回頭是岸?——談高中的「邏輯」教學

葉東進

最近 (82 年12 月) 我看到了高中數學課程標準修訂草案 (教材綱要), 其中高一上第一章的章題是「基礎概念」, 之中的第一節在介紹「簡單的邏輯概念」。之所以提這件事, 是因爲在現行的高中數學裡並未把「簡單的邏輯」當作教材的一部份。如果時光往後倒退十多年, 我們看到當時使用的高中數學實驗教材的第一册第一章在介紹「數學方法」時, 有特別提到「簡易邏輯」在數學中所扮演的角色, 甚至在第二章裡還以不少的篇幅介紹「簡易邏輯」。這樣前後的比較, 難免教人疑惑, 究竟在教材課程的制定中, 專家們是以什麼樣的標準作取捨? 不只是「簡易邏輯」, 對其他一些素材也仍然存有同樣的疑惑。

另外一個令我困惑的是, 每次新的課程或是新的教本所呈現的都是整個的大翻修。雖然改變可能帶來進步, 但也可能導致退步, 關鍵在於改變的是否合理合宜。難道, 我們就不能以已有的課程及教材作籃本, 大家集思廣義, 以開放的胸襟, 謙虛地肯定它的優點而加以保持, 並且審愼地找出它的缺點而加以修改? 使修訂能夠成爲是一件有明確目標而朝盡善盡美的境界推進的工作。

研究課程並非是我的專業, 我只是想依個人的教學經驗, 談談有關「簡易邏輯」在高中的教學上的個人看法。

回顧二十幾年前使用 SMSG 教材的時代, 當時盛行形式數學, 課本的「邏輯」單元裡一出現眞値表這種素材, 坊間的參考書或是教師自編的補充教材裡便像走火入魔似的, 一大堆莫名其妙的「形式命題」應運而生, 使得數學看來像是邏輯遊戲或是符號魔術, 搞得教學的目標模糊了, 教學的內容本末倒置了。

關於「邏輯」在教學中所扮演的角色, 及其在教學上的定位, 十多年前採用的高中數學實驗教材在引言中說的好: 邏輯學乃是討論思考法則的學問, 在一般數學或其他學科中,「簡易的邏輯」是一個基本的工具, 同學並不需要先熟讀「邏輯學」, 再來學習數學或其他學科如物理、化學、經濟學等等, 但是對於邏輯的最簡易基本部分卻一定要弄得淸淸楚楚, 並逐漸熟習其用法。又說: 在幾何學中我們研究空間的性質, 但是空間的性質何止千萬? 而且不斷地研究還會不斷地發現新的性質, 假如我們不設法加以整理, 只是把空間的無數性質, 拉拉雜雜地收集著, 最後勢必成了猴子撿果子, 隨撿隨丟, 所以我們必須要把空間的種種性質加以整理, 而「邏輯推理」就是我們的工具, 我們的不

二法門。···, 數學的目的是要瞭解如數、函數、空間等等的有關性質, 一個有用的性質 (或定理) 好比一部有用的機器, 而那些整理出來的基本性質就好比構成機器所需的各種零件, 邏輯推理便好比適當地連接那些零件的螺絲釘。一個造機器的人一定得會安裝螺絲釘。數學雖然有效而廣泛地應用簡易邏輯, 但是數學絕非邏輯遊戲。

「邏輯推理」既然是必要的工具, 甚且是不二法門, 可見得「簡易邏輯」這種素材在數學上是絕對必要的。問題是, 當它被作爲課程的一個獨立單元時, 如何能不重蹈覆轍被當作是一種邏輯遊戲而致迷失了教與學的目標? 這才是我們眞正應該特別留意關心的, 就如剛才提到的, 對於邏輯的最簡易部分一定要弄得淸淸楚楚, 並逐漸熟習其用法, 這句話其實已經指出, 對於像「推演」、「充分、必要條件」等基本數學語句以及「基集」這些名稱及概念所表 示的意義要先弄淸楚, 而且也要在往後的教與學進程中不斷的適時適地彰顯他們的內涵, 這樣才能使學習者「逐漸」「熟習」其用法, 也就是說「簡易邏輯」在教學上不能把它當成只是一個獨立的素材敎過就算, 因爲它是普遍出現在數學的各個素材及問題之中, 因此我們在教學上務必掌握它的這個特性, 適時適地的顯明出它的作用,「邏輯」的教學才可能落實。

