音樂與數學: 從弦內之音到弦外之音

蔡聰明

音樂的悅耳是人人喜愛的, 數學的抽象使許多人望而怯步。但是對於音樂與數學都喜愛的人, 卻能深深體會到兩者具有密切的關連。

數學家 Sylvester(1814-1897) 說 :「 音樂是聽覺的數學, 數學是理性發出的音樂, 兩者皆源於相同的靈魂。」Leibniz(1646-1716) 也說 :「 音樂是一種隱藏的算術練習, 透過潛意識的心靈跟數目字在打交道。」他又說:「世界上所有的事情都是按數學的規律來發生。」他們兩人都可以從音樂中看到數學, 並且從數學中聽到音樂, 比美於詩人兼畫家王維的「詩中有畫, 畫中有詩。」

近代作曲家 Stravinsky(1882-1971) 說:「音樂的形式較近於數學而不是文學, 音樂確實很像數學思想與數學關係。」他特意將「像數學思想的東西」溶入他的音樂作品之中。

音樂為何悅耳、調和、美呢? 可否說出一些道理?

這涉及到許多因素, 但主要的有主觀與客觀兩方面, 音樂是用耳朵聽的感受, 是一種聽覺的藝術, 而聽覺是主觀的價值判斷, 純由經驗決定, 因此很難爭辯; 另一方面, 利用數學可對音樂 (包括波動方程、頻率、波形、頻率比) 作分析, 求得科學的解釋, 從而了解音樂現象背後的道理, 這是客觀的所謂音響學 (acoustics) 或樂理。本文僅限於討論客觀的物理現象這一面, 即探索音樂與數學的互動發展, 作一些歷史考察。把能夠用數學講明白的部分說清楚, 其餘的最好就是閉嘴, 改用耳朵欣賞。

一. 問題與基本術語

彈弄一根琴弦, 弦因作周期性的振動而發出一個音 (a tone), 它有四個基本要素:

音高(pitch): 一個音的高低由弦振動的頻率 (frequency) 決定, 頻率越大, 音越高。頻率定義為每秒振動的周期數, 其單位叫做 Hertz(簡記為 Hz), 每秒振動一個周期數就叫 1Hz。

音長: 一個音持續時間的長短。

音強(intensity): 一個音的強弱, 由振幅 (amplitude) 的大小決定, 振幅越大, 音越強。

音色(quality or color): 由音波的形狀決定, 例如小提琴與鋼琴的聲音不同就是波形不同所致。

其次, 我們要介紹音程 (interval) 這個重要概念。衡量兩個音的音高所形成的距離就叫做音程。因此, 任何兩個音都有音程。設兩個音的頻率分別爲 f_1 與 f_2 (不妨設 $f_1 < f_2$), 如何定量地描述它們之間的音程呢? 最常見的有下列三種 (相通的) 定法:

(i) 採用頻率比 $f_1 : f_2$,

(ii) 採用頻率的比值 $\frac{f_2}{f_1}$,

(iii) 採用頻率比值的對數 $\log(\frac{f_2}{f_1})$, 叫做對數音程。

總之, 頻率比 (而非頻率差) 才是核心概念。這建立在下面的實驗基礎上面: 四個音 f_1, f_2, f_3, f_4, 如果具有 $\frac{f_2}{f_1} = \frac{f_4}{f_3}$ 的關係, 那麼彈奏 f_1 與 f_2 跟彈奏 f_3 與 f_4 聽起來感覺相同。因此, 用頻率比來定義音程是方便且適切的。例如頻率比爲 1:2, 2:3, 3:4 時, 分別爲八度、五度及四度音程。

本文我們關切的是, 音樂對數學所引發出的四個基本的「弦內之音」問題:

(i) **畢氏琴弦調和律**: 當兩個音的頻率成爲簡單整數比時, 同時或接續彈奏, 所發出的聲音是調和的。爲何會如此呢?

(ii) 如何定出音律, 即定出音階:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} C & , & D & , & E & , & F & , & G & , & A & , & B & , & C' \\ do & & re & & mi & & fa & & sol & & la & & si & & do \end{array}$$

的頻率比?

(iii) **泛音之謎**: 彈弄一根琴弦, 耳朵靈敏的人同時可以聽出一個基音(the fundamental tone) 與一組泛音 (the overtones)。如何解釋呢?

(iv) **梅仙(Mersenne, 1588-1648) 的經驗定律(1625年):**

$$f \propto \frac{1}{\ell}\sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

如何從理論上加以解釋? 其中 f 表弦振動的頻率, ℓ 表弦長, T 表張力, ρ 表密度。

兩音的頻率成簡單整數比 (例如 1:2, 2:3, 3:4, 3:5, 4:5, 5:6, 5:8) 是調和的, 這很容易用經驗加以驗證。不過, 在理論上一直沒有圓滿的解釋。例如, Galileo (1564-1643) 就說過 :「我一直無法完全明白, 爲什麼有些音合奏會是悅耳的, 但是有些音合奏不但不悅耳, 反而是冒犯。」這個問題要等到 Helmholtz(1821-1894) 提出拍音理論 (the beat theory) 才獲得部分解決。

關於度量問題, 在古代就有所謂的度、量、衡、律四種, 其中的律就是指音律。世界上各民族對音律都有或多或少的研究, 而且提出各式各樣的音律。我們僅介紹較著名的畢氏音階 (the Pythagoream scale)、純律音階 (the just scale) 以及十二平均律音階 (the tempered scale)。

至於泛音之謎與梅仙經驗律的解釋, 經過 Taylor(1685-1731), Daniell Bernoulli(1700-1782), D'Alembert(1717-1783), Euler(1707-1783) 及 Fourier(1768-1830) 等人對於弦振動 (vibrating string) 的研究, 終於發展出 Fourier 分析或叫調和分析 (harmonic analysis)。除了解決掉上述問題 (iii) 與 (iv) 之外, 還從「弦內之音」延伸到熱傳導、位勢論等「弦外之音」的收獲。Fourier 分析法變成研究大自然的「照妖鏡」, 剖析「任意函數」的利器, 因此被譽爲數學中一首美麗的詩 (a scientific poem)。

二. 畢氏音階

如何定出音階的頻率比? 這是音樂的根本問題。相信音樂的背後有數學規律可循, 並且努力去追尋出音律, 這在歷史上最早且最著名的要推畢氏學派 (Pythagorean school, 約紀元前五、六世紀。)

