多複變討論的同倫方法

王則柯

理工科的大學生都要學一點複變函數。可見, 複變函數的應用範圍, 實在很大。現已很難想像, 不用複變函數的話, 怎樣才能講述電磁理論和流體力學。一些奇異積分的計算, 更是複變函數的拿手好戲。

和實變量的函數一樣, 複變函數也有單變量和多變量的區別。在實變量的情形, 是一元微積分和多元微積分的區別。在複變量的情形, 是單複變函數和多複變函數的區別。有趣的是, 在大學課程設置中, 雖然每個理工科學生都要學多元微積分, 但是一般數學專業的本科大學生, 卻通常不修習多複變函數。

多複變函數有一些很特殊的性質。從單複變到多複變, 比起從一元微積分到多元微積分, 眞是困難得多, 跳躍大得多。這就是一般大學不要求數學系的本科學生修習多複變函數的道理。

但是在今天, 運用大學生容易掌握的現代同倫方法, 卻可以繞開那些特殊的困難, 做一些多複變函數理論的研究。本文的目的, 就是通過建立多複變函數的 Rouché 定理, 淺白地演示同倫方法的這一能力。

同倫方法原理

五個人從游泳池的出發端跳下去, 以一致 (uniformly) 大於零的速度向前游去。如果他們都不接觸池側, 請問有多少個人可以到達終點端?

答案當然是五。因爲這五個人旣不會回到出發端, 又不會接觸池側, 他們老是向前游, 速度總是大於一個正的常數, 焉有不到達終點端的道理?

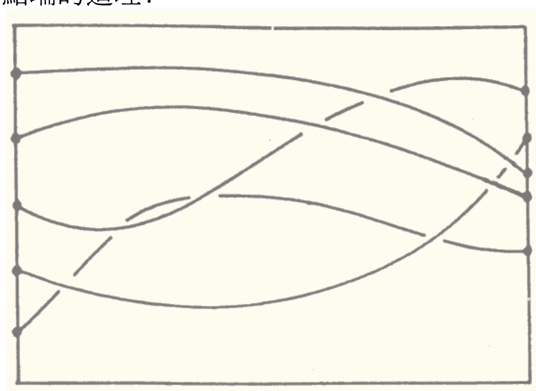

圖 1

上面這個"兒童小問答", 可以大致說明在函數值分布 (value distribution) 討論中的同倫方法 (homotopy method) 的要義。請記住這個簡單的問答。因爲我們可以說, 下面的論證, 只是這個小問答的數學實施。

五個人下水, 五個人到達。數學上怎樣才能保證呢? 首先要有正則性 (regularity),

一個人不能變成兩個人, 兩個人不能變成一個人。在圖1 中, 就是五個人的游跡不會分叉, 也不會交叉合併。不然的話, 就不能保證最後還是五個人。其次, 要有單調性 (monotonicity), 即一直向前游, 不會退回去。不然的話, 如果有人退回去, 就不能保證五個人都到達終點端。以後我們還會知道, 單調性加上正則性, 還可以保證所有人前進的速度一致地大於零。這就排除了雖然一直向前, 但卻越來越慢, 永遠到達不了端點端的可能。第三, 要有有界性 (boundedness)。不然的話, 如果有人從池側溜上岸, 也不能保證五個人都到達終點端。

下面的論證, 大體上就按照正則性、單調性、有界性的次序展開。比較繁一點的是正則性, 最容易的是有界性。我們先難後易, 說明同倫方法的要義。爲此, 先敍述本文主要對付的 Rouché 定理。

Rouché 定理

翻開任何一本複變函數課本, 都可以找到 Rouché 定理。記複數平面爲 C, 這個定理可以敍述如次:

定理1: 設 E 是 C 中的開集, γ 是 E 內的可求長簡單閉曲線, 其內部 $D \subset E$。若映照 $f, g : E \to C$ 解析 (analytic), 在 D 內只有孤立零點, 並且對所有 $z \in \gamma$, 成立

