關於Heron ——秦九韶公式及其引伸

殷堰工

Heron 是古希臘亞歷山大時期的數學家, 公元一世紀, 他在其著作中, 記載了由三角形的三邊長 a, b, c 求其面積的公式:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (1)$$

其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ 是三角形的半週長。

此公式也曾出現在印度、阿拉伯的數學專著中。在 Heron 的《測量儀器》一書中, 確實有公式 (1) 的記載, 而且有兩種證明方法, 因此, 後人便把公式 (1) 稱之爲 Heron 公式。其實, 這並不是 Heron 所得的結果, 而是他以前的大科學家 Archimedes(公式前287∼212) 給出的, 所以現在也有人稱公式 (1) 爲“Archimedes-Heron 公式”。李迪教授專門對這段歷史作過回顧 (見《數學通報》1962年7月號 p42∼43)。Heron以後, 公元七世紀印度數學家巴斯卡拉就使用過此公式。公元十世紀波斯數學家 Abû'l-Wafâ(940∼998) 給出了公式:

$$S=\sqrt{[(\frac{a+b}{2})^2-(\frac{c}{2})]}\cdot\sqrt{[(\frac{c}{2})^2-(\frac{a+b}{2}-b)^2]} \qquad (2)$$

公式 (2) 與 (1) 是貌異質同的, 事實上, 由 (2)

$$\begin{aligned} S^2 &= [(\frac{a+b}{2})^2-(\frac{c}{2})^2]\cdot[(\frac{c}{2})^2-\frac{a+b}{2}-b)^2] \\ &= \frac{1}{4}[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2] \\ &= \frac{1}{4}(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b) \\ &\quad (b+c-a) \\ &= \frac{1}{16}\cdot 2p\cdot 2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot(p-c) \end{aligned}$$

開方得 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$。逆推上式可由 (1) 式得到 (2) 式。一千多年之後, 公元1247年, 東方數壇誕生了一部偉大的著作《數書九章》十八卷, 作者係南宋著名數學家秦九韶 (公元1202∼1261)。在這部標誌中國當時數學水平的巨著中, 秦氏給出了數學應用的九大類, 九九八十一道題, 內容豐富, 比利時數學家於1973年爲之專門以《十三世紀的中國數學》作題予以論述 (詳見 Chinese Mathematics in the Thirteenth Century, 1973, U. Libbrecht, London), 此不贅。《數書九章》中第五卷第二題是:

“問有沙田一段, 有三斜, 其小斜一十三里, 中斜一十四里, 大斜一十五里。裡法三百步, 欲知田爲幾何。”“答曰: 田積三百一十五頃。”(當時一頃=一百畝)

“術曰: 以少廣求之。以小斜並大斜冪減中斜冪, 餘半之, 自乘於上; 以小斜冪乘大斜

冪, 減上, 餘四約之, 爲實; 一爲從隅, 開平方得積。”

這裡的少廣是指《九章算術》第四章少廣章, 是研究已知面積求邊長的問題, 也就是開平方的問題。秦氏把三角形的三邊分別稱爲大斜、中斜和小斜, 斜冪即斜的平方, 餘半之指乘 $\frac{1}{2}$, 自乘於上指平方, 餘四約之指乘 $\frac{1}{4}$, 這裡的積是面積。若大斜、中斜、小斜分別用字母 a, b, c 表示的話, 則上面的術文可譯成現代算式, 即:

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}[c^2a^2-(\frac{c^2a^2-b^2}{2})^2]} \qquad (3)$$

這就是有名的“秦九韶三斜求積公式”。

把題內的數值代入上式, 得

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{1}{4}[13^2\times 15^2-(\frac{13^2+15^2-14^2}{2})^2]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}[38025-9801]}=84(\text{方里}) \end{aligned}$$

以“里法”300自乘得9000乘之, “畝法”240約之, 再以“頃法”100約之, 得田積爲315頃, 這就是原題的答案, 即$\frac{84\times 90000}{240\times 100}=315$(頃)。公式 (3) 與公式 (1) 也是形異實同的。我們將 (3) 式進行恆等變形:

