問答與數學教學

黃毅英

反省、發問與反問

人的智慧增長恐怕都是由懷疑開始。所謂「小疑小悟、大疑大悟、不疑不悟」,《論語》述而第七中亦云「不憤不啓、不悱不發」。

認知心理學認爲智略的建成實有賴於曲解後從矛盾所得之調節。比方學生起初誤以爲所有形如$\sqrt{a}/\sqrt{b}$(其中a、b 均不是平方數) 皆爲無理數 (曲解), 從$\sqrt{8}/\sqrt{2}$的矛盾中, 他即重新調節其智略。柯柏 (Kohlberg) 等人亦透過兩難 (dilemma) 問題提升個體之道往認知階次 (Scharf, 1978)。

Scandura(1977) 指出, 當解題 (有譯作「解難」, 以表解決難題, 有別於解明白題目的意思) 者遇上困難時, 他會轉而尋找統攝較低層次法則之高層次法則而難題是必須具有「不安之威脅」(threat of discomfort), 令解題者至不可不解決之境地, 解題能力即可在解題過程中得以提高 (黃, 1990)。

中國古代的禪師, 亦要設法挑起「疑情」, 其中的機鋒轉語便「爲宗門勘窺見地造詣, 問答辯論之特別作風」(南, 1978)。蔡 (1986) 的《禪師啓悟法》更分析有運用符號的啓悟法、運用語言的啓悟法、運用動作之啓悟法、運用物件與運用沉默的啓悟法等, 而其中運用語言的啓悟法便出以肯定句、否定句、疑問句、反詰句、條件句、感嘆句等作詳釋。

在西方, 蘇格拉底在與曼諾 (Meno) 的對話中示範了學習非謂教授者授與學習者以知識的過程, 而是透過發問務使學習得到「追憶」(附錄一)。

懷疑、反省、發問與反問可謂異曲同功的 (黃, 1987a), 各各只因發問形式之不同而別。比如老師問: 「等差級數如何求第n?」此爲發問。學生答了「用公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$」後再問「何謂a_1?」、「何謂d?」、「不知a_1, 只知 a_3 又如何?」等皆爲反問。久之, 學生或會不待老師反問即可問自己, 即爲反省了。這比由老師訂定「知道 a_1 與 d時用公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$; 不知道時先求出 a_1 與 d」的效果迴異。況且只知a_3, 亦不一定先求a_1, 也大可把原先的 a_3設作首項而求$(n-2)$項。

而「不知 a_1 時又該先用那道公式?」、「不知 a_1 時又有甚麼辦法?」與「不知 a_1 時又如何呢?」可能會有不同的效果。就正如老師帶領學生旅行, 說「有意外立即通知老師」與問「有意外你會立即通知誰」、「有意外你們會怎辦?」或「如遇意外, 你會有甚

麼打算?」的效果也不一樣。可惜正如 Lampert(1990) 所說:「一般數學被聯想以肯定性: 認識之, 並能得正確答案, 並快速地 (得之)。此等文化之假設乃由學校經驗所形成, 其中做數學意爲遵遁教師所定下之規則而行; 認識數學意爲當教師問問題時能回憶並應用正確的規則; 而數學眞理之決定乃當答案被教師認許之時, 對如何做數學及學校裡認識方式之信念乃由經年累月之觀看、聆聽及練習而形成。」

文中續云:「於課堂內, 教師與教科書均爲權威, 而數學並非一可供創造或探索之學科。於校內, 眞理乃由教師之講解和題解册所給予$\cdots$ 故此在學校裡認識數學變成只是擁有一撮未經解釋信念$\cdots$」

承接著 Lakatos (1976) 的看法, Lampert (1990) 並指出數學之建立應爲合理猜想及夾雜了勘察和反駁的曲折歷程。

不少人認爲數學學習乃一純粹認知行爲, 然亦有指出在學習數學的過程中, 社群活動實爲主要 (Cobb, Wodd, Yackel, & McNeal, 1992; Solomon, 1989; Yackel, Cobb, Wood, Wheatley, & Markel, 1990)。所謂的社群活動是包含於難題、 解決、 解釋與辯明 (justification) 此四種營造數學之活動中 (Barnes, 1982; Cobb, Wodd, Yackel, McNeal, 1992; Lampert, 1988; Knorr-Cetina, 1982; Ty- moczko, 1986)。Cobb, Wodd, Yackel, and McNeal (1992) 更分野出學校數學與探討數學 (enquiry mathematics) 的兩個典型。在探討數學的典型中, 學習者透過分享共同的數學問題、尋求解決, 當其中一些人提出解決方案時, 他們得向其他人解釋其想法與理據, 對質疑加以辯明。這些活動均是社群成份多於認知成份的。教師的任務即爲選定討論之問題並引起學習者作多方面之討論 (Lampert,1990)。可以想見, 此種學習既由問題開始, 而整個學習過程即包含了連續教師與學生間及學生與學生間接續著的發問與對答。Lampert(1990) 一文便舉有此種學習進行方式的例子, Mok(1993) 亦有類似的提出。

發問所達到的作用

Brown(1973) 指出教師所問問題遠比獲得學生的回應爲多。課堂內教師問題沒得到回應便算過去了或自問自答的情況也甚普遍。故此, 教師便漸漸索性不作發問, 更遑論讓學生自行互相對答與討論。