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|,$$

那麼按重數計算 (counting multiplicities), f 和 g 在 D 內的零點數目相同。

記 n 個複變量 $z = (z_1 \ldots, z_n)$ 的空間爲 C^n, z 在 C^n 的歐幾里德模 (Euclidean norm) 爲 $\|z\|$。多複變情形的 Rouché 定理可以表述如次:

定理2: 設 E 是 C^n 中的開集, 而 D 是 E 內的有界開集, 其閉包也在 E 內, 即 $\overline{D} \subset E$。若映照 $f, g : E \to C^n$ 解析, 在 D 內只有孤立零點, 並且對所有 $z \in \partial D$, 成立

$$\|f(z) - g(z)\| < \|f(z)\|,$$

那麼按重數計算, f 和 g 在 D 內的零點數目相同。這裡, ∂D 表示 D 的邊界。

也許需要再說明一下的是: z 是 f 的零點, 指的是 $f(z) = 0$, 在多複變函數的情形, 這個 0 是空間 C^n 的原點 (origin)。

兩相比較, 第一, 定理1 是單複變的, 而定理2 是多複變的, 這是主要的進步。第二, 即使在定理2 中限定 $n = 1$, 定理2 的條件也比定理1 放寬很多, 因爲定理1 要求 γ 是可求長簡單閉曲線, 而定理2 只要求 ∂D 是有界開集 D 的邊界。可見, 即使在 $n = 1$ 的情形, 定理2 也比定理1 強得多。

現在, 我們用同倫方法來證明定理2。說到預備知識, 同倫的概念將直接給出, 而單複變函數的 Cauchy-Riemann 方程, 大家都很熟悉。有些讀者可能沒有學過微分流形 (differential manifold) 和 Sard 定理。好在著眼於如何應用同倫方法, 這些內容連帶 Cauchy-Riemann 方程, 都容易敍述清楚, 不易發生歧義。坦率地說, Rouché 定理的這個推廣, 得益於對對象的熟悉和各學科的滲透, 並不是啃硬骨頭的結果。知道多一點, 就可能做出這樣的結果。這就是我們的體會。

同倫方法基本引理

設 R^p 爲 p 維歐幾里德空間。如果 $E \subset R^p$ 是開集, $F: E \to R^r$ 的各階偏導數都存在並且連續, 就說 F 是光滑 (smooth) 映照。這時, 在 E 的每一點, F 的導映照 (derivative) 都是一個線性變換 (linear transformation), $DF: R^p \to R^r$。如果在 $x \in E$, 線性變換 $DF: R^p \to R^r$ 是滿 (surjective) 映照, 就說 $x \in E$ 是 F 的正則點 (regular point)。如果 $y \in R^r$ 使得 $F^{-1}(y) = \{x \in E: F(x) = y\}$ 中的每一點都是 F 的正則點, 就說 y 是 F 的正則值 (regular value)。很明白, 正則值的前提是 $p \geq r$。

在 E 的每一點, F 的導映照 $DF: R^p \to R^r$, 作爲線性變換, 其變換矩陣就是 F 在這點的一階偏導數矩陣 $(\partial F_j/\partial x_k)$。所以, 我們也寫 $DF = (\partial F_j/\partial x_k)$。

首先敍述原像定理 (preimage theorem)。

引理1:[6,7] 設 $E \subset R^p$ 是開集, $F: E \to R^r$ 是光滑映照。如果 $y \in R^r$ 是 F 的正則值, 那麼 $F^{-1}(y)$ 是 E 中的 $p-r$ 維微分流形, $\partial F^{-1}(y) \subset \partial E$, 即 $F^{-1}(y)$ 的邊界必在開集 E 的邊界中。

