Leibniz 如何想出微積分?

蔡聰明

一. 引言

Leibniz (1646-1716) 在1714 年發表一篇文章叫做“Historia et origo calculi differentialis” (即微分學的歷史與根源), 簡述他發明微積分的整個故事, 開頭就這樣寫著:

> 對於值得稱頌的發明, 了解其發明的眞正根源與想法是很有用的, 尤其是面對那些並非偶然的, 而是經過深思熟慮而得的發明。展示發明的根源不光只是作爲歷史來了解或是鼓舞其他人, 更重要的是透過漂亮的發明實例, 可以增進吾人發明的藝術, 並且發明的方法也可公諸於世。當代最珍貴的發明之一就是一門新的數學分析叫做微分學的誕生。它的內涵已有足夠的解說, 但是它的根源與動機卻少爲人所知悉。它的發明幾乎已經有四十年的歷史了...。

然後 Leibniz 說出他發明微積分的根源就是差和分學。在他的一生當中, 總是不厭其煩地解釋著這件得意的傑作。差和分與微積分之間的類推關係, 恆是 Leibniz 思想的核心。從他的眼光看來, 兩者在本質上是相同的。一方面, 差和分對付的是離散的有限多個有限數; 另一方面, 微積分對付的是連續地無窮多個無窮小。因此, 微積分若少了差和分就好像「Hamlet」劇本少了丹麥王子一樣。

二. 生平簡述

Leibniz 在 1646 年誕生於德國的 Leipzig (萊比錫) 。他父親是萊比錫大學的法學與道德哲學的教授。當他 6歲時, 父親就去世了。因此少年的 Leibniz 在學習的路途上幾乎沒有人指引他。這個小男孩所有的就是父親留給他的一個書的世界。一位聰慧而早熟的孩子, 在約 8歲時就自學拉丁文, 12歲時開始學希臘文。這使得他沒有什麼困難就可以使用父親遺留下來的豐富的圖書館。泡在書海中, 使他獲得了廣泛的古典作品之知識。他有能力閱讀幾乎所有的書, 閱讀變成終身的興趣, 這使他也讀了大量的壞書。後來 Leibniz寫道:

> 當我還很年輕時, 就開始認眞思考各種問題。在15歲之前, 我常常獨自一個人到森林中去散步, 比較並且對照 Aristotle 與 Democritus 的學說。

Leibniz在15歲時進入萊比錫大學就讀, 選讀了宗教、哲學及初等算術, 也聽了歐氏幾何的課, 不過對幾何他並沒有投入。他試圖自己研讀 Descartes 的解析幾何學, 但是對他來說似乎難一點。在17歲時, 他提出一篇哲學論文, 而得到學士學位。那年夏天他到 Jena 大學參加數學班, 然後又回萊比錫大學攻讀邏輯、哲學與法律, 次年就得到碩士學位。20歲寫出一篇優秀的組合學論文, 但是由於他太年輕以致於萊比錫大學拒絕頒授給他博士學位。於是他轉到 Nuremberg 的 Altdorf 大學, 並且在1667年 (21歲) 得到哲學博士學位。

完成學院工作後, 他進入政治界, 服務於 Mainz 政府。在1672年到1676年這段期間, 由於外交任務的關係, 他被派往法國的巴黎。在巴黎他遇到了當時歐洲大陸最有學問的 Huygens(1629-1695), 激起他對數學的熱情, 並且創造了微積分, 使得在巴黎的四年成爲他一生當中數學原創性的顚峰時期 (the prime age of creation), 比美於 Newton 的1664-1666年這段時間。

Leibniz 在1680年給朋友的信裡, 回憶他在1673年於巴黎遇到 Huygens 時所受到的啓發, 他說:

> 那時我幾乎沒有多少時間研讀幾何。Huygens 給我一本他剛出版的關於單擺的著作。當時我對於 Descartes (笛卡兒) 的解析幾何與求面積的無窮小論證法一無所知, 我甚至不知道重心的定義。事實上, 有一次跟 Huygens 討論時, 我誤以爲通過重心的任何直線必將面積平分爲二, 因爲這對於正方形、圓形、橢圓形以及其它某些圖形顯然都成立。聽到我的話, Huygens開始笑了起來, 他告訴我沒有什麼東西能夠超越眞理的。受到這個啓發, 我非常興奮, 在未徹底讀過歐氏幾何的情況下, 我開始研讀高等幾何...。Huygens認爲我是一個好的幾何學家, 比我自估的還要好。他又交給我 Pascal 的著作, 要我研讀。從中我學到了無窮小論證法、不可分割法以及重心的求法。

巴斯卡的著作給 Leibniz 打開了一個新世界, 讓他靈光一閃, 突然悟到了一些道理, 逐漸地經營出他的微積分理論。

Leibniz 在 1676 年回到德國, 於 Hanover 地方當政府的顧問與圖書館長, 長達四十年之久。雖然他的職業是律師與外交官, 但是他多才多藝, 對各方面的學問都有極濃厚的興趣, 並且以哲學家的身份聞名於世。由於他的極力鼓吹, 柏林科學院才得以在1700年成立。