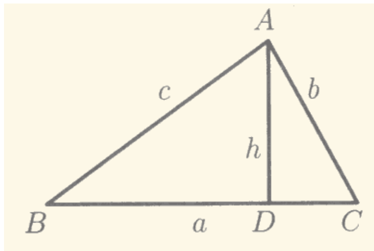
$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4}[c^2+a^2-(\frac{c^2+a^2-b^2}{2})] \\ &= \frac{1}{16}[(c+a)^2-b^2][b^2-(c-a)^2] \\ &= \frac{1}{16}(c+a+b)(c+a-b)(b+c-a) \\ &\quad \times(b-c+a) \\ &= \frac{1}{16}\cdot 2p\cdot 2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c) \end{aligned}$$

開方即得$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, 爲公式 (1)。逆推之, 由 (1) 可得 (3) 式。因此, 人們又把公式 (1) 稱爲“Heron—秦九韶公式”。

遺憾的是這個“三斜求積公式”(3) 是怎麼得來的, 題中並沒有說明。縱觀全書, 可以發現謂之“斜蕩求積”一題的求解過程, 實際上是能夠得知公式 (3) 的來歷的。

如圖1所示, 設h爲a邊上的高, 則$S=\frac{1}{2}ah$, $DC=\sqrt{b^2-h^2}$, $BD=a-\sqrt{b^2-h^2}$, $c^2=[a-\sqrt{b^2-h^2}]^2+h^2$,
即 $c^2=a^2+b^2-2a\sqrt{b^2-h^2}$。

$$a\sqrt{b^2-h^2}=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)。$$



圖一

兩邊平方, 得$a^2b^2-a^2h^2=(\frac{a^2+b^2-c^2}{2})$, $a^2h^2=a^2b^2-(\frac{a^2++b^2-c^2}{2})^2$,

故得 $S^2=\frac{1}{4}[a^2b^2-(\frac{a^2+b^2-c^2}{2})^2]$。

解題的主導思想是“有理化”, 這是秦九韶的創見。問題是秦九韶的發現比 Heron 晚了一千多年, 其發現公式的獨立性對後人來說是有疑慮的, 但從有關資料及當時的歷史來看, 還是能看出一些線索的。其一是十三世紀以前的中國處於封建社會的封閉狀態, 與國外交流幾乎跡絕, 秦九韶是難於看到 Heron 公式的; 其二是當時中國數學處在群

星燦燦的顚峰狀態, 學術空氣甚濃, 作爲一代大家的秦九韶發現此公式的理論基礎是存在的; 其三是公式 (1) 的形式整齊而對稱, 較之公式 (3) 又便於記憶, 從數學家的追求來講, 秦九韶也決不會捨簡求繁, 捨近求遠; 其四是從秦九韶本身的數學功底看, “三斜求積公式”與他發明的“大衍求一術”相比, 實在是小巫見大巫, 發現公式 (3) 對他來說堪爲舉手之勞, 不足掛齒。有鑒於以上幾點, 我們把公式 (1) 稱爲 “Heron-秦九韶公式”是符合情理的。

至於“Heron-秦九韶公式”的證明迄今已不下數十種, 散見於數學史的專著、國內外數學刊物、論文集等, 這裡不多談了。誠然, 用秦九韶的“三斜求積公式”(3) 來求三角形的面積沒有 Heron 公式 (1) 來得方便, 但也不能一概而論, 當三角形的三邊長以二次根式的形式給出時, 公式 (3) 便顯示了獨 特的優越性。譬如, “在$\triangle ABC$中, 已知 $a=\sqrt{41}$, $b=\sqrt{34}$, $c=5$, 求$\triangle ABC$ 的面積”。用公式 (1) 來算, 就殊感困難, 而用公式 (3) 求, 則簡潔明快。下面的頗爲複雜的例子乃是現“全豹”之典例。

個例: 欲使線段 $a=\sqrt{x^2+xy+y^2}$, $b=k\sqrt{xy}$, $c=x+y$ (x,y 均爲正數) 能構成一個三角形的三條邊, 求k的取値範圍。

求解於下: a、b、c 能構成三角形的三邊, 必須且只須面積 S 存在, 面積 S 存在是指 $S>0$。即 $\sqrt{\frac{1}{4}[c^2a^2-(\frac{c^2+a^2-b^2}{2})^2]}>0$ 或者 $\sqrt{\frac{1}{4}[b^2c^2-(\frac{b^2+c^2-a^2}{2})^2]}>0$, 即 $\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4}}>0$