現在, 我要舉一些例子來說明上述的觀點。

例1. 設橢圓的兩焦點是 $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$, 而橢圓上的點到這兩焦點的距離和是 $2a$, $a>c>0$, 則橢圓的方程式是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad b=\sqrt{a^2-c^2}$$

(註: 本問題及下面的證明出自牛頓版的高中基礎數學第三册)

證明: 點 $P(x,y)$ 在橢圓上的充分必要條件是

$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$$

即 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \qquad (1)$

$$\Rightarrow\ \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad (2)$$

平方得

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \qquad (3)$$

化簡得

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx \qquad (4)$$

再平方得

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \qquad (5)$$

取 $b=\sqrt{a^2-c^2}$

得方程式爲 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

一個勝任的敎師在講授這個證明的同時就應該提醒並引導他的學生對底下這個疑問作出思考與回答: 由 (2) 推導到 (3) 及由 (4) 推導到 (5), 因爲使用平方操作, 會不會因此產生增根? 也就是 (2) 與 (3), 及 (4) 與 (5), 它們是彼此互爲充分必要嗎? 或者說它們在邏輯上是等值嗎?

例2. 當一元二次方程式 $x^2+ax+b=0$ 的兩實根, 其一介於 -2 與 -1 之間, 另一介於1與2 之間, 求 (a,b) 的範圍。

解(一): 取 $f(x)=x^2+ax+b$

因爲一根介於 -2 與 -1 之間, 而另一根介於1 與2 之間 (1)

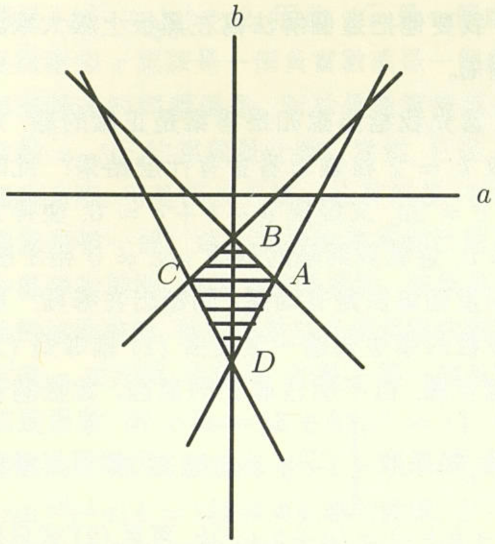
所以

$$\begin{cases} f(-2)\cdot f(-1)<0 \\ f(2)\cdot f(1)<0 \end{cases} \qquad (2)$$

即

$$\begin{cases} (2a-b-4)(a-b-1)<0 \\ (2a+b+4)(a+b+1)<0 \end{cases}$$

因此點 (a,b) 落在下圖所示之四邊形 $ABCD$ 內。



上面是一個正確的解法, 教師在講解時, 仍然要提醒學生, 把敍述 (1) 轉化爲不等式 (2), 它們彼此是邏輯等值嗎? 之所以要不厭其煩地提醒, 主要在使學生能夠培養出一種時時省察因果之間的關係的習慣。由於數學問題的處理常常須要透過觀念與觀念、觀念與式子、式子與式子之間的變換或轉化, 因此要留意在經過變換或轉化之後, 雙方是否持有邏輯上的等值, 如果沒有, 就必須弄清楚它們之間彼此的因果關係, 也就是彼此的充分或必要條件, 這是處理問題應該具備的基本態度, 也是功夫, 也可以說是一種習慣, 這種習慣唯有在教學過程中適時適地的受到提示才能「逐漸」「熟習」而建立起來。

我們不妨看看對上面例2同樣問題, 學生的解法:

解(二): 設 $x^2+ax+b=0$ 的兩實根爲 α 與 β

因此有 $\begin{cases} -2<\alpha<-1 \\ 1<\beta<2 \end{cases}$ (1)