我們將只用到 $p - r = 1$ 的情形。1 維微分流形的分類早已完全淸楚[6,7]: 它的每個連通分支 (component), 或微分同胚 (diffeomorphic to) 區間 (interval), 或微分同胚圓周。簡而言之, 1 維微分流形的每個連通分支, 是一條簡單光滑曲線。所謂簡單, 就是不分叉也不交叉。這就是我們在游泳池問答後面說的正則性的第一個要求。

現在敍述廣義 Sard 定理。

引理2:[1] 設 $W \subset R^q$, $E \subset R^p$ 是開集, 映照 $\phi: W \times E \to R^r$ 光滑, $p \geq r$。如果 $y \in R^r$ 是映照 ϕ 的正則值, 那麼對於幾乎每一點 $a \in W$, $y \in R^r$ 都是局限映照 (restricted mapping)

$$\phi(a, \cdot): E \to R^r$$

的正則值。

這就是說, 在 $y \in R^r$ 是 $\phi: W \times E \to R^r$ 的正則值的條件下, 使得 $y \in R^r$ 不是 $\phi(a, \cdot): E \to R^r$ 的正則值的那些點 $a \in W$, 在 R^q 的開集 W 中所佔有的 Lebesgue 測度 (measure) 只等於零。

如果你的線性代數 (linear algebra) 學得比較好, 只要有一本 [6] 那樣的深入淺出的好書, 學會原像定理的證明並不困難。廣義 Sard 定理會稍許費力一些。不過, 本文更強調這些定理的應用。因爲對付的是零點問題, 我們只關心 $y \in R^r$ 是 R^r 的原點的情形。如果 $0 \in R^r$ 是映照的正則值, 就說這個映照是正則映照。下兩節將著重說明怎樣造出 ϕ 來使得 $0 \in R^r$ 是它的正則值。做到這一點以後, 就容易取 $a \in W$ 使得 $0 \in R^r$ 是 $F = \phi(a, \cdot): E \to R^r$ 的正則值。應用到 $p - r = 1$ 的情形, $F^{-1}(0)$ 就由互不相交的簡單光滑曲線組成。

著眼於同倫方法的應用, 我們更具體地限於 $E = [0, 1] \times R^r$ 的情形。接下去的兩個引理, 給出上述光滑曲線的單調性。

引理3:[3] 設 $0 \in R^r$ 是光滑映照 $\psi : [0,1] \times R^r \to R^r$ 的正則值, 那麼對於 $\psi^{-1}(0) = \{(t,x) \in [0,1] \times R^r : \psi(t,x) = 0\}$ 中的每一條曲線 $(t(s), x(s))$, 或者對所有 s 恆成立

$$sgn \frac{dt(s)}{ds} = sgn\ det \frac{\partial \psi}{\partial x}(t(s), x(s)),$$

或者對所有的 s 恆成立

$$sgn \frac{dt(s)}{ds} = -sgn\ det \frac{\partial \psi}{\partial x}(t(s), x(s)),$$

這裡 s 是所論曲線的弧長, det 是行列式 (determinant) 函數, sgn 是符號函數, 其中約定 $sgn\, 0 = 0$。

最後一個引理可以叫做非負 (nonnegativeness) 定理:

引理4:[2] 設 $E \subset C^n$ 是開集, $T : E \to C^n$ 是解析映照, 那麼根據 $z = x + iy$ 和 $T(z) = u + iv$ 的關係, 按照依 $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \ldots, n$ 把 $(z_1, \ldots, z_n) \in C^n$ 與 $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \in R^{2n}$ 視同的方式, 把 T 看作是實變量的映照, 仍舊記作 $T : E \to R^{2n}$, 則 T 的 Jacobi 矩陣 DT 的行列式處處非負。

非負定理的證明要點可以簡述如下: 做適當的坐標變換, 可以將 DT 轉換成以 n 個 2 階方陣爲對角線元素的上三角矩陣, 而每個 2 階方陣都具有

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_j}{\partial x_k} & \dfrac{\partial u_j}{\partial y_k} \\ \dfrac{\partial v_j}{\partial x_k} & \dfrac{\partial v_j}{\partial y_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_j}{\partial x_k} & -\dfrac{\partial v_j}{\partial x_k} \\ \dfrac{\partial v_j}{\partial x_k} & \dfrac{\partial u_j}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