畢氏 (Pythagoras, 約585-500 B.C.) 發現音律有一段很美麗的故事。有一天畢氏偶然經過一家打鐵店門口, 被鐵鎚打鐵的有節奏的悅耳聲音所吸引 (從前筆者在鄉下小城鎮曾見識過打鐵店, 現代人已不易有這種經驗了。) 他感到很驚奇, 於是走入店中觀察研究, 參見圖1。他發現到有四個鐵鎚的重量比恰爲 $12:9:8:6$, 其中 9 是 6 與 12 的算術平均, 8 是 6 與 12 的調和平均, 9, 8 與 6, 12 的幾何平均相等。將兩個兩個一組來敲打皆發出和諧的聲音, 並且

$12:6=2:1$ 的一組, 音程是八度 (an octave),

$12:8=9:6=3:2$ 的一組, 音程是五度 (a fifth),

$12:9=8:6=4:3$ 的一組, 音程是四度 (a fourth)。

畢氏進一步用單弦琴 (monochord) 作實驗加以驗證, 參見圖2。對於固定張力的弦, 利用可自由滑動的琴馬 (bridge) 來調節弦的長度, 一面彈, 一面聽。在畢氏時代, 弦長容易控制, 而頻率還無法掌握, 故一切以弦長爲依據。畢氏經過反覆的試驗, 終於初步發現了樂音的奧秘, 歸結出

畢氏的琴弦律:

(i) 兩音之和諧悅耳跟其兩弦長之成簡單整數比有關,

(ii) 兩音弦長之比爲 4:3, 3:2 及 2:1 時, 是和諧的, 並且音程分別爲四度、五度及八度。

數學史家 E.T.Bell(1883-1960) 認爲這是科學史上第一個有記錄的物理實驗 [2]。畢氏非常幸運, 他碰到了一個好問題, 單純而容易實驗, 並且結果只跟簡單整數比有關, 因此他成功了。

Bell 說:

> 環繞在畢氏身邊有數不清的神奇現象, 引動著他的好奇心, 激發出無窮的想像力, 但是他卻選擇了對於思辯數學家很理想的一個科學問題: 音樂的調和悅耳跟數有關係嗎? 如果有關係, 是什麼關係? 他的老師 Thales 研究摩擦琥珀生電的現象, 這對他也是無比的神奇, 但是他直覺地避開了這個難纏的問題。如果當初他選擇數學與電的關係來研究, 他會陷於其中而得不到結果。

更進一步, 畢氏學派所推展的四藝學問: 算術、音樂、幾何學與天文學, 也整個結合在整數與調和 (harmony) 之中。畢氏音律是弦長的簡單整數比 (算術的比例論); 天文學的星球距離地球也成簡單整數比, 因此它們繞地球運行時會發出美妙的球體音樂 (the harmony of spheres); 幾何圖形是由點做成的, 點是幾何學的原子 (atoms), 點雖然很小, 但具有一定的大小, 所以任何兩線段皆可共度 (commensurable), 一切度量只會出現整數比, 而整數比就是調和, 就是悅耳的音樂。畢氏甚至說: 「哲學是最上乘的音樂」(在古時候, 哲學是愛智與一切學問的總稱。) 他大膽地總結出「萬有皆整數與調和」(All is whole number and harmony) 的偉大夢想。這種對任何事物都相信有秩序與規律可尋, 並且努力去追求單純、和諧與美的精神, 千古以降, 隨著畢氏思想的弦音而共鳴, 代代都可以聽見迴聲。

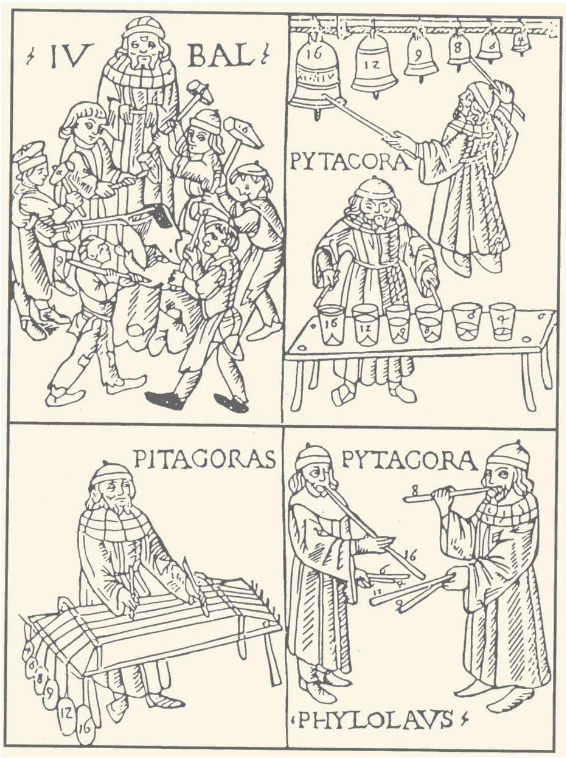


圖1

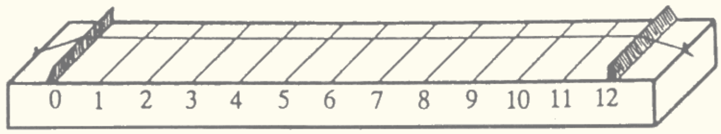


圖 2 單弦琴

Bell說得好:

> 誰會責怪熱情的畢氏從可驗證的事實, 飛躍到不可驗證的狂想呢? 音律的發現令人震驚, 也使人飛揚。誰還會懷疑空間、數與聲音合一於調和之中呢?

但是好景不常, 畢氏學派很快就發現到單位正方形的邊長與對角線是不可共度的 (incommensurable), 這等價於 $\sqrt{2}$ 不是整數比, 因而畢氏的天空出現了破洞。這是數學史上的第一次危機, 後來才由 Eudoxus(408 $\sim$ 約355 B.C.) 作了煉石補天的工作。留下的石頭, 兩千多年後被 Dedekind(1831-1916) 拿來建構出實數系。這段歷史美妙得有點像神話故事「女媧煉石補天」的情節。

回到定音階的頻率比問題。我們要採用較近代的術語來敘述。Galileo 發現到弦振動的頻率 f 跟弦長 ℓ 成反比, 即

$$f \propto \frac{1}{\ell}。$$

因此, 我們可以將畢氏所採用的「弦長」改為「頻率」來定一個音的高低。從而畢氏的發現就是: 兩音的頻率比為 1:2, 2:3 及 3:4 時, 分別相差八度, 五度及四度音。例如, 頻率為 200 與 300 之兩音恰好相差五度音。

