國中數學常規思維方法以及訓練

何昌俊

一. 綜合法與導向思維

綜合法是由因導果。就是從已知條件出發, 看看經過一些推理, 還可以得到一些什麼, 簡稱“可知”。運用這種方法往往枝節橫生, 去向不明。因此, 這種演繹推理要有正確的導向性即導向思維。

1. 聯想性導向思維

這種思維就是把所學的數學知識之間建立聯繫, 形成一個知識鏈。儲存在腦中, 一旦接觸到某題中的題設條件就能聯想到與之相關的知識。即看到了什麼, 就應該聯想到什麼。因此在教學中要有意識地培養學生聯想性導向思維。

如: 1. $\triangle ABC$ 三邊有 $a^2-b^2-c^2-bc=0$, 求角 A 的度數。

由 $a^2-b^2-c^2-bc=0$ 聯想到餘弦定理。

2. $\triangle ABC$ 中, (1) 若 $\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{\cos A}{\cos C}$, 則 $\triangle ABC$ 形狀如何?

(2) 若 $\cos A=\frac{\sin B}{2\sin C}$, 試證: $\triangle ABC$ 是等腰三角形。

(3) 若 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$, 且 $\sin C=2\sin A\cdot\sin B$, 求證: $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形。

(4) 若 $\frac{\cos A}{a}=\frac{\cos B}{b}=\frac{\cos C}{c}$, 試證: $\triangle ABC$ 是等邊三角形。

3. 已知: $\triangle ABC$, 求證: (1) $a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ac\cos B+ab\cos C)$。

(2) $(a+b)\cos C+(b+c)\cos A+(a+c)\cos B=a+b+c$。

2、3 兩題中含有正、餘弦函數, 則應聯想到到正、餘弦定理。實際上把正、餘弦定理代入整理即可證明。

4. 若方程式 $ax^2-\sqrt{2}bx+c=0$。a,b,c 爲鈍角三角形三邊之長, b 爲最大邊。證明: 方程式有兩個不相等的實數根。

由結論聯想到證明: $\triangle>0$。即 $\triangle=2b^2-4ac$, 由 a,b,c 爲三角形三邊, 且存在最大邊 b 的平方聯想到餘弦定理: $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B>a^2+c^2$(因爲 $\cos B<0$), 則 $\triangle>2(a^2+c^2)-4ac=2(a-c)^2\geq 0$, 由討論可知 $\triangle>0$。

2.目標性導向思維

目標性導向思維是從命題設條件根據探求的結論爲目標的演繹推理的過程。具有方向性的思維。在教學中培養學生樹立具有強烈的指向意識。

例1. 在等邊 $\triangle ABC$, 邊 AC、BC 上分別截取 AP、CQ, 使 $AP=CQ$, AQ 與 BP 相交於 H。求證: $\angle PHQ$ 是定值。如圖1。

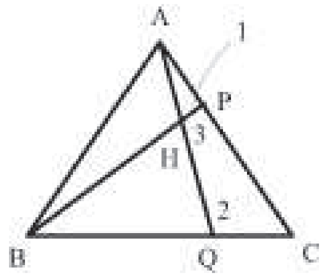

圖1

要證: $\angle PHQ$ 是定值, 若盲目去演繹, 很難找到解題的途徑。由題可知, 無論 P、Q 取在 AC、BC 上哪一位置, 只要 $AP=CQ$, $\angle PHQ$ 値是不變的, 於是取 AC、BC 上中點 P、Q, 這種情況下探求。易知 $AQ\perp BC$, $BP\perp AC$, 而 $\angle C=60^\circ$, 所以 $\angle PHD=120^\circ$。故定值目標是 120°, 如圖2。

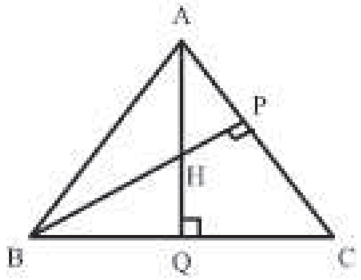

圖2

略證: 如圖1, 易知

$$\begin{aligned}&\triangle ABP\cong\triangle ACQ,\\ \Rightarrow &\begin{cases}\angle 1+\angle 3=180^\circ\\ \angle 1=\angle 2\end{cases}\\ \Rightarrow &\begin{cases}\angle 2+\angle 3=180^\circ\\ \angle C=60^\circ\end{cases} \Rightarrow \angle PHQ=120^\circ。\end{aligned}$$

定值得證。

例2. 如圖3, 在半圓直徑 AB 上任取一點 C, 分別以 AC、BC 爲直徑作半圓, 過 C 作 $CD\perp AB$ 交圓於 D, CD 長爲 a, 則陰影面積爲 ____。

(A) πa^2, (B) $\frac{1}{2}\pi a^2$, (C) $\frac{1}{4}\pi a^2$, (D) $\frac{1}{8}\pi a^2$。

