分考算式，怕算錯，總有壓力，整個懂了壓力就不大

答：這問題看你說的壓力是怎麼樣子(笑)。譬如來講，你考試總是希望拿到高分，

尤其考微積分是考算式，看你算的準不準，你怕算錯了，這種壓力當然有。不過如果你將整個微積分看懂了以後，這壓力就不大了。就是說你已經懂了，你給個東西要我來微分、積分，我基本上會做，不過就是 detail。譬如你要積分一個東西，積分出來剛好是他的答案，你當然會有這種壓力。同時積分有不同的 trick，有不同的方法，你當然希望多學一個 trick，怕考試你剛好不懂這個 trick，這種壓力總是有的。on the other hand，你對這整門學問基本上懂了，在一方面你會比人家覺得沒有壓力。中學，大學都會有這種壓力，有壓力好過沒有壓力，假如你覺得沒有壓力，有時候，你根本覺得沒有意思。

人有惰性，有壓力反而好

無可否認，一個人總有個惰性在裡面，就是講反正無所事事也好，不寫文章也沒什麼關係，你就慢吞吞的，可是做學問沒有這麼簡單，你要全盤了解，有一定的壓力在，其實對你很好。

你在學生的時候把考試的壓力看得很重要，其實你考試的壓力比你以後要寫篇好的文章的壓力輕得多了。考試的壓力，就是你們前幾天剛好在考試，你覺得很辛苦，有多少天？你頂多花個十天的工夫在裡面，可是你畢業以後，你要做個好的文章，你怎麼曉得你有好的 idea？你好像覺得很渺茫，on the other hand，經驗講只要你用功的話，你總有一些好的 idea，once for a while，你可以試十次，十次不中，第十一次中了就行了。這跟下棋不同，下棋下錯了舉手無回，不能重新

改變，做研究你改變十次都沒有關係，錯了就繼續第二個方法。所以問題就是剛才講的，你錯了第十次，假如你沒有壓力的話，就算了，不做了，有點壓力，就再試第十一次，你就中了，這沒什麼不好，所以我覺得壓力對你是個好事，不是個不好的事。

出名的科學家，那有只瀟灑沒壓力的？那是唬你的

照我曉得的，基本上所有好的，出名的數學家或是科學家，都有壓力在裡面，有些騙你，跟你吹他完全沒有壓力，很瀟灑的樣子，是做出來的。我覺得近代科學家裡面，最出名最瀟灑的是 Feynman, Feynman 講話輕而易舉的樣子。Feynman 的 lecture 是出名的 lecture，可是每一個人人都曉得 Feynman 花了很多工夫在準備 lecture。他最後的演講很瀟灑的樣子，舉手投足之間，什麼東西就講得很清楚，其實他花了很多工夫去想這個 lecture。Milnor 寫書也是寫得很好，可是 Milnor 也是花了很多工夫去想。

不費吹灰之力？事前要花多少工夫！

世界上沒有一個東西是不花工夫就可以得到很好的結果，他可能剛好想了很久以後，突然有一段時間沒有想，重新再想想出來。他那個時候想出來，好像不花吹灰之力，其實是花了很多工夫。愛因斯坦是出名的物理學家，我在 Princeton 的時候，愛因斯坦所有的工作都在那邊，愛因斯坦做廣義相對論，quantum theory 花了很多工夫，天天都在想這個問題。

壓力可以說是同行間爲了競爭做到同樣的問題，就有很大的壓力。這壓力你講是其他人給的也可以，你講不是也可以。因爲並沒有特別道理一定要將那個東西解決出來，所以跟你的興趣也有點關係，好勝心也有點關係。反正不同的因素在裡面。不過照我曉得，科學家總是有一定的壓力在裡面。很多人講：「我這一個大天才，我今天要想出來就想出來。」沒有這種事，很多人做成這個樣子給你看，根本就是騙人。老實講做成那種樣子給你看，也不是第一流的數學家會跟你這麼講，第一流的工作是 try 了很多次才出來的。

十九、問：（王南傑）請問丘成桐老師，我還有兩個問題！（全場笑）。好幾年前，我們在台灣，常常聽到美國有一些很聰明的華人學生，得到 Westinghouse 科學獎，可是，過了一陣子後，這些人好像都消失了。那些聰明的華人都跑到那裡去了？以您在美國多年的經驗，您看法如何？是不是就像您剛才講的，都跑去賺錢了？還有，您在中國北京當過客座，可不可以請您講一下，那邊學生讀書的態度和這邊的學生有何不同？據我所知，那邊不管你從事什麼職業薪水都一樣，所以他們就很樂意做數學或比較基礎科學方面的研究。