其實, 發問的作用遠超乎「檢查學生能否作答」。考問只是發問種種作用之一。今以實例表明發問的不同作用。

一.求取答案

這些包括一些事實性的問題 (factual question)。如

「何謂畢氏定理?」

「其條件爲何?」

「其逐定理又如何?」

等, 主要均是涉及「回憶」(recall) 層面。太多此類問題使教學沉悶, 缺乏智力的挑戰, 又例如在黑板上舉出例題:

「解:$x^2-5x+6=0$

用觀察法因式分解, 得

$(x-2)(x-3)=0$

故有$x-2=0$或$x-3=0$」

然後問

「那末, x有那兩個答案呢?」

等。又或索性只標出問題

「求 $x+2y-3=0$ 與 $x-2y+7=0$ 之交點」,

要求學生求解。這可算一些小測驗多於發問, 因爲學生很可能不可即時回答而須花數分鐘拿起紙和筆運算。而最後的作答亦只能看到答案之準確性而非運算之過程。

這些求取答案之問題要求學生思考不多, 當然也非全無作用。有時希望非全課由教師獨白, 上述問題也可算讓學生有最低限度的參與。間中的作這些發問, 在沉悶的課堂氣氛中也許能集中一下注意力。

亦有些問題是爲著不想所有結論都由教師的權威所下而希望引導學生得出結論的。例如讓學生量度了不少對圓心角與圓周角, 並把數據列成一個表:

圓心角	圓周角
30°	15°
28°	14°
62°	31°
73°	36°
$\vdots$	$\vdots$

(量度時可能有少許誤差), 於是問: 「大家留意兩者有否關係?」(期待答案: 圓心角乃圓周角之兩倍)。又例如:

「以上已得出 $ax^2+bx+c=0$ 的一般解爲

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

假如 $b^2-4ac<0$ 時會如何呢?」

而不是直接說出當其時沒有實根。

教師也可作一些反問以澄清一些概念、或指出一些常見的錯誤。例如

「$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$ 等均是無理數, 是否所有形如$\sqrt{a}$ 的都是無理數呢?」、

「上面看到

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2,$$

假如以 x 代以 $\sqrt{a}$, y 代以 $\sqrt{b}$,

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$$

是等於 $a+b$ 呢? 還是其他的值呢?」

等等。

二.回饋

中國的學生比較傳統與保守, 在其不能明白或跟不上講授時故然未必提出, 就算當教師問其可有疑問時, 亦未必會有所表示。更常見的, 是學生根本不知自己是否眞正明白, 或明白的程度去到那裡。況且, 當學生迷惘於講解中時, 亦未必懂得從何問起, 所以「你們明白嗎? 」、「你們有問題嗎?」等之問題通常都沒有回應, 可以省掉。可考慮發出一些問題探索其了解的程度, 亦可同時勘察學生一般的吸收能力、並以之調節教學的進度。以下爲一例:

在引入畢氏定理之後, 可以問:

「這定理在那種情況可以用呢?」

「它能夠幫我們解決些什麼問題呢?」

「公式中之 a, b, c 各代表些什麼?」

「a, b, c 的角式可否互換?」

「a 與 b 又可否互換?」

「那末, 在直角三角形內怎樣斷定哪是 c, 哪是a, b?」

再舉一例。教師正欲進入講解等差級數第 n 項之公式, 學習者必先具有何謂等差級數與何謂第 n 項 (a) 之預備知識, 故教師乃考慮於此先弄清學生的基礎知識是否足夠, 於是他可以問一連串如下的問題

「何謂等差級數?」(過於直接)

「1, 7, 13, 19,$\cdots$ 是否爲一等差級數?」(仍太直接)

「以下何者爲等差級數:
1, 7, 13, 19,$\cdots$;
-4, -10, -16, -22, $\cdots$(表明等差級數可以爲負項);
1, 7, 19, 21,$\cdots$;
-8, -5, -2, 1, 4, $\cdots$(表明等差級數可以正負項皆有);
1, 2, 4, 8, 16,$\cdots$?」

「若 $a_n = 2n^2 + 3,\ a_4 =$?」

「若 $x_n = 2n - 3, x_5 =$(表明 n 項不一定用 a 表示)?」

「若 $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ a_4 = 8,\ a_5 = 16$, 猜想 $a_n =$?(指出 a_n 不只適用於等差級數)」

從上所見, 由於這些問題的作用是一種學習診斷, 要弄清學習者能掌握到那些元素和瞭解之程度, 故此並非胡亂的發出一些複雜問題以難倒之; 而是多發出涉及常見誤解的問題, 以探視其理解情況。問題亦應是單一目標與單一能力的, 這才可清楚的檢視學生在那些基礎學識上出現問題。

三.促進思考

發問的其中一個主要目的爲刺激最高的思維層次 (Brown,1975)。然 Gall(1970) 的研究卻指出, 超過60%的教師提問是要求學生回憶事實的, 約20%的發問需要學生思考, 20%則只涉及程序事宜, 如「大家抄妥了沒有?」等。香港亦曾作類似研究。鄭肇楨 (1979) 曾利用匹茲堡智性動詞 (Lindvall,1968;Nicely,1970) 分析七十節香港中學數學教節, 發覺最常出現的 (佔29%) 爲第二階, 即「依法運作」。

上已提及, 數學中之解題策略與思路比準確的答案更爲重要。這種思路, 彷彿就如遠足, 無人會要別人帶他把路徑走過一趟才正式的進行遠足 (況且走曾完全走過一遍的路亦未必好玩)! 最重要的是擁有認出路口、辨別方向、判斷可能性、選擇正確的分岔路等的能力。數學解題亦有不少雷同之處。

例如在重溫分數的加法後, 對於分式

$$\frac{1}{x^3-2x^2-5x+6}+\frac{1}{2x^3+7x^2+16x-35}$$

或可問:

「我們可如何作類比呢?」

期待答案爲:

「求兩分母之 L.C.M.。」

可再追問:

「如何求 L.C.M.?」

等等。這些都是涉及解題過程與下一步怎麼走的問題。此時, 可能有能力較好的學生答

「用因式定理。」

顯然, 這位同學很可能眞的明白個中原理, 但未必全班同學都可跟得上。若接著此答案繼續講解, 其他同學可能不明所以; 但若不理會此答案而作詳解, 此爲同學又會感沒趣。故可考慮請其辯明, 例如問:

「你何以聯想把同因式定理的呢?」

期待答案:

「因爲求 L.C.M. 先要將兩分母因式分解。」

如欲避免須用太長時間單與此同學單獨對答, 教師可考慮由自己再作補充與澄清, 例如將上述數步驟串起來:

「對! 爲著通分母需先求兩分母之 L.C.M., 又爲了求 L.C.M., 首先得作因式分解, 而由於兩分母均是三次多項式, 我想用因式定理就最好不過了。」

此外, 亦可問及一些理由, 這些理由不必局限於有名目的定理。如分解x^3-2x^2-5x+6, 有人提出試$(x\pm1)$、$(x\pm2)$就夠了, 教師問「爲甚麼呢?」答:

「因爲 6的因數爲 $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$, 如 $x\pm6$爲因數, $x\pm1$自然亦是, $x\pm3$ 的情況類推, 故不用試數值較大的 ±3和±6。」

還可進一步問一些思路問題, 例如問:

「如何證 $(n^2+1)^2\geq 2n^2$? 」

答

「用數學歸納法。」

(其實無須)。再問:

「你如何會想到用這種方法呢?」

答

「因爲看見不等式與正整數 n 有關。」

這種辯明不只讓其他同學瞭解其思路, 這同學本身透過數學的表達和溝通, 對自己的想法會更清晰帶貫通。

波利亞 (Polya,1957) 指出, 得出解答後, 仍可作多方面的回顧。例如問:

「答案正確嗎?」

「何以某方法可得出答案?(原理)」

「答案中那步最重要?(關鍵)」

「答案可進一步簡化嗎?」

「解答可否用於類似問題?」

「有其他解答嗎?」

「若有, 那個較好、較快、能切合更廣的問題?」

「有否資料不足或過多的情況?」

「若將題目條件改動又如何?」

(黃,1990)。

例如二次方程公式 (若 $ax^2+bx+c=0$, $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$) 實由完全平方法而來, 從解題後適當的發問可得此更深入的了解。

又如證 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ $(a,b\geq0)$ 時, 學生或會先比較左右兩邊平方 $[\frac{a+b}{2}]^2$ 與 ab, 再各乘4; 即比較

$$a^2+2ab=b^2 \text{ 與 } 4ab,$$

故知整個證明關鍵一步乃利用

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2\geq0。$$

經不斷修飾後, 可能得出

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} &= (\frac{a}{2})^2-(\frac{b}{2})^2-2\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}\\ &= (\frac{a}{2}-\frac{b}{2})^2\geq0。\end{aligned}$$

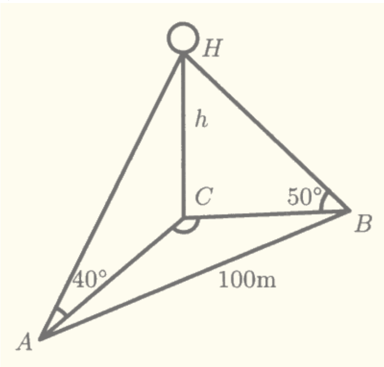
的證明。而在修飾的過程中, 學生有進一步探討規律的機會 (Wong, 1993)。

此外, 一題多解最能引起廣泛與深入的討論 (黃, 1987b; Wong, 1992), 上面即提到在解題完成後可問學生有否其他解答, 那

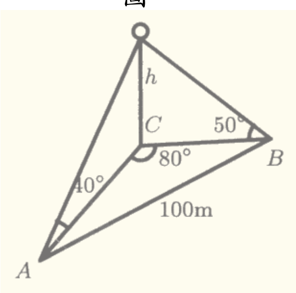
個方法最快、最易想起、應用最廣等。目的不在求一「最佳」解答, 也是在於促進思考。

如上的求 x^3-2x^2-5x+6 與 $2x^3+17x^2+16x-35$ 之 L.C.M. 一例, 分解 $x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x+2)(x-3)$ 後, 對於 $2x^3+17x^2+16x-35$ 可先試 $x-1$。因爲 $x+2$ 與 $x-3$ 肯定非爲 $2x^3+17x^2+16x-35$ 之因式, 故兩者唯一可能之公因式爲 $x-1$。若 $x-1$ 是 $2x^3+17x^2+16x-35$ 之因式, 則兩者之 L.C.M. 爲 $x-1$; 若否, 則兩者互質。

這種方法不用對 $2x^3+17x^2+16x-35$ 作長除, 故顯然較省時, 但未必容易想到, 而若問題是要澈底分解 $2x^3+17x^2+16x-35$, 則非長除不可了。