定音階的問題就是要在 1 與 2 之間插入六個簡單整數比之分數:

$$r_1 = 1 < r_2 < r_3 < r_4 < r_5 < r_6 < r_7 < r_8 = 2$$

使其中含有四度音 $\frac{4}{3}$ 及五度音 $\frac{3}{2}$。

畢氏採用「五度音循環法」來定出音階: 由 1 出發, 不斷昇高五度音, 即接續乘以 $\frac{3}{2}$, 再降八度音 (即除以 2) 或昇八度音 (即乘以 2), 拉回到 1 與 2 之間。詳細情形如下列三個步驟:

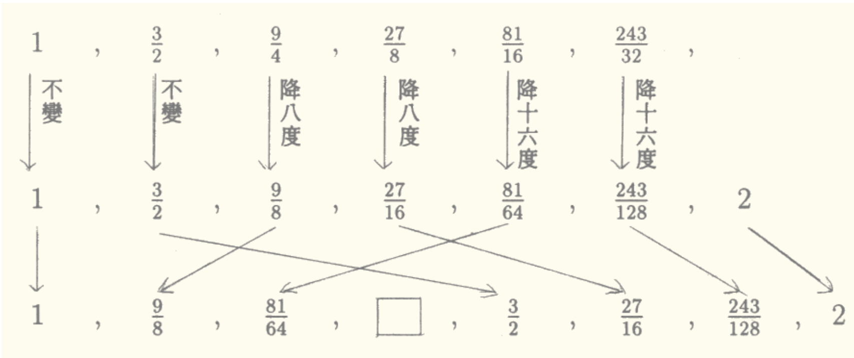
(I) 任取一個基準音, 不妨取為 1, 逐次昇高五度得到:

$$1,\ \frac{3}{2},\ (\frac{3}{2})^2,\ (\frac{3}{2})^3,\ (\frac{3}{3})^4,\ (\frac{3}{2})^5,$$

或

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{9}{4},\ \frac{27}{8},\ \frac{81}{16},\ \frac{243}{32}$$

(II) 將 (I) 中的結果拉回到一個單純八度音, 即 1 與 2 之間, 再由小排到大:



(III) 在 (II) 中還缺少一個很重要的第四音, 這可以由 1 出發, 往下降五度音, 即乘以 $\frac{2}{3}$:

$$\frac{2}{3} \longleftarrow 1$$

再昇八度音, 得到第四音:

$$\frac{2}{3} \longrightarrow \frac{4}{3}$$

補到 (III) 中, 就得到畢氏音階:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} C & , & D & , & E & , & F & , & G & , & A & , & B & , & C' \\ 1 & , & \frac{9}{8} & , & \frac{81}{64} & , & \frac{4}{3} & , & \frac{3}{2} & , & \frac{27}{16} & , & \frac{243}{128} & , & 2 \end{array}$$

畢氏透過單弦琴的實驗, 做出畢氏音階的頻率比。對於畢氏學派而言, 音樂就是整數比。不僅止於此, 這還貫穿於整個大自然、藝術與人生之中。據說畢氏臨終之言是: 「勿忘勤弄單弦琴。」(Remember to work with the monochord。)

中世紀的 Boethius(475-524) 將調和理論分成三個等級, 拾級而上, 達於完美: 最初級的是樂器的音樂 (musica instrumentalis), 包括歌唱及樂器演奏出來的音樂; 其次是人類的音樂 (musica humana), 講究身體與靈魂的調和、平衡與適當的比例; 最完美的調和是世界的音樂 (musica mundana), 包括行星的井然有序之運行、元素的適當比例混合、四季的循環以及大自然、宇宙的和諧。Boethius 坐過牢, 在監牢中寫出著名的「哲學的慰藉」一書。

事實上, 畢氏音階律也可以採用「三分損益法」(又叫做「管子法」)。在紀元前四世紀, 管子一書的地圓篇記載有此法。九寸長的竹管, 圓周長九分, 所謂「三分損益法」就是交互使用「三分損一法」(即去掉三分之一的長) 以及「三分益一法」(即將所剩再增加三分之一的長)。改用頻率的說法即爲: 由一個音出發, 不妨取其爲1,「三分損一法」就是乘以 $\frac{3}{2}$ (即昇高五度音程),「三分益一法」就是乘以 $\frac{3}{4}$ (即降四度音程), 如此交互相生, 得到

$$1\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ \frac{9}{8}\ ,\ \frac{27}{16}\ ,\ \frac{81}{64}\ ,\ 2$$

由小排到大就得到所謂的「五聲音階」(the pentatonic scale):

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & , & \frac{9}{8} & , & \frac{81}{64} & , & \frac{3}{2} & , & \frac{27}{16} & , & 2 \\ \text{宮} & & \text{商} & & \text{角} & & \text{徵} & & \text{羽} & & \text{宮} \end{array}$$

孫子說 :「 聲不過五, 五聲之變, 不可勝聽也。」這五聲指的就是「宮、商、角、徵、羽。」

再補上

$$\frac{81}{64} \times \frac{3}{2} = \frac{243}{128}$$

及第四音 $\frac{4}{3}$ 就得到畢氏音階 (或叫七音音階):

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & , & \frac{9}{8} & , & \frac{81}{64} & , & \frac{4}{3} & , & \frac{3}{2} & , & \frac{27}{16} & , & \frac{243}{128} & , & 2 \\ \text{宮} & & \text{商} & & \text{角} & & \text{變徵} & & \text{徵} & & \text{羽} & & \text{變宮} & & \text{宮} \\ C & & D & & E & & F & & G & & A & & B & & C' \\ Do & & Re & & Mi & & Fa & & Sol & & La & & Si & & Do \end{array}$$

如果說「音樂是聽覺的數學」, 那麼其數學就是音律; 反過來, 如果說「數學是理性發出的音樂」, 那麼其音律就是邏輯。畢氏研究音律, 並且把從古埃及與巴比倫接收過來的經驗式的數學知識, 嘗試組織成邏輯演繹系統, 這在精神上可以說是相通的、一貫的。雖然由於 $\sqrt{2}$ 的出現而沒有完全成功, 但是畢氏卻爲後人 (如歐幾里德, Euclid) 作了重要的舖路工作。成功是踏在前人的失敗上走出來的。

畢氏音階好不好呢? 要衡量一種音階的好壞, 通常都將它跟「自然音程」作比較。什麼是自然音程呢?