要使$4b^2c^2>(b^2+c^2-a^2)^2$,

即$4k^2xy(x+y)^2>(k^2xy+xy)^2$,

$(x>0,y>0)$。

得$4k^2(\frac{x+y}{\sqrt{xy}})^2>(k^2+1)^2$。

令$z=\frac{x+y}{\sqrt{xy}}$, 則由$x+y\geq 2\sqrt{xy}$ 得 $z\geq 2$。

於是$4k^2z^2>(k^2+1)^2$。

因爲$k>0$, $k^2+1>0$, 所以$2kz>k^2+1$。

解這個不等式得 $z-\sqrt{z^2-1}<k<z+\sqrt{z^2-1}$, 即 $\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}}<k<z+\sqrt{z^2-1}$。

但 $z\geq 2$, 故$[z+\sqrt{z^2-1}]_{\min}=2+\sqrt{3}$,

$[\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}}]\max=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$,

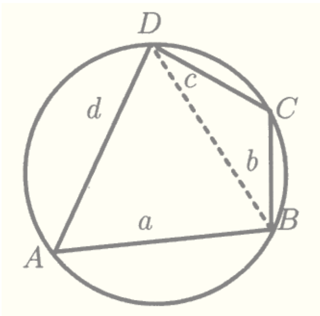
因此 $2-\sqrt{3}<k<2+\sqrt{3}$。

僅從該例我們足見公式 (3) 的作用之一斑。當然, 公式 (1) 的作用在許多情況下比公式 (3) 來得大。因此我們一般總是對公式 (1) 感興趣, 對它的研究也會多一些。由於三角形總有外接圓, 因此一個自然的問題是: 對於圓內接四邊形, 是否有類似的公式? 回答是肯定的。我們有

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad (4)$$

其中, a、b、c、d分別爲一內接於圓的四邊形之邊長, $p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$

證明推導如下:



圖二

在圖2中, 連結BD, 則

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C \\ &= \frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin(\pi-A) \\ &= \frac{1}{2}(ad+bc)\sin A \qquad (5) \end{aligned}$$

在$\triangle ABD$和$\triangle CBD$中, 由餘弦定律, 得

$$\begin{aligned} BD^2 &= a^2+d^2-2ad\cos A \qquad (6) \\ BD^2 &= b^2+c^2-2bc\cos(\pi-A) \qquad (7) \end{aligned}$$

$[(6)-(7)]\div 4$, 得

$$\frac{1}{4}(a^2+d^2-b^2-c^2)=\frac{1}{2}(ad+bc)\cos A \qquad (8)$$

$(5)^2+(8)^2$, 得

$$S^2+\tfrac{1}{16}(a^2+d^2-b^2-c^2)^2=\tfrac{1}{4}(ad+bc)^2$$

即
$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{16}[4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2] \\ &= \frac{1}{16}[2(ad+bc)+(a^2+d^2-b^2-c^2)] \\ &\quad [2(ad+bc)-(a^2+d^2-b^2-c^2)] \\ &= \frac{1}{16}(a+d+b-c)(a+d-b+c) \\ &\quad (b+c+a-d)(b+c-a+d) \\ &= (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) \end{aligned}$$

從而 $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

特別地, 當 $d=0$ 時, 圓內接四邊形退化爲三角形, 公式 (4) 變爲

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

即爲公式 (1), 因此, 公式 (4) 是"Heron - 秦九韶公式"的推廣。

如果再進一步, 所論之四邊形又是某個圓的外切四邊形的話, 則得到的公式更爲簡潔, 有:

$$S=\sqrt{abcd} \qquad (9)$$

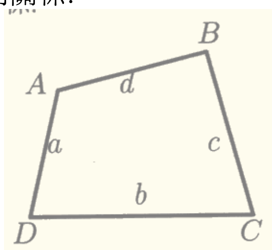
其中, a、b、c、d 是一個內接於圓 O_1, 外切於圓 O_2 的四邊形之邊長。

公式 (9) 的證明及探討美國《數學教師》雜誌 1980 年 5 月號有專論 (詳見該期 Joseph Shin 文), 文中揭示了圓外切四邊形內接於圓的充要條件。事實上, 由外切四邊形的性質知

$$a+c=b+d$$

從而由公式 (8) 即可化爲公式 (9): $S=\sqrt{abcd}$。因此, 公式 (9) 又可看成是公式 (8) 的一個加強形式。

再深入之, 對一般凸四邊形, 如圖3, 有這樣的邊角關係:



圖三

$a^2+b^2-2ab\cos D=c^2+d^2-2cd\cos B$ (10)

$b^2+c^2-2bc\cos C=d^2+a^2-2da\cos A$ (11)