圖一



圖二

改變問題的一些條件亦可引起討論, 例如圖一中兩人相距100m, 仰視汽球H之角分別爲 40° 和 50°, 求汽球高度 h 之法爲先以 h 表 AC 和 BC, 得

$$\begin{aligned} AC &= h\cot 40^\circ \\ BC &= h\cot 50^\circ \end{aligned}$$

用勾股定理得

$$100^2 = h^2\cot^2 40^\circ + h^2\cot^2 50^\circ,$$

故可求得 h。若將 $\angle ACB$改爲 80°, 則不能再用勾股定理而可改用餘弦公式:

$$\begin{aligned} 100^2 \;&=\; h^2\cot^2 40^\circ + h^2\cot^2 50^\circ \\ &\quad -2(h\cot 40^\circ)(h\cot 50^\circ), \end{aligned}$$

更可再一次看出勾股定理實爲餘絃公式的特別情況。

發問技巧與應避免的問題

發問前最重要的要算是考慮問題想達到些什麼目的、其對象爲何、期待著什麼回應。一個問題是希望令不專心的同學警覺、讓學生自知其瞭解未足或加強一些慢熱者的自信心, 其問題的設計顯然不同。

Brown(1975) 提出了發問技巧之四個 P: 發問後小頓 (Pausing)、讓學生思考片刻, 發問應有適當的步伐 (Pacing), 激勵學生作答 (Prompting) 與承接著學生給出的答案繼續偵察 (Probing)。總之, 教師若能承接著學生的答案繼續發展, 做到師生或學生間的對答, 教學可延續有緻, 流暢而不至出現單由教師盤問學生的情況。

學生勇於回答要靠平時凝造的氣氛、教師的鼓勵和適當的提示。最重要恐怕是不要否定沒有期待 (又可能正確) 的答案。例如問:

「如何以知到二次方程 $x^2+kx-7=0$ 有實根?」

期待答案:

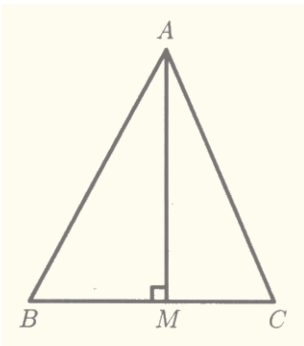
「判別式非負。」

而若收到的答案是:

「常數 -7 爲負。」

也是對的, 因爲「b^2-4ac」中已知 a, b 皆正。又如問:

「圖三中, ABC爲全等三角形, BC 的中點 M將 ABC分成左右兩半的三角形, 大家看看 $\triangle ABM$有何特式?」



圖三

期待答案:

「$\triangle ABC$爲直角三角形。」

可能收到的答案:

「AB爲BM的兩倍。」

「$\triangle ABM=60^\circ$」

「$\triangle BAM=30^\circ$」

「$\triangle ABM\cong\triangle ACM$。」

這些答案都是正確的, 只是不明白教師所問的用意, 教師宜承接此等回答跟進到原先欲發展的路線。

此外, 在一些錯的答案中, 未必每個領域都是錯的。例如以下常見的錯誤

$$
\begin{aligned}
\text{「}\sin x &= \frac{1}{2}\\
&\Rightarrow 30^\circ\text{」}
\end{aligned}
$$

(甚或「$\sin x=\frac{1}{2}=30^\circ$」)

若讓作答者解釋, 他可能會說, 「$\Rightarrow$」的意思是: 從 $\sin x=\frac{1}{2}$這一步便可「變到」30°的答案。所以, 其想法基本上是對的只是不夠細緻和沒有依從公用的符號與表達方式吧了。

對著無可置疑是錯的答案, 亦未必一定要經教師鑑定才算是錯。例如學生簡化

$$
\begin{aligned}
&(x-1)(x^2+6x-7)\\
=\ &(x^3+6x^2-7x)-(x^2+6x-7)\\
=\ &x^3+6x^2-7x-x^2+6x-7\\
=\ &x^3+5x^2-x-7
\end{aligned}
$$

教師可指出, 原式之常數 (或設$x=0$) 爲7, 而結果之常數卻爲 -7。這不只是錯乃由於事實如是 (非因爲教師所得的不同), 亦同時提出了驗證答案的習慣和方法 (黃, 1988)。

對於錯的答案, 亦可問有否其他同學得出不同的答案? 請舉手。要注意的是: 此種做法只爲引起繼續討論之用, 而答案正確與否非由投票決定的。

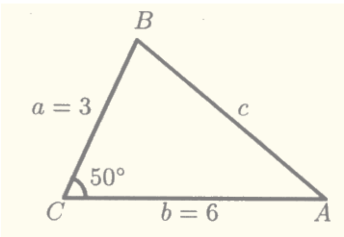
爲免學生誤解問題之所指, 或應先淸楚釐定期待之答案方才發問, 例如

原來問題
簡化 x^2+5x+6
簡化 $3x-y+7=0$
簡化 $\tan x \ \sin x$
簡化 $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$

改良問題
分解 x^2+5x+6
變換 $3x-y+7=0$ 使以 y 爲主項
以 $\sin x$及 $\cos x$表 $\tan x \ \sin x$
通分母: $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$

由於「簡單」與否是視乎接著如何應用的。例如 $\frac{2x}{x^2-1}$ 似乎比 $\frac{x+1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$ 簡單, 但若作 $\int \frac{2x}{x^2-1}dx$ 則必先將 $\frac{2x}{x^2-1}$ 分解作部份分數 $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$。

其他應避免的問題包括混雜問題:



圖四

「於圖四, 用餘式定理求c, 將答案化簡至三個有效數字並看看除了用餘式定理還可有其他方法?」

其實課堂的對答 (而非堂課、測驗等), 不宜問一些需長時間筆算才能得到答案之問題。

事實性問題 (factual question) 如

「說出何謂餘式定理」,

本身不會帶來壞處, 但不能促進思考, 太多令節湊沉悶。

是非題 (Yes-no question), 如

「我們是否應該用勾股定理呢?」

答案早已在問題中給出了。

引導性問題 (loaded question), 如

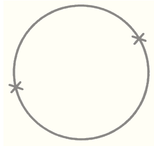
「你們有否察覺 $y=x^2+\frac{1}{x^2-1}$對稱於 y 軸呢?」

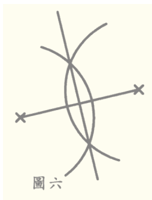
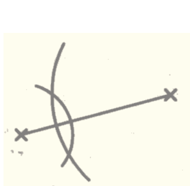
學生由這問題的提示便會察覺對稱性。當然看出對稱性有助曲線描繪, 但也未需要者。

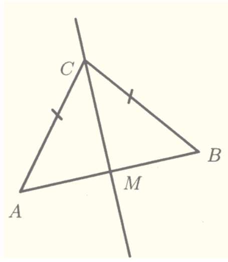
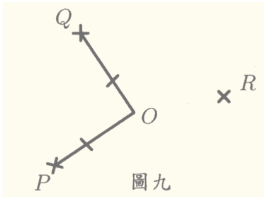
最後, 讓學生舉手作答或搶答亦當小心處理。在課堂上進行競賽式遊戲, 加入搶答題是常見的。但若分組不恰當, 容易被成績較好的壟斷, 而能力較遜的會退出參與和感沒趣。若問題的設計乃有特定對象 (如欲讓某些慢熱者重拾信心), 則任學生自由舉手作答顯得無意義。而合唱式的答話 (Chorus response) 容易引起混亂和使部份學生不加思考、濫竽充數, 故宜避免。

課堂一例

以下是一個課堂之實錄。我們並不是說其爲甚完美或接近完美 (其實教師的一些質素如生動與幽默等是難於在此種描述中顯現的), 只不過此課涉及較多的師生對答。本課是中四程度、學生程度不算太好, 課題是通過三個指定點作圓的方法。

師: 我們這幾課均談及圓形的, 讓我來問一個問題: 怎樣才能畫一個圓? 生: 用圓規。	讓學生聯想上一課所教內容。
師: 當然是要用圓規。(小頓) 不過圓規只是一個工具。我的意思是, 要知道那些資料或數據, 才可以畫出、或定出一個圓來? 生: 半徑。	第一問題只帶出話題, 現則澄清上問題, 將話題逐步收窄。
師: 對! (小頓) 知道半徑便足夠了? (停頓: 等待直至有學生作答) 生: 圓心。 師: 對! 差點忘記了圓心。知道半徑和圓心就足夠了? (停頓: 大部份學生點頭)	小頓讓大家想想, 並不由教師一意道出答案。
師: 讓我試試看(拿出圓規)。知道圓心(將圓規針臂點在黑板上), 再知半徑 (將另一臂張開)· · ·對, 這就可畫出一圓了。 師: 好。讓我再問一個和圓有關的問題。給出一點(在黑板上畫上一點), 我們可否畫一個圓穿過它? 生: 可以。 師: 你試試看? (學生畫出一個圓, 以該點爲圓心, 教師並沒有把它擦掉)	辯明答案, 同時重溫圓形畫法, 更重要的, 是兩個參數所起的作用, 爲以後留下伏線。
師: 可能我說得不清楚, 我是想畫一個圓, 其周界經過這點。 (師隨意畫出其中一個) 師: 還有別的嗎? 生: 有。	引出同學誤解並澄清之。
師: 請試試看? (學生畫出一圓, 在回座之前, 教師問他: 還有別的嗎? 生答: 還有, 並畫出第二個。教師贊同並請回座)	這部份並非本課重點, 若恐拖得太長, 可酌濃縮之。
師: 我們看到, 我們可以畫出無數個圓通過指定的一點。(抹去黑板上各圓, 加畫一點)  圖五 師: 經過兩定點又如何? 生: 可以。 師: 試試看? (學生畫出一圓, 以兩點爲直徑的端點: 圖五) 師: 還有別的嗎? (學生們遲疑著)	

師: 這位同學所畫的, 不只是經過指定兩點, 也把兩點作直徑的端點。其實我們也不一定要用兩點作端點的。	澄清問題所在。
(有學生舉手)	
生: 我可以畫出另一個!	
師: 試試看?	
(學生畫出另一圓)	
師: 對! 故此同上面的情況一樣, 我們亦可畫出無數個圓通過指定兩點。	
(教師略畫出數個。又在黑板上畫上三點)	
師: 三點又如何呢?	
(學生們遲疑著。教師用圓規粗略比一比)	
師: 這在一時間實在很難決定。讓我們先溫習垂直等分線的作法和性質。這對解決以上問題是有幫助的。	
(教師抹黑板把三點的問題保留在一邊, 並在另一邊畫一線段:圖六)	
	
師: 甚麼才叫做垂直又等分線呢?	
生: 即一條線即垂直又等分你的線段。	
師: 正確! 大家是否記得出圓規作垂直等分線的方法? 讓我們重溫吧。先選左端點, 跟著?	教師給出些提示以加快進度。
生: 畫一弧。	
師: 任意長度?	澄清畫法程序的各細節。
生: 任意長度。	
(師照畫)	
	
師: 接著又如何?	
生: 在右端點照辦一次。 圖七	
師: 任意弧長?	澄清常犯毛病。
生: 任意弧長。	
(師照畫: 圖七)	若不畫出, 只能權威性指出不可行。

