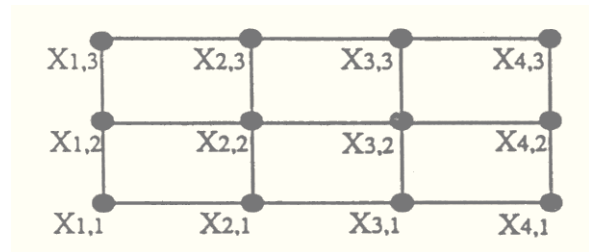


甜甜圈、包子、麻花

徐力行

一. 前言

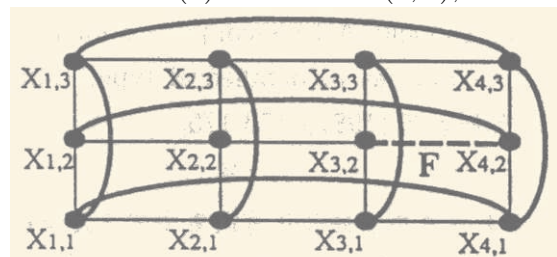
去年 (1993) 夏天, 許德標教授在中央研究院資訊研究所講授一系列有關連接網路的發展。並提出許多有趣的研究主題。相信所有參加的人都獲益不少。其中許老師提及 Harary 及 Hayes [1] 於今年在 Networks 的期刊上發表的一篇文章中, 有下面的有趣問題。



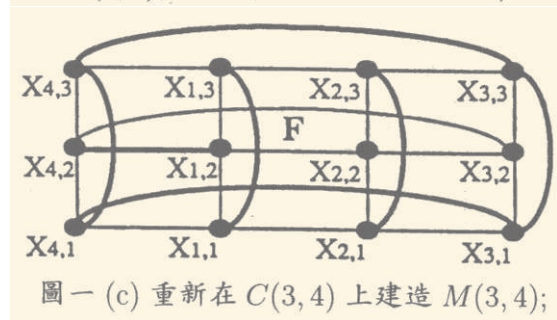
二. 甜甜圈

網絲 (mesh) 是一種在計算機科學中常見的結構 [3], 通常我們利用 $M(m_1, m_2, \dots, m_k)$ 表示一 k 維網絲, 其中 k 和每一個 m_i 皆為大於或等於 2 的整數。在圖 1(a) 中我們以 $M(3, 4)$ 的網絲為例子, 藉由此例子不難瞭解網絲的一般結構。為了使本文更通俗性, 我們只考慮二維網絲, 有興趣的人可自行推廣至任意的 k 維網絲。我們將 $M(m_1, m_2)$ 的水平線和垂直線都連成一圓, 也就是總共加入 $m_1 + m_2$ 條邊, 形成如圖 1(b) 的圖形, 記為 $C(m_1, m_2)$ 。數學工作者習慣上稱 $C(m_1, m_2)$ 為甜甜圈。

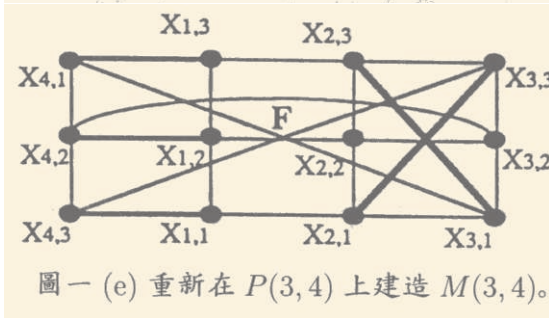
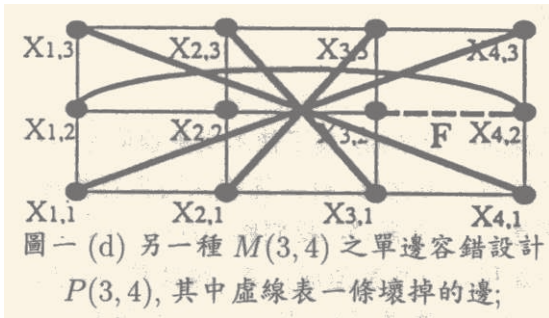
圖一 (a) 二維網絲 $M(3, 4)$;



圖一 (b) 一種 $M(3, 4)$ 之單邊容錯設計 $C(3, 4)$, 其中虛線表一條壞掉的邊;



圖一 (c) 重新在 $C(3, 4)$ 上建造 $M(3, 4)$;



$C(m_1, m_2)$ 為 $M(m_1, m_2)$ 的一種單邊容錯設計: $C(m_1, m_2)$ 上的任何一邊如果壞了, 我們可重新建造一 $M(m_1, m_2)$ 。見圖 1(c), 1(d)。Harary 和 Hayes [1] 在論文中猜測 $C(m_1, m_2)$ 為 $M(m_1, m_2)$ 的最佳單邊容錯設計, 也就是說任何 $M(m_1, m_2)$ 的單邊容錯設計至少要加 $m_1 + m_2$ 條邊。