的形式, 所以 $det\ DT \geq 0$ 處處成立。這裡, 等號成立, 是因爲解析函數的 Cauchy-Riemann 方程。

至此我們也知道, 最要緊的是做出正則映照來, 解決面臨的問題。這就是下面兩節的工作。

將 f 調整為正則映照

我們首先將 f 調整爲一個正則映照, 然後在下一節, 設計一個連接 f 和 g 的正則的同倫映照, 這樣就將大功告成。

因爲對所有 $z \in \partial D$ 都有 $\|f(z) - g(z)\| < \|f(z)\|$, 可知 f 和 g 在 D 的邊界 ∂D 上都沒有零點。進而我們知道 f 和 g 在有界閉集 $\overline{D}$ 上只有弧立零點, 所以 f 和 g 在 D 內的零點數目都有限。

設 f 在 D 的零點數目是 m。證明定理 2 的基本想法, 就是從 f 的 m 個零點出發, 造 m 條簡單光滑曲線通向 g 的零點 (參看圖2), 這樣就得到 g 的 m 個零點, 同時證明 g 在 D 內沒有別的零點。

但是 f 可能有重零點 (multiple zeroes)。用正則性的語言來說就是, f 可能不是正則映照, 即 $0 \in C^n$ 可能不是 f 的正則值。如果這樣, 就不能保證有 m 個出發點。所以我們首先對 f 做適當的整理, 使它變成在 D 內恰好有 m 個零點的正則映照。如所周知, 這只要對 f 做小的擾動就可辦到。現在, 我們用引理2 來論證和完成這種小擾動的做法。

定義 $\mathcal{F} : C^n \times E \to C^n$ 如下:

$$\mathcal{F}(c, z) = f(z) + c。$$

注意, 現在 $c \in C^n$ 是 $\mathcal{F}$ 的變量。因爲 $\partial\mathcal{F}/\partial c = I$, 這裡 I 是 n 階恆同 (identity) 矩陣, 所以

$$D\mathcal{F}(c,z) = [\, I \mid \frac{\partial f}{\partial z}(z)]。$$

這個等式說明, $D\mathcal{F}: C^n \times C^n \to C^n$ 作爲線性變換, 總是映滿 C^n 的, 從而, $0 \in C^n$ 當然是 $\mathcal{F}$ 的正則值。這時, 運用引理2 就知道, 對幾乎每一個 $c \in C^n$, $0 \in C^n$ 都是局限映照 $\mathcal{F}(c,\cdot): E \to C^n$ 的正則值。

取一個這樣的 $c \in C^n$, 並且要求 $\|c\|$ 很小。記 $f_c : E \to C^n$ 是由 $f_c(z) = f(z)+c$ 確定的映照, 那麼, $0 \in C^n$ 是 f_c 的正則值, 從而 f_c 沒有重零點。我們已經知道 f 在 ∂D 上沒有零點, 所以 f 在 D 內的零點數目在小擾動下不會改變。至此我們知道, 由於 $\|c\|$ 很小, f_c 在 D 內恰有 m 個孤立零點, 它們都是單零點 (simple zeroes)。

這樣整理得到的 f_c, 當然是正則映照。

同倫的設計

在構造 m 條簡單光滑曲線, 使得它們從 f_c 的零點出發通向 g 的零點的證明過程中, 關鍵是同倫的設計。

定義 $\mathcal{H}: C^n \times [0,1) \times E \to C^n$ 如下:

$$\mathcal{H}(c,t,z) = (1-t)(f(z)+c) + tg(z)。$$

因爲

$$\begin{aligned} & D\mathcal{H}(c,t,z) \\ = \; & [\,(1-t)I \mid g(z)-f(z)-c \mid (1-t)\frac{\partial f}{\partial z}(z) \\ & +t\frac{\partial g}{\partial z}(z)\,], \end{aligned}$$