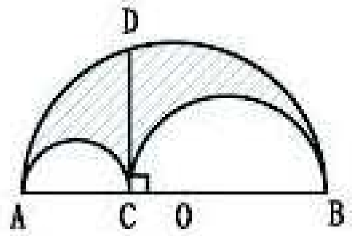

圖3

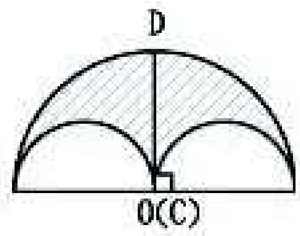

圖4

因爲 C 點爲 AB 上任意一點, 使圖形中陰影面積一定。故考慮到 C 點與 0 點重合情況探求。設 $AB=4$, 則 $AC=BC=2$, $a=CD=2$。如圖 4。

所以, $S_{\text{陰影}}=\frac{1}{2}\pi\times 2^2=(\frac{1}{2}\pi\times 1^2+\frac{1}{2}\pi\times 1^2)=\frac{1}{4}\pi\times 2^2=\frac{1}{4}\pi a^2$。故選 (C)。

3.類比性導向思維

類比性導向思維是將所學的新知識與所學過的知識類似之處進行類比。使學生更有系統地掌握知識, 因爲不同的事物往往存在一些相似的屬性, 若將其類比, 可明確方向找出其規律性。

如幾何中全等三角形與相似三角形類比。平行四邊形與矩形、菱形、正方形的定義、判定、性質列表進行類比。

一次函數與正比例函數類比。

二次函數 $y = ax^2$, $y = ax^2 + c$, $y = a(x+h)^2$, $y = a(x+h)^2 + l$, 在同一坐標系內進行類比分析、歸納出二次函數性質和圖像的平移規律。

學習求函數定義域時與學習的分式及二次根式有意義的條件進行類比等等。

二. 分析法與逆向思維

分析法是執果索因, 是要證得結論, 需要找出什麼, 簡稱"需知"。這個過程是逆向思維。

1.分析法解題, 培養學生逆向思維的品質

例.求證: $\sqrt{2}+\sqrt{7}<\sqrt{3}+\sqrt{6}$。

分析: 爲了該式成立, 只需證明 $(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2 < (\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$, 即 $\sqrt{14} < \sqrt{18}$ 或 $14 < 18, \ldots$。

2.逆向設問, 加強逆向思維的意識

在教學中, 要挖掘教材中互逆因素, 進行逆向設問, 以破除學生思維的固有定勢。

如學習了 $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a \geq 0, b \geq 0)$ 可設問題, 把根號外因式適當改變後移到根號內。如 $-3\sqrt{a}$, $a\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 等。

再如已知方程組 $\begin{cases} ax-y=b \\ 3x+by=a \end{cases}$ 的解是 $x=1$, $y=2$, 求 a、b 的值。若理解同類根式概念後, 反問: m、n 爲何值時, 最簡根式 $\sqrt[3]{2^{n+1}x}$ 與 $\sqrt[m]{2x}$ 是同類根式。

教材中逆向設問的問題無處不有, 要有意識地把握與具有相對性的處理, 可促使學生加強逆向思維的意識。

3.逆用公式法則, 激發逆向思維的興趣

一些數學問題, 若正向思維去考慮, 有時會很困難。若能逆用公式法則, 則很快找到解決辦法, 順利地解決問題。

如求 $(\frac{1}{2})^{1993}\cdot(-2)^{1992}$ 的值。

逆用 $(ab)^m = a^m b^m$, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$。

原式 $= (\frac{1}{2})^{1992+1}\cdot(-2)^{1992}$

$\frac{=\frac{1}{2}(2\times 1}{2)^{1992}}$

$= \frac{1}{2}$。

逆用公式法則, 學生會嚐到甜頭, 進而激發逆向思維的興趣。

三. 雙向思維

一些數學命題, 尤其幾何命題, 同時運用綜合法與分析法效果較好, 它是雙向思維過程。

例1. 如圖5 AD、AE 分別是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 的內、外角平分線。求證 $\frac{1}{BD}+\frac{1}{BE}=\frac{2}{BC}$。

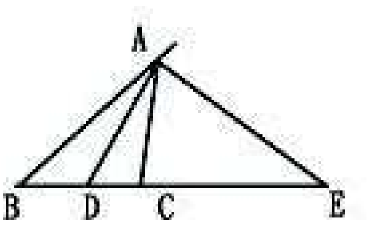

圖5

分析: 欲證: $\frac{1}{BD}+\frac{1}{BE}=\frac{2}{BC}$, 只要證 $\frac{BC}{BD}+\frac{BC}{BE}=2$ 。即 $\frac{BD+CD}{BD}+\frac{BE-CE}{BE}=2$, 即 $\frac{CD}{BD}=\frac{CE}{BE}$。