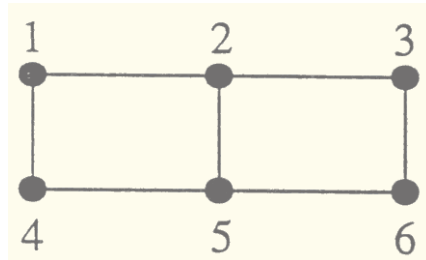
三. 包子

我的學生周銳行一邊思考這個題目, 一邊吃著包子時。他忽然注意到包子的包法可視為將所有圓周上的點與其正相對點 (antipodal) 連接而設計出如圖 1(e) 的 $P(m_1, m_2)$ 。參考圖 1(f), 我們不難證明 $P(m_1, m_2)$ 為 $M(m_1, m_2)$ 之單邊容錯設計。顯然 $P(m_1, m_2)$ 比 $C(m_1, m_2)$ 少兩條邊, 所以 Harary 和 Hayes 的猜測是錯的。

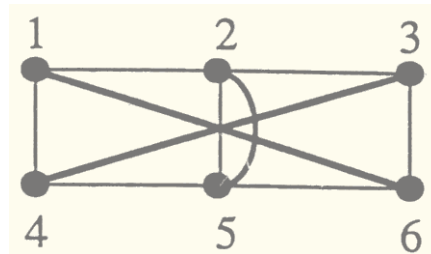
四. 麻花

數學工作總是這樣, 一波才完一波又來。Harary 和 Hayes 設計的 $C(m_1, m_2)$ 不是 $M(m_1, m_2)$ 之最佳單邊容錯設計, 那我們設計的 $P(m_1, m_2)$ 是否為 $M(m_1, m_2)$ 之最佳單邊容錯設計? 對某些 $M(m_1, m_2)$ 言, $P(m_1, m_2)$ 不是 $M(m_1, m_2)$ 之最佳單邊容錯設計。我們認為比包子好的設計會將整個網絲扭曲, 有如麻花一般。

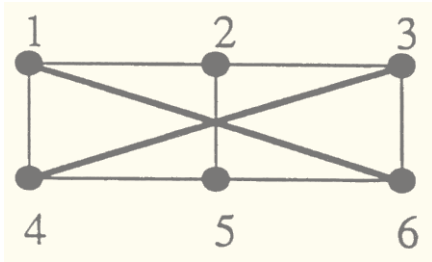
圖 2(a) 中為 $M(2, 3)$ 。若依包子似的設計 $P(2, 3)$ 如圖 2(b) 所示。我們的 $M(2, 3)$ 單邊容錯設計 $D(2, 3)$ 為在 $P(2, 3)$ 上去掉一條 2, 5 間的連線。參考圖 2(c)。顯然任何一條非 2, 5 間的連線壞了, 我們可利用 $P(2, 3)$ 的方式重建, 而 2, 5 間的連線壞了之後, 我們可用圖 2(d) 重建 $M(2, 3)$ 。



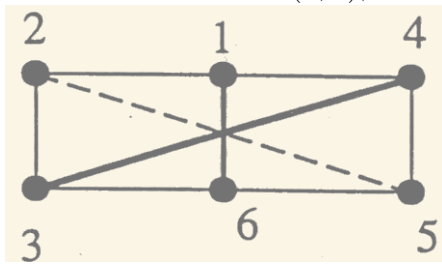
圖二 (a) 二維網絲 $M(2, 3)$;



圖二 (b) 一種 $M(2, 3)$ 之單邊容錯設計 $P(3, 4)$;



圖二 (c) 一種只加兩條邊的 $M(3, 4)$ 之單邊容錯設計 $D(2, 3)$;

