絶妙的數學家(十一)

矢野健太郎著

顏　一　清譯

二十一. 道格拉斯 (Jesse Douglas, 1897-1965)

簡歷: 道格拉斯跟我一樣, 都是別布連 (Osward Veblen, 1880-1960) 教授的弟子。他在別布連教授底下做研究工作的一九三〇年前後出了幾篇優異的微分幾何學論文, 而終於在一九三六年因普拉托 (Plateau) 問題獲得第一屆費爾茲 (Fields) 獎。

1.普拉托問題

上面我們提到了普拉托問題與費爾茲獎。就從這些說起吧。

「在空間上給定一閉曲線 p, 試以 p 爲邊界, 作出有最小表面積的曲面」, 這便是普拉托問題。

這個問題有下列的實驗解法: 在空間上用鋼絲作出給定的閉曲線 p, 把它浸泡在肥皀沫裡, 然後輕輕取出, 那麼鋼絲上會套著一層肥皀膜。這層肥皀膜因 表面張力, 而形成爲 表面積最小的曲面。它便是我們所要求的曲面。

這個實驗最先由比利時實驗物理學家普拉托 (J. A. Plateau, 1801-1883) 所完成, 故以他的名字命名這一類問題。

2.費爾茲獎

費爾茲 (J. C. Fields, 1862-1943) 是位加拿大數學家。他的專長是代數函數論。一九二四年在加拿大多倫多開第七屆國際數學家會議時他擔任執行長。當時他提案說, 爲開國際數學家會議所募捐到的龐大捐款用剩的餘款希望能移作基金, 設立國際數學會議獎。這個提案在四年後, 即一九三二年的國際數學家會議被正式承認, 所設立的獎就稱爲費爾茲獎。這個獎是頒給在前後兩屆國際數學家會議的四年中做出非常出色的數學業蹟的未滿四十歲的學者兩名 (至今增加爲三、四名)。

這位道格拉斯就因他在一九三二年至一九三六年間在普拉托問題上做出傑出的成果並且是一位未滿四十歲 (在一九三六年時他三十九歲) 的學者, 而被授予第一屆費爾茲獎。

又, 在日本數學家方面, 一九五四年在阿姆斯特丹舉行的第二屆數學家會議時小平邦彥 (Kodaira Kunihiko) 得費爾茲獎。一九七〇年在法國尼斯開的戰後第六屆國際數學家會議時廣中平祐 (Hironaka Heisuke) 又獲獎。(譯註: 一九九〇年在京都的戰後第十一屆國際數學家會議時又有一位日本數學家森重文 (Mori Sigebumi) 得獎。)

3. 幸會, 幸會!

當一九五〇年至一九五二年間我待在美國的普林斯頓高等研究所時, 我分配到面對研究所正面最左邊的一個研究室做研究, 我的研究室較小, 隔鄰有別布連教授的大研究室, 接著便是愛因斯坦的大研究室。這些研究室前面有個洗手間。有一回我從洗手間要走到走廊時遇見一位外表堂皇的男士進來洗手間。我想:「這位大概是常聽別布連教授提起的 J. 道格拉斯吧?」, 不過在廁所裡面打初見面的招呼似乎很奇怪, 所以我打算裝著沒看到, 等他出來才跟他寒喧。但是他可不讓我這麼做。他突然說:「你就是別布連教授常說起的「矢野」吧? 幸會, 幸會!」, 就跟我握起手來。我狼狽地跟他打下招呼退下來。就我來說, 在廁所裡有人和你「幸會, 幸會!」, 可眞覺得尷尬突梯得很呢。

4. 道格拉斯定理

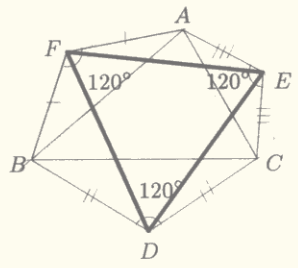
就道格拉斯得到費爾茲獎的「普拉托問題」來說, 它跟我的專長差得相當遠, 我沒法子說清楚。不過, 他在初等幾何學上發表過一個有趣的定理, 我們來說明它吧。它的標題是:“Geometry of polygons in the complex plane, J. of Math. and Physics”, 19 (1940), 93-130。

首先請大家回想起下面有名的初等幾何學的定理:「任意三角形ABC 的各邊 BC, CA, AB 爲底邊向外側作頂角爲 $120°$ 的等腰三角形DBC, ECA, FAB, 則三角形DEF 爲正三角形」。