根據畢氏的琴弦律, 兩音的頻率愈成簡單整數比愈調和, 其音程就叫做自然音程。下面我們列出調和的自然音程:

兩音頻率比	音 程
1 : 1	完全 1 度
1 : 2	完全 8 度
2 : 3	完全 5 度
3 : 4	完全 4 度
4 : 5	大 3 度
5 : 6	小 3 度
3 : 5	大 6 度
5 : 8	小 6 度

注意到, 有的書將上表中的「完全」說成「純」, 例如完全8度就是純8度等等。

現在考慮畢氏音階相鄰兩音之間的音程:

$$1,\ \frac{9}{8},\ \frac{81}{64},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{27}{16},\ \frac{243}{128},\ 2$$

音程: $\frac{9}{8},\ \frac{9}{8},\ \frac{256}{243},\ \frac{9}{8},\ \frac{9}{8},\ \frac{9}{8},\ \frac{256}{243}$

其中 $\frac{9}{8}$ 是全音程 (whole tone), $\frac{256}{243}$是半音程 (Semi tone)。所謂大 3 度是指含有兩個全音, 小 3 度是指含有一個全音與一個半音。

五度音程 $\frac{3}{2}$ 與四度音程 $\frac{4}{3}$ 都很好。但是大三度音程就有點兒走音: $\frac{\mathrm{Mi}}{\mathrm{Do}}$ 應該是 $\frac{5}{4}=1.250$, 而在畢氏音階中, 此比值爲 $\frac{81}{64}=1.265$, 稍嫌尖銳。復次, 小三度音程 $\frac{\mathrm{Fa}}{\mathrm{Re}}$ 應該是 $\frac{6}{5}=1.200$, 但在畢氏音階中, 此比 值爲

$$\frac{4}{3}\div\frac{9}{8}=\frac{32}{27}=1.185$$

又嫌稍低。

進一步, 考慮半音音階 (the chromatic scale), 也會出現問題。半音音階的造法如下:

(I) 由任意點出發, 不妨取爲1, 上昇與下降五度音程:

$(\frac{2}{3})^6$	$(\frac{2}{3})^5$	$(\frac{2}{3})^4$	$(\frac{2}{3})^3$	$(\frac{2}{3})^2$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2})^2$	$(\frac{3}{2})^3$	$(\frac{3}{2})^4$	$(\frac{3}{2})^5$	$(\frac{3}{2})^6$
↓	↓	↓	↓	↓				↓	↓	↓	↓	↓
$\frac{64}{729}$	$\frac{32}{243}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{243}{32}$	$\frac{729}{64}$

(II) 將 (I) 中的結果拉回到一個單純八度音程之間:

$\frac{64}{729}$	$\frac{32}{243}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{243}{32}$	$\frac{729}{64}$
↓昇四個八度	↓昇三個八度	↓昇二個八度	↓昇二個八度	↓昇二個八度	↓昇八度	↓不變	↓不變	↓降八度	↓降八度	↓降十六度	↓降十六度	↓降二十四度
$\frac{1024}{729}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{128}{81}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{243}{128}$	$\frac{729}{512}$

(III) 再將 (II) 由小排到大:

1	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{729}{512}$ / $\frac{1024}{729}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{128}{81}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{243}{128}$	2
do	*do*$^\sharp$ / *re*$^\flat$	*re*	*re*$^\sharp$ / *mi*$^\flat$	*mi*	*fa*	*fa*$^\sharp$ / *sol*$^\flat$	*sol*	*sol*$^\sharp$ / *la*$^\flat$	*la*	*la*$^\sharp$ / *si*$^\flat$	*si*	*do*

在 (III) 中, 我們看出了兩個困難: 首先半音的音程有兩種, 其一是 do-do$^\sharp$, re-re$^\sharp$, mi-fa, sol-sol$^\sharp$, la-la$^\sharp$ 與 si-do 之間的音程爲 $\frac{256}{243}=1.053$; 另一方面, do$^\sharp$-re, re$^\sharp$-mi, sol$^\sharp$-la 與 la$^\sharp$-si 之間的音程爲 $\frac{2187}{2048}=1.068$。其次, 同一個音符 fa$^\sharp$ 與 sol$^\flat$ 取兩個不同的值 $\frac{729}{512}$ 與 $\frac{1024}{729}$。

三. 純律音階

由於畢氏音階有許多缺點, 為了實現「調和就是簡單整數比」這個理想, 偉大的天文學家 C. Ptolemy(約85-165年) 將畢氏音階中的 $\frac{81}{64}$, $\frac{27}{16}$ 與 $\frac{243}{128}$ 分別修改為 $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{3}$ 與 $\frac{15}{8}$, 這樣就得到了較理想的純律音階。

詳言之, 純律音階的造法如下:

(I) 以大三和弦 (a major triad) 為出發點:

$$\begin{array}{ccc} \text{do} & \text{mi} & \text{sol} \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \end{array}$$

(II) 由 sol 上昇大三和弦並且由 do 下降大三和弦:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{do} & \text{mi} & \text{sol} & & \\ & & 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} & & \\ \text{fa}' & \text{la}' & \text{do} & & \text{sol} & \text{si} & \text{re}' \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} & \frac{15}{8} & \frac{9}{4} \\ 4 & 5 & 6 & & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

(III) 將 (II) 之結果拉回到單純的一個八度音程之中:

$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{9}{4}$
↓昇八度	↓昇八度	↓不變	↓不變	↓不變	↓不變	↓降八度
$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{9}{8}$

(IV) 將 (III) 之結果由小排列到大:

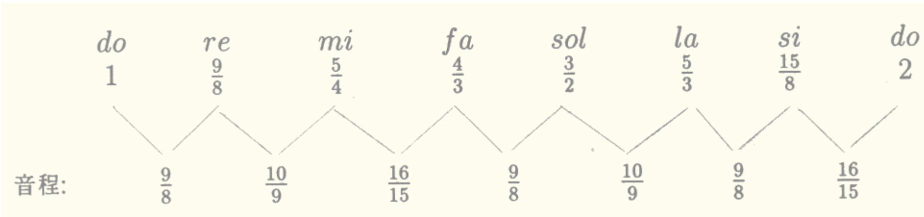
$$\begin{array}{cccccccc} \text{do} & \text{re} & \text{mi} & \text{fa} & \text{sol} & \text{la} & \text{si} & \text{do} \\ 1 & \frac{9}{8} & \frac{5}{4} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{15}{8} & 2 \end{array}$$

這就是純律音階。

根據 Helmholtz 與 Delezenne 的研究證實: 世界上第一流的小提琴家與歌唱家都按純律來演奏或演唱。

首先我們注意到, 在純律音階中, 大三和弦 (do, mi, sol), 屬三和弦 (dominant triad: sol, si, re) 及下屬三和弦 (subdominant triad: fa, la, do) 皆呈 $4:5:6$ 之比。