三. 偉大的夢想

Leibniz曾回憶說:

> 我小時候學邏輯, 就開始養成對所學的東西作挖深的思考習慣。

他一生持久而不變的目標是追尋一種普遍的語言 (universal language) 與普遍的方法, 使得可以統合地處理各式各樣的問題。研究 Leibniz 的學者 J.E. Hofmann(1899-1972) 說:

> Leibniz 熱情地, 全心全力地收集與吸收能夠到手的所有知識, 然後給予新的大綜合 (grand new synthesis), 變成統一的整體。

Leibniz 說:

> 我有滿腦子的主意(ideas), 如果能有更厲害的人深入去經營, 將他們美妙的靈心與我的勞苦結合起來, 會是很有用的。

他在1666年 (當時20歲) 寫出"組合學的藝術"(Art of combinatorics) 之論文。在前言中他預測這門新知識可以延拓應用到邏輯、歷史、倫理學、形上學, 乃至整個科學。他又說:

> 假設我們可以用一些基本的字來表達人類的思想, 因此可以想像有一系列的字, 各代表了簡單的概念, 那麼任何複雜的概念都可以用這些字組合起來。從而奇妙的"發明術"(the Art of invention) 就變成可能了: 即所有可能的概念與命題都可以機械地產生。據此我們不但可以探討已知, 而且也可以追尋未知, 進一步從事更深刻的研究。

這個美麗的夢想在 Leibniz 心中盤據了一輩子。事實上, 這只是古希臘哲學家 Democritus 所創立的原子論 (atomism) 的延伸與翻版。Democritus主張宇宙的森羅萬象最終都可以化約成原子及其在空間中的運動、排列與組合, 這是多麼美妙的想像。除了在物理學與化學上產生深遠的影響之外, 在方法論 (methodology) 上, 也開啓了分析與綜合的方法。追究事物的組成要素就是分析法, 反過來由組成要素組合出事物就是綜合法。孫子在他的兵法中, 說得更生動:

> 聲不過五, 五聲之變, 不可勝聽也;
> 色不過五, 五色之變, 不可勝觀也;
> 味不過五, 五味之變, 不可勝嘗也;
> 戰勢不過奇正, 奇正之變, 不可勝窮也;
> 奇正相生, 如循環之無端, 熟能窮之哉!

Leibniz 也夢想著要建立一套普遍的數學, 他稱之爲"Characteristica Universalis", 使得思想也可以化約成計算。他解釋

說:

> 如果有了這樣的數學, 那麼我們探討形上學與道德規範時, 就可以如同幾何學與分析學之論證推理一般。兩個哲學家萬一發生意見衝突, 他們的爭吵就不會嚴重過兩個會計員, 這時只需拿起筆, 平心靜氣地坐下來, 然後互相說(必要的話可找個證人): 讓我們計算一下。

Leibniz 對於發明術一直深感興趣, 他說:

> 沒有什麼東西比看出發明的根源更重要, 我認爲這比發明出來的東西更有趣。

他計劃寫一本書來探討發明術, 可惜從未實現。發明術也許只是人類永遠無法實現的一個夢想, 好像是往昔的煉金術 (發財夢)、煉丹術 (長生夢)、永動機夢、煉預測未來術, 以及近年來的煉基因術 (algeny) 一樣。人類需要有夢想, 今日所證實的, 也許就是過去的夢想。煉金術與煉丹術促成了化學的誕生, 而煉發明術呢? 它也產生了非常豐富的成果, 例如認知科學 (cognitive science)、發明的心理學、人工智慧, 大腦的思考機制之研究, Polya(1888-1985) 關於數學的解題 (problem solving) 與猜測式推理 (plausible reasoning) 之精闢研究, 以及近代科學哲學 (philosophy of science) 一改以往只重科學知識的“邏輯驗證”(the logic of justification) 而變成以“發現的理路”(the logic of discovery) 爲中心, 專注於知識的成長與演化機制 (the growth and evolutional problem) 之探討, 科學革命的結構之研究 (Thomas Kuhn)...等等。

Leibniz 認爲:

> 世界上的所有事情, 都按數學的規律來發生。

這種深刻的“自然的數學觀”比美於 Galileo (1564 -1642) 的名言: “自然之書是用數學語言來書寫的”。據此, Leibniz提倡世界的先定和諧論 (pre-estabilished harmony), 並且論證這個世界是所有可能世界中最好的一個 (the best of all possible worlds), 這是極值問題的一個應用。Einstein(1879-1955) 說:

> 渴望窺探這個先定和諧的自然結構, 是科學家不竭的毅力與恆心的泉源。

Leibniz 更有一顆敏銳的“妙悟靈心”, 他早年就對這個世界感到驚奇而問道:

> 爲什麼是存有而不是沒有呢?
> (Why is there something instead of nothing?)

接著再問:

> 那裡存在的是什麼?
> (What is there ?)