	
師: 好像偏過一邊··· **生**: 我想兩弧長要相等。 圖八 **師**: 呀! 對。(重畫) 於是我們便得出了垂直等分線(圖八)。讓我們再看看垂直等分線有些甚麼特別之處。	這不只讓學生自己發現問題, 久久, 學生習慣察覺矛盾而作驗證。
(師在等分線上畫上一點, 並連到兩端點: 圖九)	
 圖九	
師: 這個三角的(指圖九之ABC) 有些甚麼特別?	
生: 等腰。	
師: 眞的? 看清楚點才決定。	
生: 還是說等腰?	
師: 呀, 好像是。那兩條腰?	要求辯明。
生: AC和CB。	
師: 何以故?	
(遲疑)	
生: 因爲對稱。	
師: 你的意思是當時畫兩弧時長度一樣?	將意念具體化。
生: 對。	
師: 此爲CM爲垂直等分線之原因, 故此M爲直角, 且$AM = MB$。讓我們把有關三角形畫出來會更清楚 (圖九)。故用何判準知兩三角形全等。 **生**: SAS。	將等腰問題轉爲全等問題。
師: 爲何不是RHS? 其中一對是直角嘛。	恐防有跟不上者。
生: 因沒有「H」。	
師: 對!我差點也糊塗了, 所以這三角形確實是等腰了。換言之, 在垂直等分線上任何一點, 它與兩端點的距離都是一樣的。好了, 我們現可回到原先畫圓形的問題。怎樣可畫一圓形通過三點呢?	總結。
(小頓) **師**: 假如我們要畫一個圓, 在這堂的開始時提過, 首先要有些甚麼資料?	讓學生重新思考原先問題。

生: 圓心和半徑。	
師: 好了, 假使眞的有這麼的一個圓, 必得有一個圓心O。讓我們先看看O必須有些甚 麼特性。(畫成圖十)	從後回溯。
師: 由於O是圓心, P、Q在圓周上, OP和OQ的長度有些甚麼關係?	先看兩點。
生: $OP=OQ$	
師: 對! (小頓, 比對圖九與圖十) 上面關於垂直平分線的問題得出了兩線相等的結論, 現時的問題又需要兩線相等, 兩者有否可借鏡之處?	對比: 提示之多寡看學生反應。
(小頓)	待思考。
生: 這是否可能和PQ的垂直平分線有關?	不太肯定。
師: 讓我們看看: 若作PQ的垂直平分線, O又在此平分線上, OP和OQ的長度不就可以相等了嗎?	將意念具體化。
(描出垂直平分線並作小頓讓學生消化)	
師: 所以, 若有此一點O, O必須在PQ垂直平分線上。(小頓) 同理, 它必定也在QR的垂直平分線上。換言之$\cdots$(小頓待思考)。它必定是兩垂直平分線的$\cdots$?	
生: 交點!	
師: 對。故此, 我們若要找O, 先畫出PQ的垂直平分線, 再畫出QR的垂直平分線, 兩線的交點便是所要找的圓心了。完成了沒有?	重覆程序。 關子。
(小頓)	
師: 找了圓心就足以畫圓了嗎?	提示。
生: 還有半徑!	
師: 對! 半徑又怎樣找呢?	
生: OP的長度不也就是半徑嗎?	
師: 對! OQ, OR 均可	
(派工作紙)	
師: 工作紙上畫有三點, 人人不同, 現各自試畫一圓通過該三點。(教師於堂課時巡視, 輔導不明白者所提之問題。課終前提出通過四點之圓的問題作引起下課動機之用)。	

以上教程, 除了「引起動機」和最後實際作圖外, 包含了以下環節: I. 問題提出, II. 垂直平分線的作法及性質重溫, III. 把作圓問題連繫到垂直平分線來。這樣中途實要將問題暫放一邊以重溫垂直平分線, 故也可考慮先溫習之, 即 II $\rightarrow$ I $\rightarrow$ III。但這樣則在 II 時, 學生不明白爲何要提出垂直平分線。當然對於基礎較好的學生, 我們可以假設他們可隨時提取垂直平分線的性質, 則可考慮先發現原來作圓與垂直平分線有關, 即用之作圖, 亦即 I $\rightarrow$ III $\rightarrow$ II。但對於基礎知識不太純熟的, 需要仔細重溫垂直平分線的作法與性質, 則此辦法似不太適宜。此外, 他們亦未必能在短時間看出作圓與垂直平分線有關, 故此原來的教程是用了對比的方法, 亦即在所謂「發現」的過程中, 教師的引導較多。

結論

從上可見, 教學內容於數學教學與課程設計中固甚重要, 但學生經歷何種方式獲得某種數學概念更爲重要。「知道某條公式」可以有「記憶得到」、「掌握」、「透澈了解」、「靈活運用」等各種意義。透過師生與學生間的答問即有更深入探索個中底蘊的可能。

教師或會慣於看重學習的最後結果。適當回饋能讓教師意識到教學的實況從而作出改善。微格教學 (鄭, 1987) 即透過量表、錄音或錄影作出分析與回饋。范達氏課堂互動量表 (Flanders, 1970) 即其表表者。今參照之製成課堂問答情況之量表以供使用, 如下。

時間 (分鐘)	1	2	3	4	5	6	7	8	···
與學習內容無關的問題*									
回憶與求取答案的問題									
欲對教學進度取得回饋									
涉及解題思路的問題									
促進思考的問題									