其次, 考察兩音之間的音程:



我們發現第一個困難是有兩個全音音程: 一個是 $\frac{9}{8}=1.125$, 另一個是 $\frac{10}{9}=1.111$; 而半音音程 $\frac{16}{15}=1.067$。第二個困難是不調和: 小三度音程

$$\frac{\text{fa}}{\text{re}}=\frac{4}{3}\div\frac{9}{8}=\frac{32}{27}$$

並不是理想中的 $\frac{6}{5}$; 五度音程

$$\frac{\text{la}}{\text{re}}=\frac{5}{3}\div\frac{9}{8}=\frac{40}{27}$$

也不是理 想中的 $\frac{3}{2}$。

我們可以仿照畢氏音階的辦法造出純律的半音音程, 此時會出現比畢氏音階更多的混淆不明, 例如相同的音符 la$^\flat$ 與 sol$^\sharp$, re$^\flat$ 與 do$^\sharp$ 取值不同等等。

當然, 純律比畢氏音律具有更多的調和性。但是純律還會有另一個困難: 假設有一架鋼琴, 按純律來調音, 並且假設上述的純律音階就是 C 大調音階。如果我們要彈奏 D 大調, 即由 D 出發, 將每一音提高一音 (皆乘以 $\frac{9}{8}$), 如下表所示, 那麼兩調的 E 與 A 就不相同, 這表示我們無法平順地移調 (transposition) 或轉調 (modulation)。

	do	re	mi	fa	sol	la	si	do
	C	D	E	F	G	A	B	C
C 大調:	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
D 大調:	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{135}{64}$	$\frac{9}{4}$
	D	E	F$^\sharp$	G	A	B	C$^\sharp$	D

所有這些困難在十七世紀時, 人們已清楚認識到。解決之道就是創立平均律音階。

四. 十二平均律音階

畢氏音階與純律音階都建立在三度或五度音程上面, 但是由任何一個音出發, 昇高或降低五度或三度都無法達到其出發音的八度之整數倍 (即不封閉)。這是這兩種音階出現困難的部分原因。

理想的音階應該滿足下列三個條件:

(i) 跟自然音程三度、四度、五度等一致,

(ii) 可以自由無礙地移調與轉調,

(iii) 適用於鍵盤樂器 (如鋼琴), 使得對於調音不同的鍵盤樂器都可以和諧地一齊演奏。

顯然這三個條件是不相容的。妥協的辦法是, 將條件 (i) 稍作犧牲, 以保全條件 (ii) 與 (iii)。這就產生出十二平均律, 即將八度音程平均分成十二個半音。換言之, 平均律稍偏離了所有的協和的自然音程, 但是偏離的程度非常小, 以致於對耳朵不構成冒犯。

十二平均律音階的作法如下:

(I) 所有的半音音程皆相等, 即

$$\frac{\mathrm{do}^\sharp}{\mathrm{do}} = \frac{\mathrm{re}}{\mathrm{do}^\sharp} = \frac{\mathrm{re}^\sharp}{\mathrm{re}} = \cdots = \frac{\mathrm{do}'}{\mathrm{si}}$$

(II) 八度音程仍保持爲 1:2, 亦即

$$\frac{\mathrm{do}'}{\mathrm{do}} = 2$$

因此, 如果我們取 do 爲 1, 並且令 (I) 中的比例常數爲 α, 則易知 $\alpha = \sqrt[12]{2}$, 從而得到下表之十二平均律音階:

音	名	十二平均律
C	do	1.0000
	do$^\sharp$	$\sqrt[12]{2} = 1.0595$
D	re	$(\sqrt[12]{2})^2 = 1.1225$
	re$^\sharp$	$(\sqrt[12]{2})^3 = 1.1893$
E	mi	$(\sqrt[12]{2})^4 = 1.2601$
F	fa	$(\sqrt[12]{2})^5 = 1.3351$
	fa$^\sharp$	$(\sqrt[12]{2})^6 = 1.4145$
G	sol	$(\sqrt[12]{2})^7 = 1.4987$
	sol$^\sharp$	$(\sqrt[12]{2})^8 = 1.5878$
A	la	$(\sqrt[12]{2})^9 = 1.6823$
	la$^\sharp$	$(\sqrt[12]{2})^{10} = 1.7824$
B	si	$(\sqrt[12]{2})^{11} = 1.8885$
C$'$	do$'$	$(\sqrt[12]{2})^{12} = 2.0000$

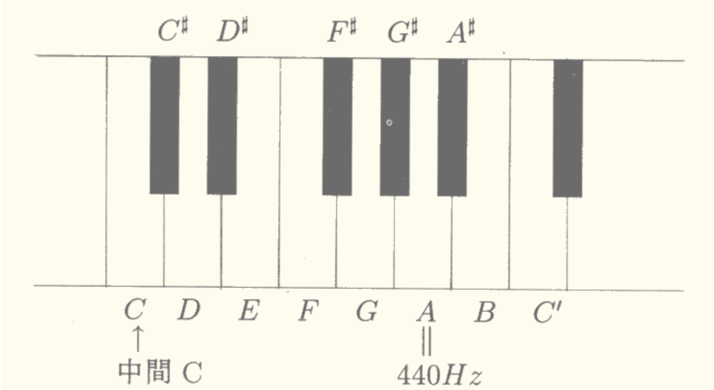
根據1939年在英國倫敦所舉行的國際會議, 決定以 A 的頻率爲 440Hz, 叫做第一國際音標, 從而所有的音之頻率就跟著確定, 如下表:

音　　名	音律		頻 率 (A=440Hz)	
	純律	平均律	純律	十二平均律
C,　　do	1	1	264	261.6
C$^\sharp$	$\frac{16}{15}$	$\sqrt[12]{2}$	281.6	277.2
D,　　re	$\frac{9}{8}$	$(\sqrt[12]{2})^2$	297	293.7
D$^\sharp$	$\frac{6}{5}$	$(\sqrt[12]{2})^3$	316.8	311.1
E,　　mi	$\frac{5}{4}$	$(\sqrt[12]{2})^4$	330	329.6
F,　　fa	$\frac{4}{3}$	$(\sqrt[12]{2})^5$	352	349.3
F$^\sharp$	$\frac{64}{45}$	$(\sqrt[12]{2})^6$	375.5	370.0
G,　　sol	$\frac{3}{2}$	$(\sqrt[12]{2})^7$	396	392.1
G$^\sharp$	$\frac{8}{5}$	$(\sqrt[12]{2})^8$	422.4	415.4
A,　　la	$\frac{5}{3}$	$(\sqrt[12]{2})^9$	440	440
A$^\sharp$	$\frac{16}{9}$	$(\sqrt[12]{2})^{10}$	469.3	466.3
B,　　si	$\frac{15}{8}$	$(\sqrt[12]{2})^{11}$	495	494.0
C$'$,　　do$'$	2	2	528	523.4