所以 $D\mathcal{H}: C^n \times R \times C^n \to C^n$ 作爲線性變換, 總是映滿 C^n 的, 可見, $0 \in C^n$ 是映照 $\mathcal{H}$ 的正則值。這時, 同樣根據引理2 就知道, 對幾乎所有 $c \in C^n$, $0 \in C^n$ 都是局限映照 $\mathcal{H}(c,\cdot,\cdot): [0,1) \times E \to C^n$ 的正則值。

依照廣義 Sard 定理和映照 $\mathcal{F}$ 及 $\mathcal{H}$ 的構造, 容易取定一個 $c \in C^n$, 使得 $0 \in C^n$ 同時是 f_c 的正則值和 $\mathcal{H}(c,\cdot,\cdot)$ 的正則值, 並且 $\|c\|$ 很小。這時, 定義 $H: [0,1]\times\overline{D} \to C^n$ 如下:

$$H(t,z) = \begin{cases} g(z), & \text{若 } t=1, \\ \mathcal{H}(c,t,z), & \text{若 } t \neq 1, \end{cases}$$

那麼 H 當然連續, 並且因爲對於所有的 $z \in E$ 都有 $H(0,z) = f_c(z) = f(z)+c$ 和 $H(1,z) = g(z)$, 所以 H 是連結 f_c 和 g 的一個同倫 (homotopy) 映照。

因爲 $0 \in C^n$ 是 $\mathcal{H}(c,\cdot,\cdot)$ 的正則值, 按照原像定理, $\mathcal{H}(c,\cdot,\cdot)$ 的零點集是一個微分流形, 其維數 (dimension) 等於 $[0,1) \times E$ 的維數減去 C^n 的維數, 所以 $\mathcal{H}(c,\cdot,\cdot)$ 的零點集是一個1 維微分流形。注意在 $[0,1)\times\overline{D}$ 上, H 就是 $\mathcal{H}(c,\cdot,\cdot)$, 可見同倫 H 的零點集

$$H^{-1}(0) = \{(t,z) \in [0,1]\times\overline{D} : H(t,z) = 0\}$$

在 $[0,1) \times \overline{D}$ 的部分是1維微分流形, 即由互不相交, 互不交叉的簡單光滑曲線組成。

現在, 我們把 $[0,1] \times \overline{D}$ 看作是柱體, 看作是前面講的游泳池。如果能夠再證明上述簡單光滑曲線對於同倫參數 t 單調, 並且不接觸柱體 (或游泳池) 的側面 $[0,1] \times \partial D$,

定理2 的證明即可完成, 參看圖2。這就是下一節的內容。

曲線在柱體內單調伸延

回顧同倫 $H:[0,1]\times\overline{D}\to C^n$ 的構造, 可以知道對於每一個固定的 t

$$H(t,z)=(1-t)(f(z)+c)+tg(z)$$

是 z 的解析映照。所以依據引理4

$$det\frac{\partial H}{\partial(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n)}$$

處處非負。這時, 如果 $(t(s),z(s))$ 是 $H^{-1}(0)$ 在 $[0,1)\times\overline{D}$ 部分的一條曲線, 其中 s 是弧長, 那麼在引理4 的基礎上, 引理3 進一步論定 $dt(s)/ds$ 恆不變號。至此我們知道, $H^{-1}(0)$ 中的每一條曲線, 都是同倫參數 t 的單調曲線。

