

對微積分教學的一些小意見

楊維哲

現代科技對於教育的衝擊，主要來自電腦，照道理首當其衝的應該是大學裡的微積分教學；但是在台灣卻似乎沒這回事，這倒是很需要我們數學教職者好好思考檢討的。

我們看到，在美國，相當具有代表性的微積分（教學）改進方案，正由他們的國家科學基金會支持，以哈佛大學為中心（連同七間學校，）要設計一套新微積分課程。這套新課程的指導原則是“三向”（Rule of Three）：任何題材都應該從三個角度（方向）來教：圖像地，數值地（而不止是）解析地，教材的設計要使三者得到平衡，而且學生的學習任何觀念，將因而很完整。

在大學初級課（乃至於任何階段的課程？），視覺化，（圖像化，）永遠是“理解”的一大部份；而一個學生若心中缺少這種圖像化，就談不上真正的學習！

現在的教學（與學習）的一個很大的缺失就在於：學生認為微積分乃是一大堆算則，（「公式」），（連鎖規則，L'Hospital,...）而學習的要務，就是要在腦中建立一套檢索系統，以便「遇到這種題型，就代這種公式；」這種現象，在全世界都普遍如此，只是在台灣，由於考試升學制度的配合心理，變得尤其嚴重，

從上初中一直到升大學，心態上已經定型，因此在大學裡的學習效果就無法改善了。

數學的要務，毫無疑問，是在「概念的建立」，所有的教師，不論優劣，都強調這一點，因此這真是一個大大的諷刺！學生們認為的概念建構，是一種形而上的工作，（「白手的」！）而不是計算數值，點描畫圖的這種形而下的（黑手的）工作；就因為如此，他們永遠建構不了正確有用的概念，於是唯一的解題策略，只有「建立題型庫檢索系統」而已。

我們數學教師，從中學的一直到大學的，當然都有責任。我們什麼時候「黑手地」來教學？計算函數值，點描曲線？即使是四十幾年前，微積分的教授，面對著電機系的大一生，也不使用計算尺的。（教授不一定會使用計算尺！）而我們當然有我們的理由（=藉口，）：概念才重要，何況，內容那麼多，已經教不完了，黑手的例題，講一題就耗掉一節課了！

隨著科技進步，資源增多，狀況改變了，藉口不應該再繼續成立了！

電腦的普及，可以使得從前的「事半功倍」的工作，效率提高萬倍，因此，「三向」指導原則，絕對是行得通的。

具體地談微積分的教學，我提出以下幾點意見。

1.函數概念的複習與整理,是微積分課程的第零章;而從一開始,就要讓學生習慣於數值的,以及圖形的觀點。說得更清楚些,要以一些表列的數值來陳現函數,而不是以解析的式子,然後表現為(螢幕上的)曲線。

2.學生的學習,各科之間都有關聯,教師必須有這種整體性的考量,而不是採取割裂式的本位主義,選擇“最方便交代”的路徑就好了。

因此,微積分雖然是科目的名稱,但我們的立場不應該那麼狹隘;不應該說:“這是數值分析的事”;“這是物理學的事”;“這是電腦概論的事”...微積分固然是通俗名稱,但是最好採取“普通數學”的解釋。只要學生,整體而言,學得更有效率,更多,那就合乎教育的理念了,所以我倒是同意:微積分的課程,因為講授了別的相關題材,把“真正微積分”的題材扣減了一些。

就因為這緣故,我想,在複習函數時,多變元函數就應該補充,加強,因為這是最有用而且學生通常又相當弱的題材!而且這是應該配合數值化,圖像化來教的;我馬上連想到:地圖上的人口密度,以及化學裡的 $2s, 2p, 3d, \dots$ 軌域。

3.函數的觀察與思考,例如:限界,“截距”,增減變化,以及(最重要的!)對稱性(各式各樣:奇偶性,...以及週期性,都包括在內,)當然這也應該配合了圖像的,以及數值的,兩種角度。

4.寫書來說的最方便快捷徑,不一定是,(常常不是!)學習上最方便的。其實,「迴旋而升」,反倒是比「割成一塊一塊依序處理乾淨」,效果更好。

那麼,例如極值問題,有許多是在 pre-calculus 就該先討論!

同樣地,錐線的切線原則(我是說,把 x^2 用 x_0X 代替,把 xy 用 $(x_0y + y_0x)/2$ 代替,這個處方,)可以在微分法之前就處理,(它本身已是微分法了!)至於圓的切線,反倒是可以做為基礎。由此再討論正餘弦之微導,乃至於 $\sqrt{a^2 - x^2}$ 之導微;當然,以「微積分不可避開運動學」的觀點,此時該配合單頻(簡諧)振動來講授。

5.微積分課程的理論嚴謹性,應該用什麼標準?

我們以為這不是太大的困擾。

定義與定理都必須嚴謹;但都是先有物理的「引起動機」;然後,對於難證的,就略過證明,以說明代替證明!容易證明的就清楚地證明。

我想微積分課在大學裡倒是具有非常獨特的教學上的地位:它是數理方法的第一步;因此,論理學的推演,一點都不能忽視!我想,自 Rolle 氏定理出發,得到平均變化率的定理,這確是很容易又是絕頂重要的經驗!(不用說,它也有視覺圖像上的配合。)

學生會不會欣賞、領會?我不能保證,但作為一個大學教授,我卻有這點堅持。

6.依我個人的經驗,先教(定)積分,再教微分,大概是好主意!(並不只是由於歷史的理由!)這是比較容易,比較自然,「引入極限概念」的切入點。大概在高中已有阿基米德的拋物線求積術的介紹,那麼就不妨介紹立方,更高次方單項式之定積分;順便就複習數學歸納法(!),並且介紹簡單的差和分法!

我已經強調了數值觀點的重要性，因此離散的思考本來就非提不可。

當然又可以介紹等比分割，以及 x^{-1} 的積分。(從1到6—如此才可以證明它是 $\log 2 + \log 3$ 。)

7.最後該回到電腦與電算器的使用這個老問題了。

(顯然這是因校而異，—而我對台大相當失望。)我打算從今年起，要求學生，上課時最少有計算器(含有三角函數、對數指數函數者)。

在電腦方面，微積分課應該考慮三件事：

(a) 微積分題材，在電腦上的動畫示範。

(b) 數值的習題，由學生利用現成的軟體做答。

(c) 一些習題甚至考試，由學生寫程式做答，語言不拘，但是限定為程序性的通用語言。

我想每個學校的數學系都應該正視這個問題。

—本文作者任教於台灣大學數學系—