十二平均律是由德國風琴師 Werckmeister 在1691年發表一篇文章「將鍵盤樂器調成平均律的數學」所引出來的。它的優點是轉調無礙, 缺點是音不純, 其和弦效果不夠完美。下面我們列出它跟自然音程的比較:

音 程	自然音程	平均律音程	誤 差 (%)
八度	2.0000	2.0000	0
五度	1.5000	1.4987	0.087 (低)
四度	1.3333	1.3351	0.135 (高)
大三度	1.2500	1.2601	0.808 (高)
小三度	1.2000	1.1893	0.892 (低)
大六度	1.6667	1.6823	0.936 (高)
小六度	1.6000	1.5878	0.763 (低)

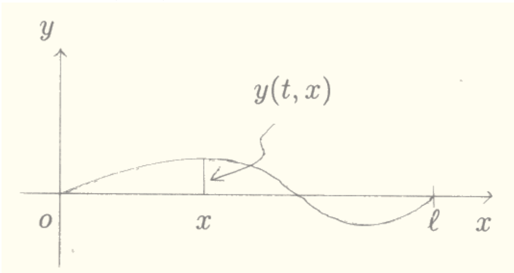
現代的鋼琴通常有88個鍵, 其中含有 7 個完整的八度 (共84個鍵) 以及在最低與最高之兩側所加的4個鍵。在每個八度之中, 含有7個白鍵與5個黑鍵。各鍵的頻率就按上述的十二平均律來調音, 參見下圖。



五. 弦內之音: 弦振動的數學

在第一節中我們說過, 自古以來音樂對數學提出了四個基本的挑戰問題。其中的第二個問題, 有關於定音律, 是屬於算術問題, 容易解決; 其餘三個問題, 涉及的數學較深, 數學家一直無法回答, 因爲對於琴弦振動現象之研究, 沒有微積分是無能爲力的。正如古人已深切體會到了「忽視運動現象就是忽視自然」(To be ignorant of motion is to be ignorant of nature), 但是古希臘人就是辦不到, 理由是數學能力不足也。一直要等到十七世紀後半葉 Newton 與 Leibniz 創立微積分, 首次成功地突破了運現象之研究。很自然地, 十八世紀初「琴弦振動問題」立即成爲當時數學界的一個研究主題, 也正好試驗新創立的微積分工具之威力, 兼揭開音樂之謎。

彈奏一根長度爲ℓ的琴弦, 令$y(t,x)$表示弦在x點、t時刻在y 方向的位移距離, 見下圖:



從物理的觀點來看, 整個樂音之謎應該都含在這個兩變數函數$y = y(t,x)$ 之中。

如何掌握這個函數? 這個函數的結構是什麼?

我們可以根據「物之理」用一個偏微分方程捕捉住它, 先保住現象 (save phenomena)。爲此, 我們要作幾個基本假設:

(i) 弦只在xy平面上的y方向振動, 平衡位置是x軸;

(ii) 弦很細, 密度均勻, 張力足夠大, 使得弦具有完全彈性, 並且重力與空氣阻力皆可忽略不計;

(iii) 弦只作微小振動, 故$\frac{\partial y}{\partial x}$很小, 並且張力在弦上任何一點的水平分量左右平衡, 即沒有x方向的運動。

對於任何琴弦而言, 這些假設都是適切而合理的。

在這些假設下, 我們容易可以推導出函數$y=y(t,x)$滿足如下的偏微分方程式 (P.D.E.):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\qquad t\geq 0,\ 0\leq x\leq \ell$$

叫做一維的波動方程式, 其中$a^2=\frac{T}{\rho}$, 並且T表示弦的張力, ρ表示弦的密度。再配合上琴弦的邊界條件 (兩端固定在x軸上) 及初期條件 (初位置爲已知函數$f(x)$, 初速度爲 0), 就得到下面的數學問題:

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} & (\text{波動方程}) \quad (1)\\ y(t,0)=0,\ y(t,\ell)=0 & (\text{邊界條件}) \quad (2)\\ y(0,x)=f(x) & (\text{初期位置}) \quad (3)\\ \frac{\partial y}{\partial t}(0,x)=0 & (\text{初期速度}) \quad (4)\end{cases}$$

我們要求解出未知函數$y=y(t,x)$。

將音樂現象定式化 (formulates) 爲具體的數學問題之後, 思考就有了著力點。按事物發展的常理 (或原子論的以簡御繁), 我們由簡單的兩變數函數試起:

$$y=(t,x)=T(t) \qquad (5)$$
$$y(t,x)=X(x) \qquad (6)$$
$$y(t,x)=T(t)X(x) \qquad (7)$$

容易驗知, (5) 與 (6) 兩式皆不可能是解答。Daniel Bernoulli 在1755年首次嘗試 (7) 式之形的解答, 很幸運地成功了。顯示這是一個偉大的妙招, 叫做分離變數法。

今將 (7) 式代入 (1) 式中得

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

此式左右兩邊分別純是 t 的函數與純是x的函數, 而兩邊相等, 故只好等於一個常數, 令其爲$-\lambda$(取負號較方便), 於是得到兩個常微分方程式

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \qquad (8)$$
$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0 \qquad (9)$$

這是簡諧運動(或單頻運動) 的方程式。

其次, 對$y(t,x)=T(t)X(x)$考慮邊界條件 (2) 得到

$$T(t)X(0)=0,\quad T(t)X(\ell)=0,\quad \forall t\geq 0$$

爲了得到有聊的解答(nontrivial solution), 只好

$$X(0)=0=X(\ell) \tag{10}$$

再考慮初期速度條件 (4) 得知

$$T'(0)=0 \tag{11}$$

因此, 我們的問題化約成求解下面兩個常微分方程:

$$\text{(II)}\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0=X(\ell) \end{cases} \tag{12}$$

$$\text{(III)}\begin{cases} T''(t)+\lambda a^2T(t)=0 \\ T'(0)=0 \end{cases} \tag{13}$$

先求解 (12) 式, 我們分成$\lambda<0$, $\lambda=0$ 與 $\lambda>0$ 三種情況來討論。

(i) 當$\lambda<0$時, (II) 的解爲

$$X(x)=A\,e^{\sqrt{-\lambda}x}+B\,e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