無回應加 ◯

有學生回應加 ⊙

有追問或承接加●

*如「大家帶齊書了沒有?」

參考文獻

1. 南懷瑾 (1978)《禪海蠡測》(三版)。台灣: 老古出版社。
2. 黃毅英 (1987a)。反問與反省, 《華僑日報》8/9, 香港。
3. 黃毅英 (1987b)。學習數學過程中之觸類旁通, 《數學傳播》44期, 60-64。
4. 黃毅英 (1988)。數學的驗證, 《數學通報》15期, 18-19。
5. 黃毅英 (1990)。解題與數學教育, 《數學傳播》54期, 71-81。
6. 蔡榮婷 (1986)。《禪師啓悟法》。台灣: 文殊雜誌社。
7. 鄭肇楨 (1987)。《教師教育》。中文大學出版社。
8. Barnes, B. (1982). *T.S. Kuhn and Social Science.* U.S.: Cambridge University Press.
9. Brown, G. (1975). *Microteaching: A programme of teaching skills.* Harper & Row Publishers, Inc.
10. Brown,G. (1973). The effect of training upon performance in teaching situations . Unpublished Ph.D. Dissertation, New University of Ulster.

11. Cheng, S. C. (1979). An analysis of the cognitive level in mathematics education. *Education Journal*, 7, 53-60.
12. Cobb, P., Wood, W., Yackel, E., and McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics tradition: An interactional analysis. *American Educational Research Journal*, 29, 573-604.
13. Dilts, R. G. (1970). Development and application of a cognitive verb list to facilitate analysis of mathematics textbooks. Unpublished Ph. D. Dissertation, University of Pittsburgh.
14. Flanders, N. A. (1970). *Analyzing Teaching Behaviour*. Massachersetts: Addison-Wesley Publishing Co.
15. Gall, M.D. (1970). The use of questioning in teaching. *Reveal of Educational Research*, 40, 707-721.
16. Knorr-Cetina, K.D. (1982). *The Manufacture of Scientific Knowledge*. U.K.: Pergamon Press.
17. Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The logic of mathematical discovery*. U. S.: Cambridge University Press.
18. Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27, 29-63.
19. Lindvall, C. M. (1968). Criteria for stating IPI objectives, Unpublished paper, Learning Research and Development Center, University of Pittsburgh.
20. Mok, I.A.C. (1993). More interaction is needed. *Curriculum Forum*, 2, no.3, 36-45.
21. Nicely, Jr., R. F. (1976). Development of procedure for analyzing materials for instruction in complex numbers at the secondary level. Unpublished Ph. D. Dissertation, University of Pittsburgh.
22. Scandura, J.M. (1977). *Problem Solving: A structural/process approach with instructional applications*. U.S.: Academic Press.
23. Solomon, Y. (1989). *The Practice of Mathematics*. U.K.: Routledge.
24. Tymoczko, T. (1986). Introduction. In T. Tymoczko (Ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. U.S.: Birkauser.
25. Scharf, P. (1978). *Moral Education*. U. S.: Dialogue Books.
26. Wong. N.Y. (1992). Different approaches to a single problem in mathematical problem solving: The arithmetic mean-geometric mean inequality. *Hong Kong Science Teachers Journal*, 18, 50-70.
27. Wong, N.Y. (1993). Enhancing student's mathematics problem solving ability in day-to-day teaching. *Curriculum Forum*, 3(3), 24-33.
28. Yackel, E., Cobb, P., Wood, T., Wheatley, G., & Merkel, G. (1990). The importance of social interaction in children's construction of mathematical knowledge. In T. J. Cooney & C.R. Hirsch (Ed.s). *Teaching and Learning Mathematics in the* 1990s (NCTM 1990 yearbook). U.S.: NCTM.

附錄一: 蘇格拉底與曼諾之對話

曼: 對, 蘇格拉底; 但你所說的我們並非學習, 而所謂的學習只是追憶是甚麼意思呢? 你可否教我此爲何意?

蘇: 讓我告訴你, 曼諾, 你剛才也十分狡猾, 當我說實在無所謂「教」, 只有追憶時, 你便問我可否「教」你; 你是希望這樣導致我的矛盾。

曼: 蘇格拉底, 我要申明我確無此意。我只是按慣常用語而發問; 但你若能證明你所言之眞確, 懇請爲我闡明。

蘇: 這並非容易的事, 但我願盡力令你滿意。你可否召喚你衆多侍從之一, 待我在他身上作示範。

曼: 當然可以。小童, 過來。

蘇: 他是希臘人, 懂希臘話, 對嗎?

曼: 甚對; 他在這裡出生的。

蘇: 留意我問他的話, 並觀察他是從我處學會的還是只是追憶所得。

曼: 我會照做。

蘇: 告訴我, 小童, 你知道這圖形是正方形嗎?

童: 我知道。

蘇: 你知道正方形的四邊相等嗎?

童: 知道。

蘇: 自我所畫的穿過正方形中央的線段也相等?

童: 對。

蘇: 正方形可以爲任何大小?

童: 是。

蘇: 那末若一邊長二尺, 另一邊又長二尺, 整個又應多少? 讓我解釋: 若一方向之長度爲二尺, 另一方向之長度[只]爲一尺, 則整個[圖形的面積]爲二尺, 只算一次, 對嗎?(譯者按: 即長方形一邊長二尺, 另一邊長一尺, 則面積爲 2×1 平方尺)

童: 對。

蘇: 但此邊[其實]爲二尺, 故[整個面積該]爲二尺之兩倍?

童: 是。

蘇: 那末, 正方形[的面積]爲二尺之兩倍?