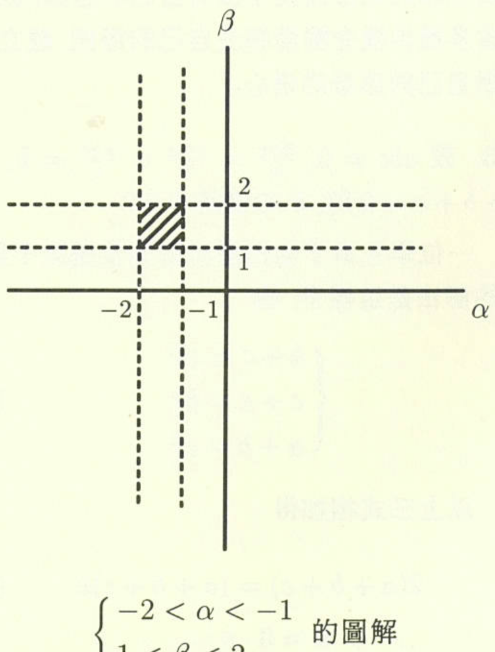
隨之

$$\begin{cases} -1<\alpha+\beta<1 \\ -4<\alpha\beta<-1 \end{cases} \quad (2)$$

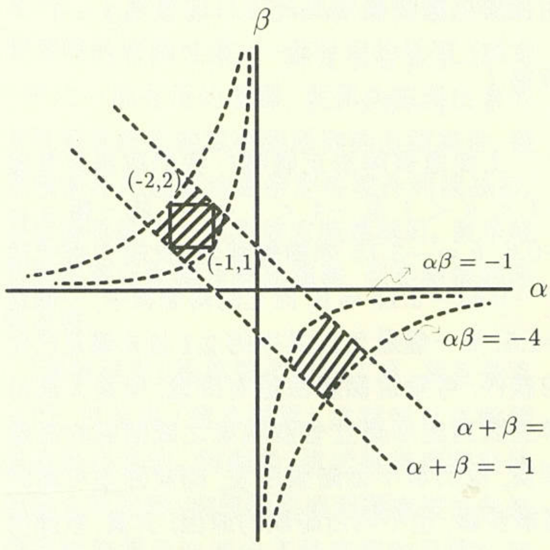
由根與係數關係: $\alpha+\beta=-a$ 及 $\alpha\beta=b$

故得 $\begin{cases} -1<a<1 \\ -4<b<-1 \end{cases}$

上面這個解法正確嗎? 我們取滿足答案 $-1<a<1$ 及 $-4<b<-1$ 的一組 $a=-0.6$, $b=-3.15$ 來檢驗看看, 此時方程式爲 $x^2-0.6x-3.15=0$, 而它的兩個根中, 一個是 -1.5, 另一個是 2.1, 其中的 2.1 並未滿足已知的條件, 可見這個解法是有問題, 但是大部份學生因爲並未建立省察因果之間關係的思維習慣, 他們看不出錯誤所在, 即使知道可能的錯誤步驟, 也不明白錯誤的原因。其實, 教師稍作引導, 學生將不難發現問題是出在由 (1) 推導到 (2) 這一步驟, 也就是要問: (1) 與 (2) 是邏輯等值嗎? 利用座標平面圖來解 (1) 及 (2) 式, 就能清楚地看出 (2) 只是 (1) 的必要而非充分條件, 換句話說, 滿足 (1) 的固能滿足 (2), 但是滿足 (2) 的不一定能滿足 (1), 因此由 (2) 所導出的結論 $-1<a<1$ 及 $-4<b<-1$ 對原問題的已知部分就不是充分的了。



$\begin{cases} -2<\alpha<-1 \\ 1<\beta<2 \end{cases}$ 的圖解



$$\begin{cases} -1 < \alpha+\beta < 1 \\ -4 < \alpha\beta < -1 \end{cases}$$ 的圖解

我常鼓勵學生到黑板上去寫出他們的想法或解法, 供大家評論, 一來我可以清楚學生的思維, 對他們的錯誤給予適時的指正; 一來透過討論, 常常能激盪學生的想像而迸出創造的火花, 另一層意義是我不希望學生只是光會抄襲教師的東西而完全沒有自己的想法。教師應當多提供機會開發學生自己的潛能, 建立他們對自己的思維的信心。

例3. 設 $abc \neq 0$, $\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} = k$, 當 $a+b+c=0$ 時, k 的值是多少?