對這些玄奧飄渺的問題深具興趣, 正是“哲學心靈”的明證。古人提出了許多答案, 例如原子論, 畢氏學派的萬有皆數...等等。Leibniz 提出了單子論 (the theory of monads), 單子是構成宇宙的至微單位, 反映著大

千世界, 這恰是微積分中無窮小概念的抽象翻版。

在方法論 (methodology) 上, Leibniz強調充足理由原理 (the principle of sufficient reason): 沒有東西是沒有理由的 (nothing is without reason); 以及連續性原理 (the principle of continuity), 他說:

> 沒有東西是突然發生的, 自然不作飛躍, 這是我的一大信條。

連續性原理有廣泛的解釋, 例如從差和分連續化變成微積分就是一個好例子。另外, 數學家 Cauchy(1789-1857) 根據連續性原理宣稱, 連續函數列的極限函數仍然是連續的, 並且給出了一個錯誤的證明。後來才發現"均勻收斂"(uniform convergence) 必足以保證極限函數之連續性。

四. 差和分學: 從 Pascal 三角到 Leibniz 三角

在1672年春天, Leibniz 抵達巴黎, 他的第一個成就是發現求和可以用求差來計算, 即用減法可以求算加法。後來他曾描述他爲何會想到差分以及差分的差分 (即二階差分) 等等的概念, 並且強調差分扮演著他的所有數學思想的主角。在邏輯中, 他徹底地分析眞理, 發現終究可化約成兩件事: 定義與恆眞語句 (indentical truths)。反過來, 由恆眞語句就可推導出豐碩的結果。他舉數列爲例來展示: 由$A=A$或$A-A=0$出發, 可得

$$A-A+B-B+C-C+D-D+E-E=0$$

即 $A-(A-B)-(B-C)-(C-D)-(D-E)-E=0$

令 $A-B=K,\ B-C=L,\ C-D=M,\ D-E=N$,

則得

$$A-K-L-M-N-E=0$$

$$K+L+M+N=A-E$$

亦即差之和等於第一項與最後一項之差。

換言之, 給一個數列$v=(v_k)$, 考慮接續兩項之間的差

$$v_{k+1}-v_k=u_k$$

所成的數列$u=(u_k)$, 叫做 (右) 差分數列 (還有左差分, 同理可討論), 那麼顯然有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}u_k &= (v_{n+1}-v_n)+(v_n-v_{n-1})\\ &\quad +\ldots+(v_2-v_1)\\ &= v_{n+1}-v_1\end{aligned}$$

採用登山的解釋就很明白了: 想像山路鋪成台階, 每一階相對於地面的高度爲$v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$, 而階差高度爲$u_1, u_2, \ldots, u_n$, 那麼從甲地登到乙地共昇高

$$u_1+u_2+\ldots+u_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$$

另一方面這又等於$v_{n+1}-v_1$, 參見下圖1.

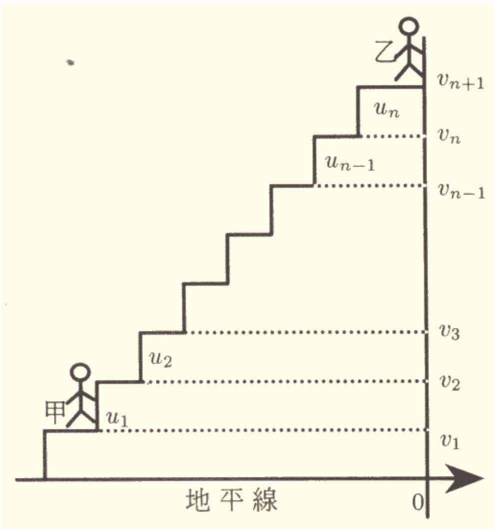


圖1

例子: 考慮立方數列及其各階差分數列:

$$\begin{array}{c} 0,1,8,27,64,125,216,\ldots \\ 1,7,19,37,61,91,\ldots \\ 6,12,18,24,30,\ldots \\ 6,6,6,6,\ldots \\ 0,0,0.\ldots \end{array}$$

由此我們立即讀出

$$1+7+19+37+61=125-0=125,$$
$$7+19+37+61+91=216-1=215,$$
$$6+12+18+24+30=91-1=90,$$
$$12+18+24+30=91-7=84。$$

Leibniz 發現這個規律, 覺得非常新奇、美妙, 像小孩子玩積木一樣興奮不已。進一步, 他研究 Pascal 三角 (1654年, 又叫算術三角)。Pascal 三角是作爲開方、二項式展開、排列組合與機率之用, 參見 [2], Leibniz 卻從中玩索出差和分的道理。下面我們列出 Pascal 三角常見的三種排法:

(I)

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&& 1 &&&&& \\ &&&& 1 && 1 &&&& \\ &&& 1 && 2 && 1 &&& \\ && 1 && 3 && 3 && 1 && \\ & 1 && 4 && 6 && 4 && 1 & \\ 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 \\ &&&&& \cdots\cdots &&&&& \end{array}$$