$A+B+C+D=2\pi$ (12)

有外接圓的充要條件是

$A+C=B+D$ (13)

有內切圓的充要條件是

$a+c=b+d$ (14)

顯見, (10)∼(14) 是確定接切四邊形的一組完備而且獨立的條件。爲淸楚起見, 我們不妨將它們再行簡化。

(12) 與 (13) 明顯地等價於

$A+C=\pi$ (15)

$B+D=\pi$ (16)

(10) 可變爲 $(a-b)^2+2ab(1-\cos D)=(c-d)^2+2cd(1-\cos B)$ 應用 (14)、(16), 得 $ab(1-\cos D)=cd(1+\cos D)$

即 $ab\sin^2\dfrac{D}{2}=cd\cos^2\dfrac{D}{2}$

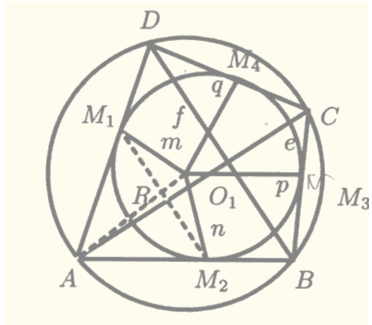
於是有 $\tan^2\dfrac{D}{2}=\dfrac{cd}{ab}$ (17)

同理可得, (11) 變爲 $\tan^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{ad}{bc}$ (18)

這樣, 由邊角的關係 (14)、(15)、(16)、(17)、(18) 可確定接切四邊形, 且是一組完備的、獨立的條件。由此, 我們得到一個聯繫接切四邊形的邊長、面積、內接圓半徑R、外切圓圓的半徑 r 的公式:

$$S=\frac{1}{2R}\sqrt{\frac{r(ab+cd)(ad+bc)(m+n+p+q)}{2}} \tag{19}$$

其中 m、n、p、q 分別爲從內接圓圓心 O_1 到各邊垂線之長。



圖四

證明: 如圖 4, 從內接圓心O_1到各邊的垂足即爲中點M_1、M_2、M_3、M_4。

設兩對角線$CA=f$, $BD=e$, 四邊長$DA=a$, $AB=b$, $BC=c$, $CD=d$。

從圓內接四邊形$AM_2O_1M_1$, 由 Ptolemy 定理有$m\cdot AM_2+n\cdot AM_1=R\cdot M_1M_2$。

但$AM_2=\frac{b}{2}$, $AM_2=\frac{a}{2}$, $M_1M_2=\frac{e}{2}$

但 $bm+an=eR$ (20)

同理, 從四邊形 $O_1M_3CM_4$, $O_1M_2BM_3$, $O_1M_4DM_1$ 可得

$dp+cq=eR$ (21)

$cn+bp=fR$ (22)

$dm+aq=fR$ (23)

$[(20)+(21)+(22)+(23)]$ 得, $(a+c)(n+q)+(b+d)(m+p)=2(e+f)R$

而 $ABCD$ 外切於圓 O_2, 故 $a+c=b+d=\frac{s}{r}$, 於是,

$$m+n+p+q=\frac{2Rr(e+f)}{S} \tag{24}$$

又 $S=\dfrac{abc}{4R}+\dfrac{cde}{4R}=\dfrac{(ab+cd)e}{4R}$,

即 $\dfrac{1}{e}=\dfrac{ab+cd}{4RS}$ (25)

同樣, $\dfrac{1}{f}=\dfrac{ad+bc}{4RS}$ (26)

(25) + (26) 得 $\frac{1}{e}+\frac{1}{f}=\frac{(a+c)(b+d)}{4RS}=\frac{S}{4Rr^2}$

所以$e+f=\frac{Sef}{4Rr^2}$ 代入 (24) 式得

$$m+n+p+q=\frac{ef}{2r} \qquad (27)$$

(25) × (26)得 $ef=\frac{16R^2S^2}{(ab+cd)(ad+bc)}$

回代到 (27) 式得

$$m+n+p+q=\frac{8R^2S^2}{r(ab+cd)(ad+bc)} \qquad (28)$$

即

$$S^2=\frac{r(ab+cd)(ad+bc)(m+n+p+q)}{8R^2}$$

或

$$S=\frac{1}{2R}\sqrt{\frac{r(ab+cd)(ad+bc)(m+n+p+q)}{2}}$$

此即爲公式 (19)。

—本文作者任教於江蘇省蘇州市蘇州教育學院數學系—