其中 A,B 爲待定兩實數。考慮邊界條件 (10), 立得 $A=B=0$。從而我們只得到無聊的零解

$$X(x)=0,\quad y(t,x)=T(t)\cdot 0=0。$$

這並不是我們所期望的解答。

(ii) 當$\lambda=0$時, (II) 的解爲

$$X(x)=Ax+B$$

再考慮邊界條件 (10), 得到$A=B=0$, 仍然只得到無聊解答。

(iii) 當$\lambda>0$時, (II) 的解爲

$$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$$

由邊界條件 (10) 可得 $A=B=0$ 或

$$\begin{cases} A=0 \\ \sin\sqrt{\lambda}\ell=0 \end{cases}$$

前者只得無聊解答, 故棄之。由 $\sin\sqrt{\lambda}\ell=0$ 解得 λ 滿足

$$\sqrt{\lambda}\ell=n\pi, \qquad n=1,2,3,\cdots$$

令$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$, $n=1,2,3,\cdots$, 我們稱諸λ_n爲 (II) 之固有值 (eigenvalues)。對應於每一個固有值λ_n, (II) 就有一個解答

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{\ell}x, \qquad n=1,2,3,\cdots$$

叫做 (II) 的固有函數(eigenfunctions)。事實上, 這就是對二階微分算子D^2 作值譜分解。

對於每個固有值$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{\ell^2}$, (III) 就變成

$$\begin{cases} T''(t)+(\frac{n\pi a}{\ell})^2T(t)=0 \\ T'(0)=0 \end{cases}$$

其通解爲

$$T(t)=A_n\cos(\frac{n\pi a}{\ell}t)$$

其中A_n爲待定常數。令

$$T_n(t)=\cos(\frac{n\pi a}{\ell}t)$$

於是

$$y_n(t,x)=T_n(t)X_n(x)=\cos(\frac{n\pi a}{\ell}t)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x) \quad n=1,2,3,\cdots$$

滿足波動方程、邊界條件及初期速度條件

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ y(t,0)=0=y(t,\ell) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(0,x)=0 \end{cases} \tag{14}$$

由線性疊合原理知, 任何有限多項之線性組合

$$\sum_{n=1}^{N} C_n\cos(\frac{n\pi a}{\ell}t)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x) \tag{15}$$

仍然滿足 (14) 式。不過, 要 (15) 式也滿足初期位置, 即 (3) 式, 似乎是異想天開。改採訴諸無窮多項之線性組合也許是個好主意:

$$y(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos(\frac{n\pi a}{\ell}t)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x) \tag{16}$$

現在考慮初期位置條件, 即 (3) 式, 得到

$$y(0,x)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin(\frac{n\pi}{\ell}x) \tag{17}$$

其中係數C_n可以如下述求得: 將 (17) 式之兩邊同乘以$\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$, 再從 0 到 ℓ 逐項積分之, 於是

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)dx \tag{18}$$

總結上述, 由已給的弦之初期位置函數$f(x)$, 按 (18) 式算出係數C_n, 叫做 Fourier 係數, 利用C_n就同時得到兩個收獲: 由 (17) 式得到「任意」函數$f(x)$ 的三角級數展開, 由 (16) 式得到弦振動問題 (I) 之解答。

這眞是一個美妙而偉大的結論。在適當條件下, 其中的每一步驟皆可加以證明, 不過這並非本文的旨趣所在。

在此我們已經很清楚, 琴弦振動函數$y=y(t,x)$是由許多單頻振動

$$y_n(t,x)=C_n\cos(\frac{n\pi a}{\ell}t)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x), \quad n\in\mathbf{N}$$

組合而成的。我們稱$y_n(t,x)$爲具有頻率

$$f_n=\frac{na}{2\ell}=\frac{n}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \qquad n\in\mathbf{N}$$

的一個*駐波*(a standing wave)。

最低的單音叫做*基音*(the fundamental tone), 其頻率

$$f_1=\frac{1}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

叫做*基音頻率*; 其它較高的單音叫做*泛音*(overtones) 或*倍音*, 它們的頻率都是基音的整數倍:

$$f_2=2f_1, \quad f_3=3f_1, \quad f_4=4f_1,\ldots \quad \text{等等。}$$

基音又叫做*第一調和音*(the first harmonic), f_2之音叫做*第二調和音*(the second harmonic) 或*第一泛音*(the first overtone), f_3之音叫做*第三調和音*(the third harmonic) 或*第二泛音*(the second overtone), 其它按此類推。

換言之, 彈弄一根琴弦, 發出一個音, 這個音是由一個基音與泛音組合而成的, 泛音的頻率是基音的整數倍。泛音形成一個音的音色。

這完全解開了第一節中所提出的第三個問題: 泛音之謎, 以及第四個問題: 梅仙的經驗律。進一步, 我們也明白了爲什麼 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ 叫做調和級數 (harmonic series) 的理由: 古

時候是用弦的長度來定音的高低, 如果基音的弦長爲 1, 那麼各階泛音的弦長就是 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\cdots$ 等等; 將 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\cdots$ 相加就相當於將基音與泛音合成一個音, 反過來一個音可以分解成基音 1 與各泛音 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\cdots$ 之組合。Fourier 分析又叫調晛M分析(harmonic analysis) 也是基於同樣的理由。

更有有趣的是, 我們可以一窺著名的「聽鼓問題」(參見 [5]), Kac 的文章標題是「我們可以聽出鼓的形狀嗎?」此地我們遇到的是更簡單的一維特例 :「聽弦問題」, 我們居然可以聽出弦的長度!