(II)

$$\begin{array}{llllll} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ \cdots\cdots \end{array}$$

(III)

$$\begin{array}{llllllll} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\text{是萬數之源} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & \text{自然數} \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & \cdots & \text{三角形數} \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & \cdots & \text{角錐形數} \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \end{array}$$

問題: 請說明上述 Pascal 三角的構成法。

在 (II) 的排列法中, 斜對角線上的數相加, 所得到的數恰好構成費氏數列 (Fibonacci sequence):

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$$

這個數列含有許多美妙的性質, 我們不預備講述。

由 (III) 的排列法中, Leibniz 立即讀出許多關於行或列求和的結果, 例如

$$\begin{aligned} & 3+6+10+15 \\ = & (4-1)+(10-4)+(20-10)+(35-20) \\ = & 35-1=34 \end{aligned}$$

同理

$$10+20+35+56=126-5=121。$$

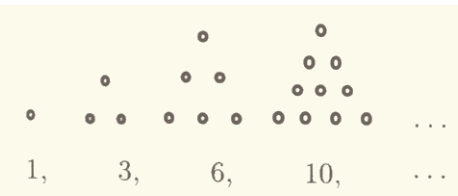
Leibniz 在巴黎遇到 Huygens 時, 對 Huygens 描述他用求差來求和的結果, Huygens 立即建議他做下面富於挑戰性的問題。

問題: (Huygens 問題) 求無窮級數之和

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} = \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)/2}+\cdots \tag{1}$$

這個問題涉及無窮多項的相加, 它源自計算某種賭局 (a game of chance) 的機率。

這個級數每一項的分母恰是畢氏學派"形數" (figurate numbers) 中的三角形數:



因此, 級數 (1) 就是三角形數的倒數之和。Leibniz 立即就求得這個和: 因爲

$$\frac{2}{k(k+1)} = \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}$$

所以首n項之和爲

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}\right) \\ &= 2 - \frac{2}{n+1} \end{aligned}$$

從而

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{2}{n+1}\right) = 2。$$

我們在機率史的文獻上查不到 Huygens 的機率問題, 不過我們倒有下面相關的例子: 一個袋子裝有一個白球及一個黑球, 從中任取一個球, 若得白球就停止; 若得黑球, 則再填加一個黑球到袋中, 變成兩黑一白, 再任取一球, 若得白球就停止; 若又得黑球, 別再添加一個黑球到袋中, 變成三黑一白, 如此繼續下去, 那麼第一回合得白球的機率爲$\frac{1}{2}$, 第二回合得白球的機率爲$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$, 第三回合得白球的機率爲$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$, $\cdots$等等, 故終究得白球的機率爲

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\cdots=1。$$

Leibniz 解決了 Huygens 問題後, 進一步模仿 Pascal 三角, 建構一個今日所謂的"調和三角"(harmonic triangle) 或 Leibniz 三角, 一口氣解決了更多求無窮級數和的問題。

調和三角是這樣做成的: 第一行排上調和數列, 第二行依次排上第一行的前項減去後項之差, 以後就按此要領做下去, 結果如下:

$$\begin{array}{llllllll}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \frac{1}{42} & \cdots & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \frac{1}{105} & \cdots & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{1}{60} & \frac{1}{140} & \cdots & & & \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{105} & \cdots & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & &
\end{array}$$

由此調和三角可以讀出

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots=1$$

從而 Huygens 問題的答案是

$$\frac{2}{2}+\frac{2}{6}+\frac{2}{12}+\frac{2}{20}+\cdots+\frac{2}{k(k+1)}+\cdots=2$$

另外我們也可以讀出

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\cdots=\frac{1}{2} \tag{2}$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}+\frac{1}{140}+\cdots=\frac{1}{3} \tag{3}$$

等等。將 (2) 式乘以3就得到角錐形數的倒數之和:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\cdots=\frac{3}{2}$$

將 (3) 式乘以4就得到

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\cdots=\frac{4}{3}$$

同理也可得

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{21}+\frac{1}{56}+\frac{1}{126}+\cdots=\frac{5}{4}$$

Descartes 說得好:

> 由一個例子的考察, 我們可以抽取出一條規律。(From the consideration of an example we can form a rule.)

換言之, 一個好的例子往往能夠反映出一般規律, 即特殊孕育出普遍, 或所謂的“一葉知秋”、“見微知著”的意思。我們由上述例子歸結出求和的共通模式 (pattern):

定理1: (*差和分根本定理*) 對於給定的一個數列$u=(u_n)$, $n=1,2,\cdots$, 如果可以找到另一個數列$v=(v_n)$, 使得

$$u_n=v_{n+1}-v_n$$

那麼就有

$$\sum_{n=a}^{b} u_n=v_{b+1}-v_a \tag{4}$$

其中$a,b\in\mathbf{N}$ 且$a<b$。

我們引入適當的概念與記號:

定義: 設 $c=(c_n)$ 爲一個數列, 令數列 Δc 爲 $(\Delta c)_n=c_{n+1}-c_n$(簡記爲Δc_n)。我們稱Δc爲數列c的 (第一階) 差分, Δ爲差分算子。$\sum\limits_{n=a}^{b} c_n$叫做定和分 (簡稱和分)。因此, 定理1引出了兩個基本問題:

(i) 研究差分算子Δ在運算上的基本性質。

(ii) 已知一個數列$u=(u_n)$, 求另一個數列$v=(v_n)$使得$u=\Delta v$。

第一個問題很容易, 在此從略。其次, 利用 (i), 第二個問題原則上也不難。在$u=\Delta v$中, 我們稱v爲u的反差分數列或不定和分。事實上, 已知數列$u=(u_k), k=1,2,\cdots$定義一個新數列$b=(b_n)$如下:

$$b_n=\sum_{k=1}^{n-1} u_k \tag{5}$$

則易驗知$b=(b_n)$滿足

$$u=\Delta b$$

換言之, $b=(b_n)$就是$u=(u_n)$的一個不定和分。顯然, u的不定和分不唯一, 可以無窮多個 (例如 (5) 式再加上任意常數都還是u的不定和分), 但是任何兩個不定和分只差個常數。

對這一切作深入而有系統的研究就是差和分學的內容 (包括差分方程)。差和分的學習對於微積分的了解非常有助益, 因爲兩者不過是離散與連續之間的類推與觀照而已。離散的差和分簡單明瞭, 再連續化就得到了微積分。一般微積分教科書往往有如下的缺點: 忽略差和分學, 或類推與連續化處理得不好。

五. Leibniz 如何看出微積分學根本定理?

甲. 從差分到微分

考慮函數$y=F(x), x\in[a,b]$, 作$[a,b]$的分割

$$a=x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}=b$$

得到差分$\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$與$\Delta F(x_k)=F(x_{k+1})-F(x_k), k=1,\cdots,n$。Leibniz 想像 (或根據他的連續性原理, principle of continuity), 讓分割越來越細密, 乃至作無窮步驟的分割, 使每一小段都變成無窮小 (infinitesimal), 於是差分Δx_k變成微分dx(Δ改爲d且丟棄指標k) 其中dx表示無窮小, 它不等於0並且要多小就有多小。從而

差分$\Delta F(x_k)=F(x_{k+1})-F(x_k)$

變成微分$dF(x)=F(x+dx)-F(x)$

$dF(x)$表示獨立變數x變化 dx時, 相應函數值的無窮小變化量。換言之, 微分是差分在無窮小時之類推。

Leibniz 在1684年首次給出微分的概念與記號, 以及如下的演算公式:

例1. 設$F(x)=x^n$則$dF(x)=nx^{n-1}dx$。

Leibniz 的論證是這樣的:

$$\begin{aligned} dF(x) &= F(x+dx)-F(x) \\ &= (x+dx)^n-x^n \\ &= nx^{n-1}dx+{}_nC_2x^{n-2}(dx)^2 \\ &\quad +\cdots+{}_nC_n(dx)^n \end{aligned}$$

因爲第二項之後都含有dx的高次項, 這些都是比dx還高階的無窮小, 棄之可也, 所以

$$dF(x)=dx^n=nx^{n-1}dx。$$

特別地,

$$dx^3=3x^2dx, \qquad dx^2=2xdx。$$

定理2. 設$u=u(x)$與$v=v(x)$爲兩函數, a與c爲常數, 則有

(i) $d(c)=0$

(ii) $d(au)=adu$

(iii) $d(u\pm v)=du\pm dv$

(iv) $d(u\cdot v)=udv+vdu$

(v) $d(\frac{u}{v})=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$

上述 (iv) 今日叫做 Leibniz 規則。

例2. 若$u=x^{-n}$, 則$du=-nx^{-n-1}dx$, 若$u=x^{m/n}$, 則$du=\frac{m}{n}x^{(m/n)-1}dx$。

只要知道一些基本函數的微分公式, 透過定理2就可以求得更複雜函數的微分公式。這就是原子論"以簡御繁"的方法。微分的演

算, 在 Leibniz 之前都是個案的處理, 之後就有了全盤系統化的處理辦法, 這就是進步。

Leibniz 利用微分來求函數$v=v(x)$的極值, 其方法是解方程式$dv = 0$。他也引入二階微分的概念與演算, 並且利用二階微分$ddv=0$的條件來求反曲點 (point of inflection)。

乙. 從和分到積分

數列$u = (u_k)$與函數$y = f(x), x \in [a,b]$, 都是"函數", 一個定義在自然數集$\mathbf{N}$上, 一個定義在區間$[a,b]$上, 因此兩者分別是離散 (discreteness) 與連續 (continuity) 之間的類推。

和分 (summation) 探究數列的求和$\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$問題, 積分探求函數圖形在$[a,b]$之上所圍成的面積, 見下圖2。兩者具有密切的關係。