童: 對。

蘇: 兩尺之兩倍是多少? 算算並告訴我。

童: 四, 蘇格拉底。

蘇: 然則我們是否可能有另一正方形, 它爲此 的兩倍, 而和此一樣, 兩邊相等?

童: 可以。

蘇: 那麼, 它(譯者按: 指新的正方形) 有多大?

童: 八尺。

蘇: 試告訴我, 此兩倍正方式每邊多長: 此爲二尺—新的又如何?

童: 明顯地, 蘇格拉底, 應爲兩倍。

蘇: 你觀察了吧, 曼諾, 我並無教小童任何東西, 而只是問他問題; 現在他自以爲知道要製造八尺圖形每邊應長多少, 對嗎?

曼: 對。

蘇: 但他眞的知道了嗎?

曼: 當然不知道。

蘇: 他只猜測因爲正方形倍增了, 邊長亦應倍增。

曼: 對。

蘇: 當他回想正常程序之各步驟時, 再觀察他。(對小童) 告訴我, 小童, 你是否說雙倍的空間乃由雙倍的邊長產生? 記著我不是在說一長方形, 而是各處相等之圖形, 而爲原先圖形之雙倍者—即是說八尺; 我想知道你是否仍說雙倍的正方形來自雙倍的邊長?

童: 是。

蘇: 但若再加同樣一線(譯者按: 將一邊複製增長) 不是將該線倍增了嗎?

童: 肯定是。

蘇: 而四條如此之線所成之空間爲八尺?

童: 對。

蘇: 讓我們畫出此圖: 你不是說這圖爲八尺吧?

童: 是。

蘇: 這圖不是有四部份, 每部份各爲四尺嗎?

童: 對。

蘇: 這不是四的四倍嗎?

童: 肯定是。

蘇: 而四倍不同於雙倍?

童: 不同。

蘇: 故兩倍邊長, 童子, 並不給出兩倍空間, 而是四倍。

童: 對。

蘇: 四的四倍是十六—對否?

童: 是。

蘇: 既然這些邊長給你十六尺, 甚麼的邊長會給你八尺的空間呢—你明白嗎?

童: 是。

蘇: 四尺之空間乃由一半邊長而成?

童: 是。

蘇: 好; 八尺的空間不是這空間(譯者按: 指 4×4 的大正方形) 的一倍, 另一空間 (譯者按: 指原來 2×2 的正方形) 的一半嗎?

童: 肯定。

蘇: 這麼的一個空間, 其邊長應比此邊較長, 又比那邊較短?

童: 我想這是對的。

蘇: 甚好; 我想聽你的想法, 現在告訴我, 此邊長二尺, 而那邊長四尺嗎?

童: 是。

蘇: 那末, 形成八尺空間的邊長應較二尺爲長, 較另外之四尺爲短, 是嗎?

童: 當如是。

蘇: 請再看以下的發展, 我只會問他, 而非教他, 他會與我一起探究; 請你觀察並看看我有否告訴或解釋任何事與他, 而非誘導他的見解。告訴我, 小童, 這不是我剛畫出四尺的正方形嗎。

童: 是。

蘇: 這裡我添加了同樣的正方形?

童: 是。

蘇: 這是第三個, 與前兩個都相同的?

童: 是。

蘇: 我們又填補這空出來的角落?

童: 甚好。

蘇: 那麼, 這裡共有四個相同的正方形?

童: 是。

蘇: 這空間比原先的大多少倍?

童: 四倍。

蘇: 但我們應(譯者按: 指所希望求得的) 只有兩倍而已, 你記得吧。

童: 對。

蘇: 而此線, 由角連向角, 不是平分了這些空間嗎?

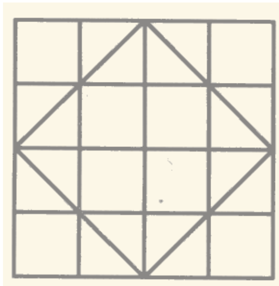
童: 是。

蘇: 而此空間內不是有四條相同的線嗎?

童: 有的。

蘇: 看這空間多大。

童: 我不清楚。



圖十

蘇: 此內線不是切出四個空間每個的一半?

童: 是。

蘇: 這共有多少個如此的空間?

童: 四。

蘇: 這裡又佔多少(譯者按: 指切去一半空間之面積)?

童: 二。

蘇: 四是二乘以多少?

童: 兩倍。

蘇: 這空間共多大。

童: 八尺。

蘇: 從那些線你得出此圖形?

童: 由此。

蘇: 亦即, 由角到角的這些線則形成此四尺之空間?

童: 是。

蘇: 此些線, 有學識的人一般叫它做對角線。若此爲正當的名詞, 那末, 曼諾之童僕, 即可證實對角線所形成的正方形(之面積) 爲雙倍。

童: 肯定是, 蘇格拉底。

蘇: 曼諾, 你怎麼說? 這些答案是他自己想出來的嗎?

童: 對, 均是他自己的。

蘇: 然而, 正如我們剛才所說, 他卻不自知?

童: 正確。

蘇: 然他卻有著自己的觀念—對嗎?

童: 對。

蘇: 那末, 他雖不知道然仍擁有一些不自知而正確的觀念?

童: 他確有。

蘇: 現時, 這些觀念只湧現於他之內, 猶如夢中; 但若他常被問及同一問題, 而以不同形式出現著, 他便會最終如其他人般了知?

童: 我敢作此言。

蘇: 無人教他而他自行發現知識, 而所涉及的只是接受發問吧了?

童: 對。

蘇: 此自然的知識從拾即爲追憶?

童: 是。

—本文作者爲香港中文大學教育學院課程與教學學系講師—