令 $N(\lambda)$ 表示固有值小於 λ 的個數。今已知固有值

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{\ell^2}, \qquad n \in \mathbf{N}$$

於是

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= \sharp\{n : \lambda_n < \lambda\} \\ &= \sharp\{n : n < \frac{\ell\sqrt{\lambda}}{\pi}\} \end{aligned}$$

其中 $\sharp\{\ \}$ 表示集合的元素個數(即基數)。因此我們得到

定理: (i) $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$
(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$
(iii) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\ell}{\pi}$

上述 (iii) 就是著名的 Weyl 公式之特例。這跟「聽弦問題」有什麼關係呢? 讓我們說明於下:

因爲頻率f_n跟固有值λ_n的關係爲

$$f_n^2 = \frac{a^2}{4\pi^2}\lambda_n$$

而聽琴音可聽出頻率 $f_1, f_2, \ldots$ (假設你是金耳朵), 所以可以聽出固值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, 再透過上定理的 (iii) 就可「聽出琴弦的長度 ℓ」, 這眞神奇。

推廣到高維空間或 Riemann 流形時, 問題變得深奧且有趣多了。這裡是分析學與微分幾何學的交會地帶, 至今乃是一個熱門的研究論題。基本上這是研究 Laplace 算子的值譜以及值譜決定幾何性質到什麼程度的問題。

六. 弦外之音 : Fourier 分析

由於弦振動產生共鳴, 出現了弦外之音 — Fourier 分析。這是一個驚心動魄而美麗的發現故事, 本文只能簡述而無法詳述。

在十九世紀初 (1807年), Fourier(1768-1830) 將分離變數法 (今日又叫 Fourier 方法) 應用到求解熱傳導問題, 也成功了。更重要的額外收獲是, 他發現了一個「石破天驚」的結論 :「任何」函數都可以展開成三角級數 (今日叫做 Fourier 級數)。一舉廓清了函數的結構, 比 Taylor 展開更廣泛且更具威力。

如果我們將函數的展開比喻成函數的開花, 那麼 Fourier 分析與 Taylor 分析是分析學所開出的兩朵最美麗的花, 而且按一定的機理, 開出具有無窮多個花瓣的花。

Fourier 將每一個函數都看作是連結數與數之間的一條定律, 其中有的居然就眞的代表著自然界的定律。因此對一個函數的結構作剖析, 就表示對一條定律的分析與掌握, 這是多麼令人興奮的事。

彈奏琴弦, 發出美妙的音樂, 也產生許多困惑的問題, 最後歸結爲數學的弦振動問題。再類推到熱傳導問題, 引出 Fourier 分析、P.D.E.、集合論、聽鼓問題、近代分析學, 乃至機率論, 內容實在太豐富了。另外, 化學的元素周期律也是受音樂八音律的啓發而發現的。

Fourier說 :「對自然的深刻研究是數學發現的最豐富泉源。」(The profound study of nature is the most fruitful source of mathematical discovery。) 這是最好的證言。

後記: 筆者對音樂是個門外漢, 只是懷著一顆好奇心想弄個水落石出。文章寫成後, 筆者特別請精通樂理的楊維哲教授過目一遍, 這樣才放心。楊教授還給了下面「緊緻的」(compact) 補充:

「八度」的意思當然大家都清楚: 如果用簡譜的 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 來代表音階, 那麼比中央 C 的頻率增倍的音就是 $8 = 1'$ 了。

這裡的麻煩在於「植樹問題」: 8棵樹是只有 7 個間隔的!

我們也可以換用一種說法: 序數 (ordinal number) 與基數 (cardinal number) 之對比。如果有許多樹排成一列, 依序編號爲 $1, 2, 3, \cdots$, 這是序數;「間隔數」則是基數。(附帶一句話 :「零」是高級的概念! 念數學的人有辦法法接受「第0個」, 俗人當然不接受。) 所謂音程本來就是指兩音的距離, 所以 3 度音程是 3 棵樹之首尾間距 (從第 n, 第 $n+1$, 到第 $n+2$, 間隔數爲 2)

註:「降兩個八度」是「降15度」! 小心!

再來的問題是: 這些樹的間距並不等! 所謂 2 度音程, 在純律音階中, 有三種: 即 mi 到 fa 的半音, 頻率比爲 $\frac{16}{15}$; re 到 mi 的全音, 頻率比爲 $\frac{10}{9}$; 以及 do 到 re 的全音, 頻率比爲 $\frac{9}{8}$。

「別人沒看到, 而他看到了」, 這就是天才! Pythagoras 所看到的, 用現代話來說就是: 樂音的音程, 其頻率比總是簡單 (正) 整數比!

既然所講的是正實數之間的比, 所以在坐標化的時候, 應該採取對數尺度, (我想, 這個「乘性比較的原理」, 在高中課程中未被強調, 乃是一大罪過!) 而且以「高八度爲自然的音程」, 當然是用2做底數 ($lg = \log_2$)。

在對數尺度下, 畢氏音階就是: C= $lg1$,

$$\begin{array}{ll} D = lg\frac{9}{8} = 2lg(\frac{3}{2}) - 1, & E = 4lg(\frac{3}{2}) - 2 \\ F = (-1)lg(\frac{3}{2}) - 2 \quad , & G = lg(\frac{3}{2}) \\ A = 3lg(\frac{3}{2}) - 1 \quad , & B = 5lg(\frac{3}{2}) - 2 \end{array}$$

至於十二平均律, 更容易解釋: 硬性規定「半音」爲 $\frac{1}{12}lg(2) = \frac{1}{12}$, 用 $\frac{2}{12}$ 做爲 $lg(\frac{9}{8})$ 與 $lg(\frac{10}{9})$ 之近似值, 用 $\frac{1}{12}$ 做 $lg(\frac{16}{15})$ 之近似值, 把樹的間距調整爲: 在每個八度間距 (即對數尺度之單位長) 之中, 等分 (「按對數尺度」!) 爲12, 即 $C = 0$ (原點), $D = \frac{2}{12}$, $E = \frac{4}{12}$, $F = \frac{5}{12}$, $G = \frac{7}{12}$, $A = \frac{9}{12}$, $B = \frac{11}{12}$ 等等。這些樹, 在對數尺度上排列整齊, 但在人耳中並不齊整! 人耳寧可聽 $D = lg(\frac{9}{8}) = 0.1699$ (而不是 $\frac{2}{12} = 0.1666\cdots$), $E = lg(\frac{5}{4}) = 0.32193\cdots$ (而不是 $\frac{4}{12} = 0.3333\cdots$)。

參考文獻

1. 孫淸吉: 樂學原論, 全音樂譜出版社, 1989。
2. E.T. Bell: The Magic of Number, Dover, 1991.
3. J.S. Rigden: Physics and the Sound of Music, John Wiley and sons, 1977.
4. R.T. Seeley: An Introduction to Fouries Series and Integrals, W.A. Benjamin, 1966.
5. M. Kac: Can one hear the shape of a drum? A.M.M., (1966) 1-23.
6. J. Dodziuk: Eigenvalues of the Laplacian and the heat equation, A.M.M. (1981), 686-695.
7. S. Dostrovsky: Early Vibration theory: Physics and music in the seventeenth century, Arch. Hist. Ex. Sci. 14, (1975), 169-218.
8. E. Blackwood: The structure of recognizable Diatonie Tunings, Princeton Univ. Press, 1985.

—本文作者任教於台灣大學數學系—