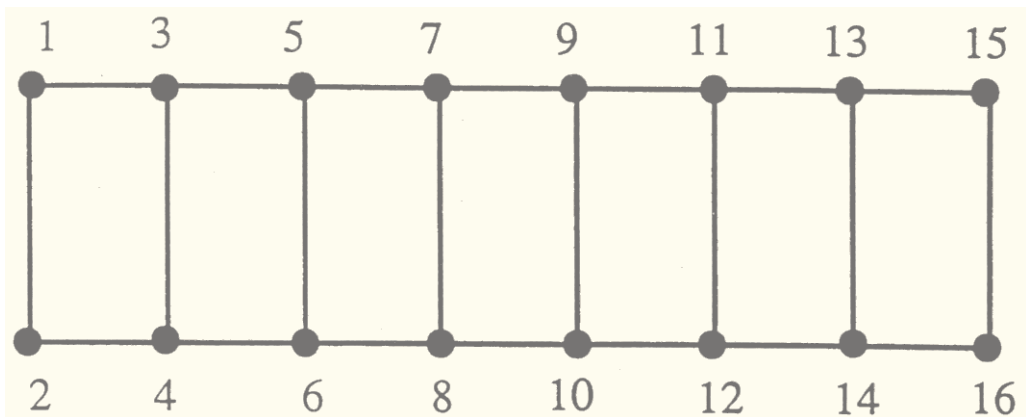


圖二 (d) 當 2, 5 間的連線壞時, 重新在 $D(2, 3)$ 上建造 $M(2, 3)$ 。

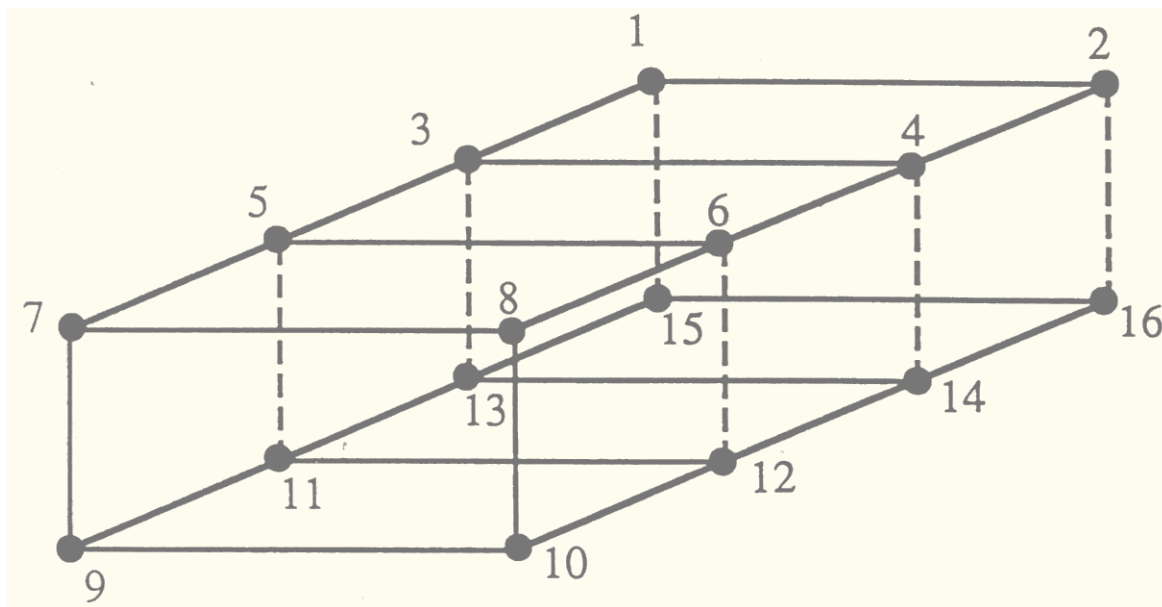
五. 後記

當我把這故事告訴張鎮華教授, 他也給了一個 $M(2, 4)$ 的單邊容錯設計, 我的學生何東洋推廣他的觀念而對大於或等於 2 的整數 k 提出下面 $M(2, 2k)$ 之單邊容錯設計。

圖 3(a) 中為 $M(2, 8)$ 。我們在上面加入六條邊, 重新畫在圖 3(b) 中而形成 $M(2, 2, 4)$ 的網絲。其中虛線表示加入的邊。顯然任何一條連接 i 到 $i + 2$ 的邊壞了, 我們可利用 $M(2, 2, 4)$ 的上、下、前、後面上的邊重新建造 $M(2, 8)$ 。而任何連接 i 到 $i + 1$ 的邊壞了, 當 i 不等於 7 或 9 時, 我們可利用 $M(2, 2, 4)$ 上的左、右兩面及前面上的邊重新建造 $M(2, 8)$ 。而當連接 7 到 8 的邊或連接 9 到 10 的邊壞了, 則我們可利用 $M(2, 2, 4)$ 上的左、右兩面及後面上的邊重新建造 $M(2, 8)$ 。所以 $M(2, 2, 4)$ 為 $M(2, 8)$ 之單邊容錯設計。



圖三 (a) 二維網絲 $M(2, 8)$;



圖三 (b) 三維網絲 $M(2, 2, 4)$ 。

顯然網絲的最佳單邊容錯設計究竟為何，我們仍不知道，藉數學傳播一角，提出此問題，並期望有拋磚引玉的功效。

參考資料

1. F. Harary and J. P. Hayes, Edge fault tolerance in graphs, *Networks* 23 (1993), pp. 135-1142.

2. R. S. Chou and L. H. Hsu, 1-edge fault-tolerant designs for meshes, to appear in *Parallel Processing Letters*.
 3. F. T. Leighton, *Introduction to Parallel Algorithms and Architecture: Arrays, Trees, Hypercubes*, Morgan Kaufmann Publishers (1992).

—本文作者任教於國立交通大學資訊科學系—