此式只要利用三角形的內 (外) 角平分線的性質就可得到。

略證: 因爲 AD 是 $\angle BAC$ 的內角平分線,

所以 $\frac{CD}{BD}=\frac{AC}{AB}$ 因爲 AE 是 $\angle BAC$ 的外角平分線,

所以 $\frac{CE}{BE}=\frac{AC}{AB}$, 從而 $\frac{CD}{BD}=\frac{CE}{BE}$。

以下只要將分析過程倒轉即可。

四. 輻射式思維

輻射式思維是知識靈活地放射出去。即放射到相關問題上或延伸拓寬的一種思維, 它帶有創造性。

問題: 如圖6, A 爲圓 O 上的任意一點, 圓 A 與圓 O 相交於 B、C 兩點, E 爲圓 O 的優弧 $\widehat{BEC}$ 上的一點, AE 交圓 A 於 D, 交 BC 於 F, 則 $\overline{AD}^2=AE\cdot AF$。

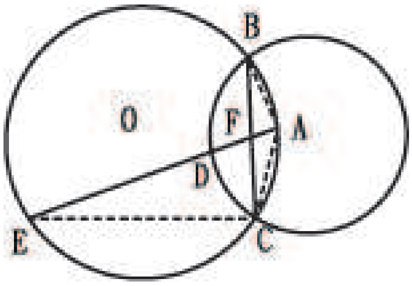

圖6

1.題意不變, 改變結論的形式

如圖7, A 爲圓 O 上一點, 圓 A 與圓 O 相交於兩點 B、C, $AB=4$, 圓 O 的弦 AD 交 BC 於 E, 則 $AE\cdot AD=$ ____。

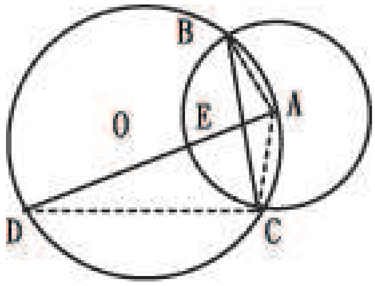

圖7

2.題意不變, 挖掘結論

(1) 如圖8, 圓 M 與圓 O 相交於 A、B 兩點, 點 M 在圓 O 上, 圓 O 的弦 MC 分別與弦 AB, 圓 M 交於 D、E 兩點。求證: (1) $\triangle AMC\sim\triangle DBC$。(2) E 是 $\triangle ABC$ 的內心。(3) 設圓 M 半徑爲 r, 則 $r=\sqrt{MD\cdot MC}$。

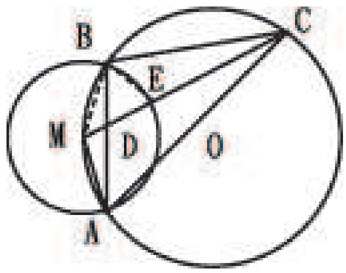

圖8

(2) 如圖9, 已知: 圓 O_2 經過圓 O_1 的圓心, 與圓 O_1 相交於 A、B 兩點, O_1O_2 交圓 O_1 於 E, 延長 O_1O_2 交圓 O_2 於 C。求證: (1) AC 是圓 O_1 的切線。(2) $\angle EO_1B=2\angle CAE$。(3) $\overline{AC}^2=\overline{CE}^2+2CE\cdot O_1E$。

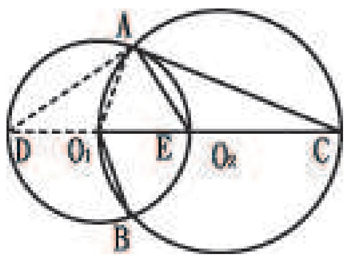

圖9

3.重新加工, 得出新的結論

如圖10, 圓 O 經過圓 P 的圓心, 與圓 P 相交於 A、B 兩點, AC 是圓 O 的弦, CB 的延長線交圓 P 於點 D, CP 交 AB 於點 E, 它的延長線交 AD 於點 M, 求證: (1) $\frac{AC}{BC}=\frac{AE}{BE}$。(2) $CM\perp AD$。(3) $AP\cdot AC=AE\cdot CP$。

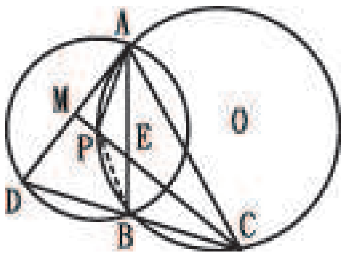

圖10

4.題意不變, 輻射到解三角形中

如圖11, A 爲圓 O 上一點, 以 A 爲圓心的圓 A 交圓 O 於 B,C 點, 圓 O 的弦 AD 交公共弦 BC 於 E 點, 連結 BD、CD。若 $\angle BCD=60°$, 求 $\frac{BD+DC}{AD}$ 的值。

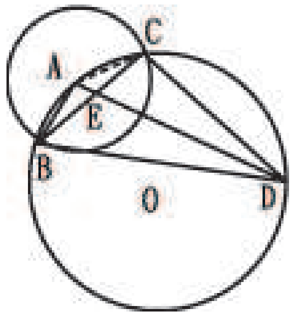

圖11

這樣題目的背景逐漸複雜了, 訓練要求也逐漸提高, 有益於舉一反三能力的培養。

—本文作者任教於黑龍江省七台河市二中—