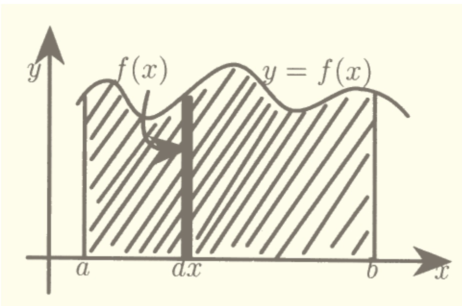


圖2

首先觀察到, 和分可以解釋爲下面圖3之柱狀圖的面積。

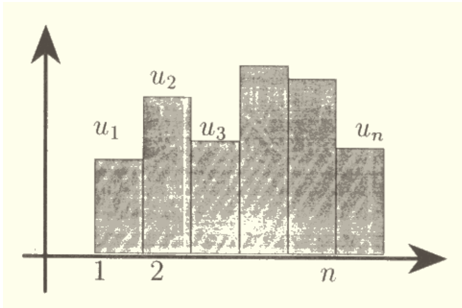


圖3

其次將函數$y=f(x)$離散化:

作區間$[a,b]$的分割

$x_1 = a < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$ 考慮和分$\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$, 其幾何意義就是下圖4諸矩形所成的陰影面積, 它是圖2的近似面積。

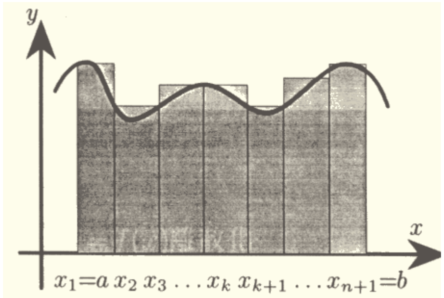


圖4

現在想像將$[a,b]$分割成無窮多段的無窮小段dx(即微分), 想成是差分$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$的極致 (參見圖2), 然後考慮無窮小矩形的面積$f(x)\cdot dx$, 從$x = a$連續地累積到$x = b$。這樣的求和跟和分有關但卻不同, 爲了區別起見 Leibniz 在1686年首度將記號$\sum$改爲$\int$。理由是: S表示求和 Sum 的第一個字母, 將S稍微拉伸變成$\int$, 表示連續地求和。因此, 就用美妙的記號$\int_a^b f(x)dx$來表示圖2陰影領域的面積, 說成f在$[a,b]$上的積分。換言之, 陰影領域的面積就是無窮多個無窮小矩

形面積的連續求和, 即定積分 (definite integral)。

Leibniz 進一步把積分$\int$看作是微分d的逆運算, 例如由公式

$$d(\frac{1}{3}x^3) = x^2dx$$

就得到

$$\int x^2dx = \int d(\frac{1}{3}x^3) = \frac{1}{3}x^3。$$

一般而言,

$$\int dF(x) = F(x)。$$

Leibniz說: *像乘方與開方, 和分與差分, $\int$ 與 d 是互逆的。*

丙. 從差和分根本定理到微積分根本定理

如何求算積分$\int_a^b f(x)dx$呢?

這是一個千古大難題。Archimedes 利用窮盡法 (the method of exhaustion), 只會算出

$$\int_0^a x^2dx = \frac{1}{3}a^3。$$

Cavalieri(1598-1647) 利用不可分割法或無窮小法 (the method of indivisible and infinitesimal) 求得

$$\int_0^a x^ndx = \frac{1}{n+1}a^{n+1}, \quad n = 1, 2, \cdots, 7$$

Fermat(1601-1665) 利用動態窮盡法求得

$$\int_0^a x^{m/n}dx = \frac{n}{m+n}a^{(m+n)/n}$$

這些都是個案解決, 而且都算得相當辛苦。

Leibniz 有了微分與積分互逆的觀點, 以及差和分根本定理, 很快就看出“吾道一以貫之”的微積分根本定理, 利用微分法普遍而系統地解決求積分的難題。這是微積分史, 乃至人類文明史上的偉大時刻 (the great moment)。Leibniz將他的發現在1693年發表。

考慮函數$y = F(x), x \in [a, b]$。作$[a, b]$的分割:

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$$

由差和分根本定理知

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta F(x_k) = F(b) - F(a) \qquad (6)$$

或者

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta F(x_k)}{\Delta x_k}\Delta x_k = F(b) - F(a) \qquad (7)$$

現在讓分割不斷加細, 使每一小段都變成無窮小, 將Δ改爲d, $\sum$改爲$\int$(記號變形記), 上下限指標改爲b, a, 那麼 (6) 與 (7) 兩式就變形爲

$$\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a) \qquad (8)$$

$$\int_a^b \frac{dF(x)}{dx}dx = F(b) - F(a) \qquad (9)$$

從而, 欲求$\int_a^b f(x)dx$, 只要找到另一個函數$y = F(x)$, 使得

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \qquad (10)$$

那麼就有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{dF(x)}{dx}dx = F(b) - F(a) \qquad (11)$$

Eureka!Eureka!我們自然就得到微積分裡最重要的一個結果:

定理 3. (*微積分學根本定理*)