答：Westinghouse 這個獎我覺得很好，因爲 train 一個學生要多方思考才做得出來，當然很多是家長幫忙什麼的，我就不清楚了。據我曉得拿 Westinghouse 獎以後出來的，大部份都是很能幹的 research 科學的人才。你問華裔拿了 Westinghouse 以後都怎麼樣？因爲拿 Westinghouse 的大部份都不唸數學，所以我不能很明確的講他沒有前途或

怎麼樣的。不過很多出名的公司裡面有很多出色的華裔工程師，有很多跟學術界裡面關係並不是那麼 close，所以不一定聽過。

台港大陸美國華人早熟的有些以後不行，基礎也不紮實

不過，有些華裔在美國，或台灣、香港或中國大陸很早畢業或很早什麼的，反而有很多以後不行的。我想這跟 Westinghouse 有一點點不同，因為很早畢業其實沒有什麼了不起，什麼東西都沒有搞通，你早畢業反而對你有壞處，所以有很多出名一下子後就消失了，我倒可以講，我也可以了解他們為什麼不行。Westinghouse 因為唸數學的不多，所以我不能跟你講。

大陸現在經濟較好，唸數學的反而少，台灣有興趣來唸的可能較多

這五六年來，中國大陸唸數學的也很少，原因就是因為現在在中國唸工程唸商學賺錢比較容易。十多年前中國大陸要出國留學，要到美國留學的，基本上他們是要唸理論科學，數學，物理，所以那個時候要出國唸數學物理的很多，他們也爲了這個很用功，當然裡面也有不少爲了學問而唸學問的，不過很多是爲了出國而唸的，我想。最近幾年因爲中國大陸的經濟比以前好得多了，所以他們唸數學的少得多了，跟台灣有什麼不同？我覺得反而這幾年在台灣還比較好一點，我想因爲台灣錢多了，沒有什麼特別道理一定要唸數學，所以大部份唸數學可能是對數學興趣大一點才來唸的，所以台灣以後培養好的唸數學人

才反而容易一點，希望如此。On the other hand，中國是十億人口，要找到唸數學的人還是有的，好的人才還是有的，主要分別是這樣。

二十、問：我們在做作業解問題的時候，常常想了很久都不知道該怎麼辦，可是翻開解答一看，他的想法實在非常怪異，不曉得我們如何去了解這種怪異的想法？它在我們學習數學的過程中扮演什麼樣的角色？對我們整個思想又有什麼影響？

答：我不懂你什麼叫怪異？（笑）。一個數學題目的解決，普通有很多個不同的，尤其你們還沒到 research，普通總有好幾種不同的解法。你講的怪異是花了很多工夫來解決，或是很 natural 的解法？

答：只要以幾個步驟就解決了，然後你會很驚訝。

驚訝就難忘掉，對不對？多學這些想法，是解決問題的小工具

答：其實這對你有個好處，你能夠懂得驚訝就對你很好，你要看懂解決的方法，你就對解決的方法很難忘掉，對不對？假如你不驚訝你就背下來，一下子就忘掉了，這就根本對你沒有好處。

每一個解決題目的方法，假如跟 standard 書裡面講的不同的話，這是一個工具，可以講是解決一個題目的方法的工具，小工具加起來以後，就是等於一個工程師他口袋裡有很多不同的小工具。等你做其它問題的時候，這個工具可以重新再去用，所以爲什麼學生應當去解題目就是這個緣故。就是一方

面你曉得一個數學的大方向，一方面你口袋裡面要有很多工具。

如此如此，這般這般，工具缺乏，到時就蓋不出房子

有很多人講很多 philosophy，很多理論，「我認為數學怎麼樣，怎麼樣，」結果真正到了一個情形要解一個問題，解不出來，這什麼原因？因為他從來不做題目，口袋裡面沒有一定的工具。一個大房子蓋的時候，你可以曉得基本上的工程是怎麼蓋的，可是你不能夠就這樣子講就算了，到了你真正要去蓋的時候，就發覺這邊要上螺絲，那邊要上鐵條，你不懂得上你就蓋不起來，就是這個意思，所以做題目很要緊就是這個樣子。

基本上，如果你沒有想之前就看那個解答，看了以後，這很 trivial 嘛！這基本就是這邊乘一乘，那邊除一除就行了。可是，你先想那個題目，再去看解答，你才了解，這個解答並不是那麼 trivial 的，你搞一搞就搞不懂，為什麼他就搞懂？所以你一定要先想題目再看解答，一定要學這種工具，這種很奇異的要將它學下來，學下來以後，第二次再出現同樣的題目，你就可以用。

附註：本份記錄整理期間，感謝黃振芳先生協助整理及王南傑同學協助謄寫，清大數學系圖書館提供場地及清大應數所提供稿紙。

—本文記錄者任教於國立高雄師範大學數學系—