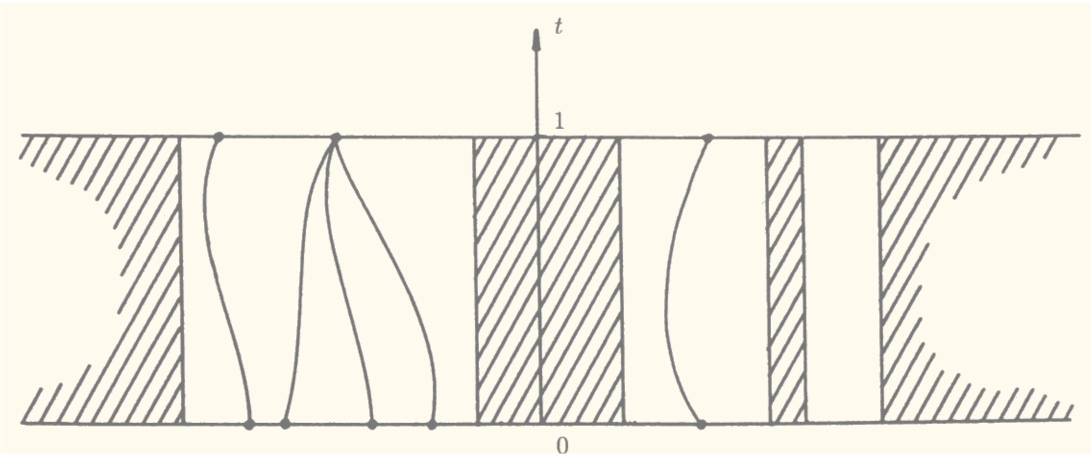

圖2

餘下只須證明上述曲線不會接觸 $[0,1]\times\overline{D}$ 的側面 $[0,1]\times\partial\overline{D}$。但這是容易的。事實上若不然, $H^{-1}(0)\cap[0,1]\times\partial D\neq\emptyset$, 則有 $(t',z')\in H^{-1}(0)\cap[0,1]\times\partial D$。$(t',z')\in H^{-1}(0)$ 要求

$$\begin{aligned}&(1-t')(f(z')+c)+t'g(z')\\ =\ & f(z')+(1-t')c+t'(g(z')-f(z'))=0,\end{aligned}$$

但 $(t',z')\in[0,1]\times\partial D$ 要求 $z'\in\partial D$, 從而

$$\|g(z')-f(z')\|<\|f(z')\|。$$

在 $\|c\|$ 很小時, 上述兩個要求是矛盾的。這個矛盾說明, $H^{-1}(0)$ 中的曲線, 都不會接觸 $[0,1]\times D$ 的側面 $[0,1]\times\partial D$。

至此我們知道, 如圖2 所示, 從 f_c 的 m 個單零點出發, 每一條曲線都在柱體 $[0,1)\times D$ 內關於同倫參數 t 單調伸延。$t=0$ 時 H 的零點集 $H^{-1}(0)$ 就是 f_c 的零點集, $t=1$ 時 H 的零點集 $H^{-1}(0)$ 就是 g 的零點集, 所以從 f_c 的零點出發的曲線, 一定曾到達 g 的零點, 從 g 的零點出發的曲線, 也一定可退回來到達 f_c 的零點。這就說明, g 在 D 內的零點數目和 f_c 在 D 內的零點數目一樣, 都

等於 f 在 D 內的零點數目 m。

最後要注意的是, f 調整爲 f_c 後, 沒有重零點了, 所以從 f_c 的每個零點出發, 如圖2, 只有一條曲線上升。曲線不分叉也不交叉的性質只有在 $[0,1)\times\overline{D}$ 部份有保證, 所以這些曲線在 $t=1$ 處有可能相匯合。如果從 f_c 的零點出發的 k 條曲線匯合於 g 的一個零點, 那麼 g 的這個零點就是 k 重零點 (zero of multiplicity k)。在 Rouché 定理中, 零點數目依照零點的重數計算。

也許還有必要明白說一下已經解決了的 "游泳池" 問答中的一個問題, 即如何保證 "雖然一直向前游, 但是永遠到不了岸" 的情形不會發生。這主要依靠原像定理。原像定理論定 $H^{-1}(0)$ 的邊界一定在 $[0,1)\times\overline{D}$ 的邊界內, 也就是論定圖1 和圖2 中的每一條曲線, 都不會把端點放在 $(0,1)\times D$ 之內。