一位學生拿了他的解法來問我說對不對? 他的解法是這樣子: 由

$$\begin{cases} b+c=ak \\ c+a=bk \\ a+b=ck \end{cases} \qquad (1)$$

以上三式相加得

$$2(a+b+c)=(a+b+c)k \qquad (2)$$

$$\therefore \quad 0 = 0\cdot k$$

故 k 爲任意實數。

我要他把這個解法寫在黑板上讓大家討論看看。

首先我指出說如果答案是正確的話, 那麼取 $k=2$ 檢驗看看會有什麼結果? 此時 $b+c=2a$, 又因爲 $a+b+c=0$, 便得到 $a=0$, 這就與問題的假設 $abc\neq 0$ 相矛盾, 可知這個解法是有問題。問題出在哪裡? 雖然多數的學生知道一定是由 (1) 推導到 (2) 這個步驟, 但不明白眞正的原因。我提醒他們說, 如果取 $\begin{cases} b+3c=ak \\ -c+a=bk \\ a+b=ck \end{cases}$, 仍然可以導得 $2(a+b+c)=(a+b+c)k$, 可見 (2) 式只是 (1) 式的必要而非充分條件, 兩者並非邏輯等值。因此由 (2) 所推得的結論: k 爲任意實數, 其範圍是要比眞正的答案大得多。下面是一個正確的解法:

由 $b+c=-a$, 知 $\frac{b+c}{a}=-1$, 同理可得 $\frac{c+a}{b}=-1$ 及 $\frac{a+b}{c}=-1$。

例4. 設 $\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}=\sqrt{2}$, 求 x 的值。

(註: 本題出自牛頓版高中基礎數學第一册第五章的隨堂練習) 所有的學生都是同一個樣子的解法:

由 $\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}=\sqrt{2}$

兩邊平方得

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+2=2$$

因此

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

$$(\sqrt{x})^2+1=0$$

故 $x=-1$。

得到唯一的解 -1, 看來這個解法該沒什麼問題才對吧, 不然的話原問題就會成爲無解。可是問題絕非如此表面的簡單。首先, 我們可以斷定 $\sqrt[4]{x}$ 一定不是實數, 否則 $\sqrt[4]{x}$ 將會

滿足 $|\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}|\geq 2$, 因此 $\sqrt[4]{x}$ 是一個虛數, 從而推知 x 應該是一個負實數或是一個虛數, 那麼接著的問題便是: 對於是負實數或是虛數的 x, $\sqrt[4]{x}$ 的意義是什麼? 當然, 它是 x 的四次方根, 可是四次方根一共有四個, 它指的究竟是哪一個? 這一問題的答案雖已超出高中數學的範圍, 但這並非是重點。如果參考一般的複變書籍, 他們都是以多值函數的觀點來定義 n 次方根, 也就是, 如果 z 是一個負實數或是虛數, 則 $\sqrt[n]{z}=\{\alpha\in\mathbb{C}|\alpha^n=z\}$, 根據這樣的定義, 那麼就有 $\sqrt[4]{-1}=\{\cos\frac{2k-1}{4}\pi+i\sin\frac{2k-1}{4}\pi|\ k=1,2,3,4\}$, 換句話說, $\sqrt[4]{-1}$ 指的可以是下列四個虛數中的任何一個: $z_k=\cos\frac{2k-1}{4}\pi+i\sin\frac{2k-1}{4}\pi$, $k=1,2,3,4$, 但是

$$\frac{1}{z_k}=\cos\frac{2k-1}{4}\pi-i\sin\frac{2k-1}{4}\pi$$

因此

$$z_k+\frac{1}{z_k}=2\cos\frac{2k-1}{4}\pi,\ k=1,2,3,4$$

然而, 只有當 $k=1$ 及 4 時, $z_k+\frac{1}{z_k}$ 才會等於 $\sqrt{2}$。所以, 對學生們的解法, 教師還是應該向他們指出, 過程之中使用了平方的操作是有可能帶出原方程式的增根, 也就是要提醒他們經由平方的操作把一式推導到另一式時, 要留意兩個式子是否彼此有邏輯等值。

上面所舉的雖然只是幾個例子, 但是從課堂中我們可以瞭解到學生在解題過程中, 往往隨意的使用變換而沒有去留意變換所可能影響到式子與式子之間的因果關係, 這種思維上的盲點也正暴露了他們的邏輯思考的缺乏訓練。邏輯思考的訓練必須要達到成爲思考的習慣, 才能在思維的運用中自然地流露, 而這種訓練絕不是光把「簡易邏輯」當作一項獨立的素材拿來教學就能竟其功, 唯有在平常教師的講課及學生的演習中適時適地的提示, 使學生熟習而在潛移默化之中, 成爲他們思維的一種習慣。

—本文作者任教於新竹科學園區實驗高中—