給一個函數f, 如果可以找到另一個函

數F使得

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x) \quad \text{或} \quad dF(x)=f(x)dx \tag{12}$$

那麼就有

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\equiv F(x)\Big|_a^b \tag{13}$$

這個定理完全是定理2的平行類推!我們稱(13) 式爲 Newton-Leibniz 公式, 因爲牛頓也獨立地發現它。今日我們還要求 f 爲連續函數。

Leibniz 創造優秀的記號, 透過差和分根本定理, "直觀地"就看出了微積分根本定理。Leibniz 說:

> 值得注意的是, 記號幫忙我們發現眞理, 並且以最令人驚奇的方式減輕了心靈的負荷。

Leibniz一生對記號非常講究。 數學家 Laplace (1749-1827) 也說:

數學有一半是記號的戰爭。

我們要強調, 記號的適當創造與幾握, 是掌握數學的要訣。下面將 Leibniz 所創造的記號作個對照表:

離散的差和分	連續的微積分
Δ	d
$\sum$	$\int$
x_k	x
Δx_k	dx
$\sum_k$	$\int_a^b \cdot dx$
$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$	$\frac{dF(x)}{dx}$

在定理3中, 赫然出現了$\frac{dF(x)}{dx}$之記號, 這是微積分裡頭的一個關鍵性概念。它代表什麼意義? 如何定義?

首先讓我們來解釋它的幾何意義。$\frac{dF(x)}{dx}$是由$\frac{\Delta F(x_k)}{\Delta x_k}$的無窮小化得來的。顯然

$$\frac{\Delta F(x_k)}{\Delta x_k}=\frac{F(x_{k+1})-F(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$$

代表函數 $y=F(x)$ 的圖形上, 通過兩點$(x_k,F(x_k))$與$(x_{k+1},F(x_{k+1}))$的割線斜率, 參見圖5。

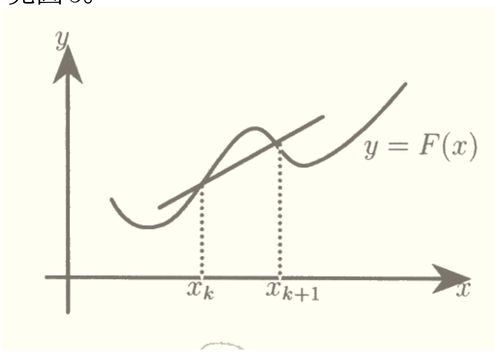


圖5

無窮小化後的$\frac{dF(x)}{dx}$就是通過$(x,F(x))$點的切線斜率, 參見下圖6。

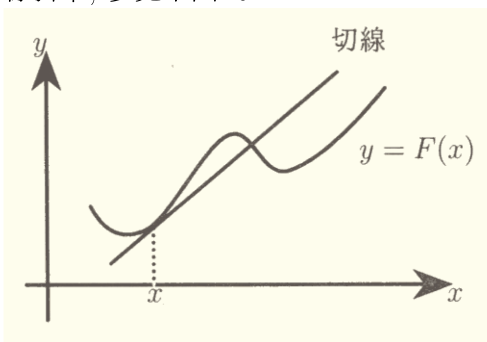


圖6

因此, 求積分$\int_a^b f(x)dx$從幾何觀點來看就是, 找一條新的曲線$y=F(x)$, 使其切線斜率$\frac{dF(x)}{dx}$爲$f(x)$, 那麼$\int_a^b f(x)dx$的答案

就是$F(b)-F(a)$。據此, Leibniz也稱求積分爲求反切線的問題 (the inverse tangent problem)。

下面考慮$\frac{dF(x)}{dx}$的定義。按照上述的思路, $\frac{dF(x)}{dx}$當然定義成

$$\frac{F(x+dx)-F(x)}{dx} \quad 或 \quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$$

其中 dx 代表 x 的"無窮小"變化量, $\Delta F(x) = F(x+\Delta x)-F(x)$, lim 表示取極限 (limit)。這分別代表無窮小論證法與極限論證法。後者是"以有涯逐無涯"的論證方式, 即由割線斜率來探取切線斜率。有時 $\frac{dF(x)}{dx}$ 也記成 $DF(x)$ 或 $F'(x)$。

由$F(x)$求出$\frac{dF(x)}{dx}$叫做導微 (動詞用)。$\frac{dF(x)}{dx}$ 叫做 $F(x)$ 的導函數 (derivative)。已知函數 $f(x)$, 欲求另一個函數$F(x)$使得$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$, 是爲微分的逆算。我們稱$F(x)$爲$f(x)$的反導函數 (antiderivative)。因此, 定理 3 告訴我們, 欲求積分$\int_a^b f(x)dx$, 只要找到$f(x)$的反導函數$F(x)$, 那麼$F(b)-F(a)$就是答案了。這就是用微分法解決積分問題, 普遍而可行的辦法。要點是, 求反導函數並不太難。

如何求一個函數的導函數呢?