同倫方法的啓示

如果寫成研究論文, 多複變的 Rouché 定理可以在三四頁的篇幅內完成。我們在這裡著意講得細緻一些, 是想藉著這個證明, 展示現代同倫方法的精髓。

從較早的延拓法 (continuation methods) 發展成爲目前的同倫方法, 其契機是引進微分流形的若干概念, 特別是廣義 Sard 定理。

許多應用數學者可能沒有必要通曉微分流形理論或微分拓樸學 (differential topology), 但是瞭解像本文所用到的那樣的基礎概念和基本結果, 一定大有裨益。回頭檢視本文的敍述, 一般的微分流形也許你不熟悉, 但是1 維的微分流形就是一些簡單的光滑曲線, 這卻容易掌握, 也就能夠解決不少問題。正則性的概念你也許只是粗知, Sard 定理的證明你也許永遠不準備爲它費腦筋, 但是這並不妨礙有朝一日你能夠使用它們解決自己的問題。這裡的情形是否與你學微積分裡的參變積分有某些類似: 今天你多半已經忘記了有關的公式怎樣證明, 甚至公式本身亦不易記起, 但是如果需要你計算一個參變積分時, 你是會翻書查表把這個積分算出來的, 這就是你的本事。

在前面同倫 $\mathcal{H}$ 的設計中, $(1-t)c$ 這一項的設置, 最是妙著。這使我們一開始就抓住一個維數高得多的正則映照, 然後利用廣義 Sard 定理, 容易製造出能夠解決面臨問題的同倫 H 來, 並且 H 是正則的同倫。運用之妙, 存乎一心。c 項的首次引進, 是同倫方法先驅者們的傑作, 我們不敢掠美。高堂安和我, 只是學了這樣的方法, 用來證明多複變的 Rouché 定理。本來, 多複變的 Rouché 定理需要使用度理論 (Degree theory), 而本文的做法就簡單得多, 直觀得多。也許可以說, 我們只是最早把同倫方法用於多複變的討論而已。

數值計算和特徵值問題

同倫方法的大宗應用, 是數值計算。在多複變 Rouché 定理的證明之中, 如果把 g 看作是要算零點 (即要求根) 的映照, 把 f 或 f_c 看作是爲了算 g 的零點而使用的輔助映照, 那麼同倫方法就使我們可以沿著簡單光滑曲線從輔助映照的已知零點出發, 走向

目標映照 g 的零點。輔助映照是由你選的,你可以選得十分好, 十分方便, 最要緊的是怎樣和目標映照相匹配 (how to match)。文獻中業已出現的計算多項式全部零點和計算多項式方程組全部解的方法, 基本思想都是這樣。至於在數值上怎樣沿著光滑曲線走, 已經有許多成熟的方法。例如, 所謂預估校正法 (predictor-corrector method) 就是這樣一種算法: 沿曲線的切線走一步預估, 再用譬如說牛頓 (Newton) 方法校正, 這樣一步一步走下去。於是, 自然就出現步長選取和步長調節的問題。

關鍵還是同倫本身如何設計。如果把前面的 $c \in C^n$ 叫做同倫 $\mathcal{H}$ 和同倫 H 的設計參數 (design parameter), 那麼因爲我們可以在 C^n 的滿測度 (full measure) 子集中選取合乎要求的 c, 所以按照幾何概率 (geometric probability), 人們就說: 對於設計參數的每一隨機 (random) 選取, 同倫方法成功的概率是1。在實際使用中, 同倫方法成功的概率 (或確率, 或機率) 接近於1。

同倫方法當前引人注意的工作, 是李天岩等人關於虧欠 (deficient) 多項式方程組算法和特徵值 (eigenvalue) 問題的研究。

設

$$f = (f_1, \ldots, f_n) \quad : \; C^n \to C^n$$

是一個多項式映照, 每個分量 f_j 由有限個形如 $az_1^{q_1} \ldots z_n^{q_n}$ 的項組成, 其中 a 是非零複常數, $q_1, \ldots, q_n$ 是非負整數, $z_1, \ldots, z_n$ 是 n 個複變量。這時, $q_1 + \ldots + q_n$ 叫做 $az_1^{q_1} \ldots z_n^{q_n}$ 項的階數, 而 f_j 中所有項的階數的最大者 d_j, 叫做 f_j 的階數, 最後, 稱 $(d_1, \ldots, d_n)$ 爲多項式映照 f 的階數。經典的 Bezoút 定理斷定, 映照 f 的孤立零點的數目不超過 $d_1 \ldots d_n$, 後者叫做多項式映照 f 的 Bezoút 數。如果多項式映照 f 的孤立零點數目正好等於它的 Bezoút 數, 就說它是滿零點的多項式映照, 否則的話, 就說它是虧欠的多項式映照。已經清楚, 如果 f 的齊次 (homogeneous) 多項式映照只有 $0 \in C^n$ 這個“平凡零點”, 那麼 f 就滿零點。當然, 零點數目是按重數算的。

值得注意的是, 實際應用中出現的, 常常是虧欠的多項式。因爲輔助映照通常總是滿零點的, 如果仍依原來的方式從輔助映照的全部零點出發進行計算, 一定有許多曲線發散到無窮遠的地方, 造成很大的浪費。爲了有效地估計虧欠多項式的孤立零點數目並且經濟地把這些零點算出來, 李天岩等人提出隨機乘積同倫 (random product homotopy) 的概念, 針對存在無窮遠零點造成虧欠這個原因, 按照映照的具體結構來構造同倫, 從而不跟縱無界的曲線。

特徵值問題是虧欠多項式映照的典型例子。爲了求解頂多只有 n 個解的特徵值問題, 原來的同倫方法要跟縱 2^n 條曲線, 浪費很大。引入隨機乘積同倫之後, 可以只跟縱 n 條曲線。就曲線數目而言, 這已是最好可能的結果。特徵值問題的同倫方法, 還具有保序計算的優點。

還要注意的是, 只要有足夠的處理器, 就可以互不干擾地跟縱從輔助映照的已知零點出發的各條光滑曲線。所以, 同倫方法本身具

有並行 (parallel) 計算的結構。此外, 從本文的論述可以知道, 同倫方法還具有經常大範圍收斂 (global convergence) 的特點和整批求解的特點。

楊振寧教授說過, 20 世紀科學發展飛快, 在這樣的發展當中, 學科的交叉滲透表現出明顯的優勢。同倫方法的發展, 是一個生動的例證。

參考資料

1. Chow, S. N. Mallet-Paret, J. and Yorke, J., Finding zeros of maps: homotopy methods that are constructive with probability one, Math. Comp., 32 (1978), 887-899。
2. id., A homotopy method for locating all zeros of a system of polynomials, in Springer Lecture Notes in Math., 730 (1979), 77-78。
3. Garcia, C. B. and Gould, F. J., A theorem on homotopy paths, Math. Op. Res., 3 (1978), 282-289。
4. Li, T. Y., Solving polynomial systems, The Math. Intellegencer, 9 (1987), 33-39。
5. 李天岩, 求多項式方程組的所有孤立解, 數學進展, 17 (1988), 260-266。
6. Milnor, J., Topoloy from the Differentiable Viewpoint, The Univ. Press of Virginia, 1965。
7. Naber, G. L., Topological Methods in Euclidean Spaces, Cambridge Univ. Press, 1980。
8. Gao, T. and Wang, Z., Homotopy methods and a generalization of Rouché theorem, in Yang, C. C. et al. (eds.) Complex Analysis and Applications, Pitnam's Lectures Note in Math. Series。
9. 王則柯, 高堂安, 同倫方法引論, 重慶出版社, 1990。

—本文作者任教於廣州中山大學數學研究所—