在做計算時, 若採用無窮小論證法, 就要記住無窮小詭譎的雙重性格: 它不等於0, 但是要多小就有多小。這樣看來, 無窮小不是死的, 而是活生生的小精靈。通常無窮小dx可正可負, 即正無窮小與負無窮小, 這種情形dx不等於0, 但其絕對值小於任意正實數。

例 3. 考慮$F(x)=x^3$, 則

$$\begin{aligned}
\frac{dF(x)}{dx} &= \frac{F(x+dx)-F(x)}{dx} \\
&= \frac{(x+dx)^3-x^3}{dx}, (因爲 dx\neq 0) \\
&= \frac{3x^2\cdot dx+3x(dx)^2+(dx)^3}{dx} \\
&= 3x^2+3x\cdot dx+(dx)^2 \\
&= 3x^2 \\
& \quad (因爲 dx 可任意小, 故後兩項棄之可也。)
\end{aligned}$$

如果你對"無窮小"感到"不自在", 那麼我們也可以採用極限論證法:

$$\begin{aligned}
& DF(x) \\
=& \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \\
=& \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x} \\
=& \lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x} \\
=& \lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2)=3x^2
\end{aligned}$$

殊途同歸! 在計算過程中, 我們的論證是這樣的: 由於$\Delta x\neq 0$, 故可以從分子與分母消去; 其次因爲$\Delta x\to 0$, 故$2x+\Delta x\to 2x$。這樣的論證其實跟無窮小論證法差不多。目前較通行是極限論證法。

事實上, 極限概念有直觀 (良知良能) 的一面, 也有深奧的一面 ($\epsilon-\delta$與$\epsilon-N$定式), 眞正要說淸楚是相當費事的。留給正式微積分課去解說。

例 4. 因爲$D(\frac{1}{3}x^3)=x^2$, 故由 Newton-Leibniz 公式得

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^2dx &= \frac{1}{3}x^3\Big|_a^b \\
&= \frac{1}{3}b^3-\frac{1}{3}a^3。
\end{aligned}$$

我們作一個很重要的觀察:

給一個數列u, 若數列v滿足$\Delta v = u$, 我們就記爲

$$\Delta^{-1}u = \sum u = \sum \Delta v = v$$

而稱$\sum u$爲u的不定和分, 因而$\sum$與Δ互逆。這樣做非常方便, 定和分只需附加上下限就好:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = v_k\Big|_{k=1}^{k=n+1} = v_{n+1} - v_1。$$

同理, 由

$dF(x) = f(x)dx$ 或 $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

我們就記爲

$$d^{-1}f(x) = \int f(x)dx = \int dF(x) = F(x)$$

而稱$\int f(x)dx$爲f的不定積分 (indefinite integral), 因而$\int$與d互逆。再把上下限套上去就得到 Newton-Leibniz 公式:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)。$$

六. 結語

總之, 微積分就是利用極限或無窮小來建立微分與積分, 再透過微分的逆向運算 (由f求 $d^{-1}f$) 來求積分 (面積、體積、表面積、曲線長、重心及里程等等), 而微分的正向運算 (由 F 求 dF或$\frac{dF}{dx}$) 又可掌握住求切線、速度、密度、變化率及極值問題, 甚至揭開了函數的結構之謎 (Taylor 分析)。

微分法是非常鋒利的兩面刃, 是人類破天荒的成就。S.Bochner 說得好:

> 微分是一個偉大的概念, 它不但是分析學而且也是人類認知活動中最具創意的概念。沒有它, 就沒有速度或加速度或動量, 也沒有密度或電荷或任何其它密度, 沒有位勢函數的梯度, 從而沒有物理學中的位勢概念, 沒有波動方程; 沒有力學, 沒有物理, 沒有科技, 什麼都沒有([8], p.276)。

參考書目

1. C.H. Edwards, The Historical Development of the calculus, Springer-verlag, 1979, 凡異出版社有林聰源的中譯本。
2. A.W.F. Edwards, Pascal's Arithmetical Triangle, Oxford Univ. Press, 1987。
3. Leibniz, Philosophical papers and letters, Ed. L.E. Loemker, Synthese Historical Library, 1976.
4. A. Weil, Review of Hofmann, Bull. Am. Math. Soc. 81, 676-688, 1975.
5. M.E. Baron, The origin of the infinitesimal calculus. New York: Dover, 1987. (初版1969)
6. T. Koetsier, Lakatos' philosophy of Mathematics, A Historical Approach, North-Holland, 1991.
7. D. Struik, A Source Book in Mathematics, 1200-1800, Harvard Univ. Press, 1969.
8. S. Bochner, The Role of Mathematics in the Rise of Science, Princeton Univ. Press (1966), Fourth Printing, 1981。
9. I Grattan-Guinness (editor), From the Calculus to Set Theory, 1630-1910, An Introductory History, Duckworth, 1980.
10. C. B. Boyer, The History of the Calculus and its Conceptual Development, Dover, 1959. (First Published in 1949)

—本文作者任教於台灣大學數學系—