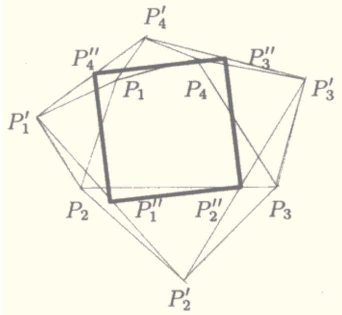
這在初等幾何學上不算是簡單的問題, 道格拉斯把它擴張如下: 平面上有一 n 邊形 $P_1P_2P_3\ldots P_n$, 在其各邊 P_1P_2, P_2P_3, $\ldots$ $P_{n-1}P_n$, P_nP_1 爲底邊向外側作頂角爲 $\frac{360°}{n}$ 的等腰三角形 $P_1P_1'P_2$, $P_2P_2'P_3$, $\ldots$, $P_{n-1}P_{n-1}'P_n$, $P_nP_n'P_1$。再以 n 邊形 $P_1'P_2'\ldots P_n'$ 的各邊爲底邊, 向外側作頂角爲 $\frac{360°\times 2}{n}$ 的諸等腰三角形, 而得各頂點爲$P_1'', P_2'', \ldots, P_n''$。又再以 n 邊形 $P_1''P_2''\ldots P_n''$ 作如上的操作前後共 $n-2$ 次, 則最後所得 n 頂點可圍成一正 n 邊多邊形。

爲讓這定理更淸楚, 我們來做做例子: 令 $n=3$, 則由剛才舉過的定理知道道格拉斯定理成立 (參照圖 (I))。再令 $n=4$, 由任意四邊形 $P_1P_2P_3P_4$ 做起吧。因 $\frac{360°}{4}=90°$, 故以 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1 爲底邊向外側作頂角爲 $90°$ 的等腰三角形 $P_1P_1'P_2$, $P_2P_2'P_3$, $P_3P_3'P_4$, $P_4P_4'P_1$ 而得四邊形 $P_1'P_2'P_3'P_4'$。又, $\frac{360°\times 2}{4}=180°$, 令各邊 $P_1'P_2'$, $P_2'P_3'$, $P_3'P_4'$, $P_4'P_1'$ 的中點爲 P_1'', P_2'', P_3'', P_4''。則四邊形 $P_1''P_2''P_3''P_4''$ 形成正方形 (參照圖 (II))。再來會稍爲複雜, 不過我們來試試看 $n=5$ 的情形。從任意五

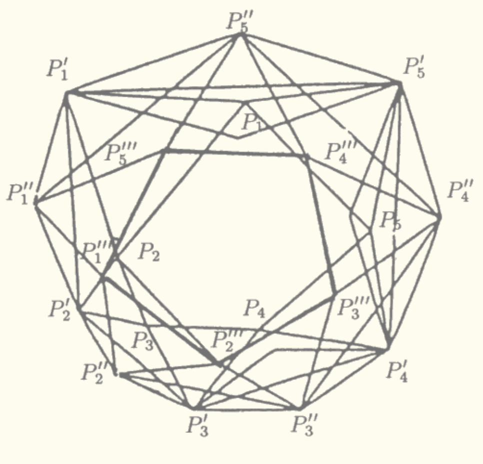
邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 做起, 由於 $\frac{360^\circ}{5}=72^\circ$, 在各邊 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_5, P_5P_1 爲底邊向外側作頂角爲 72° 的等腰三角形 $P_1P_1'P_2$, $P_2P_2'P_3$, $P_3P_3'P_4$, $P_4P_4'P_5$, $P_5P_5'P_1$, 而得五邊形 $P_1'P_2'P_3'P_4'P_5'$。再以 $\frac{360^\circ\times2}{5}=144^\circ$ 爲頂角, 以各邊 $P_1'P_2'$, $P_2'P_3'$, $P_3'P_4'$, $P_4'P_5'$, $P_5'P_1'$ 爲底邊, 向外側作等腰三角形 $P_1'P_1''P_2'$, $P_2'P_2''P_3'$, $P_3'P_3''P_4'$, $P_4'P_4''P_5'$, $P_5'P_5''P_1'$, 而得五邊形 $P_1''P_2''\ P_3''P_4''P_5''$。再來, 因 $\frac{360^\circ\times3}{5}=216^\circ$ 大於 180°, 我們就以五邊形 $P_1''P_2''P_3''P_4''P_5''$ 的各邊 $P_1''P_2''$, $P_2''P_3''$, $P_3''P_4''$, $P_4''P_5''$, $P_5''P_1''$ 爲底邊, 這回不是向外側, 而是向內側做頂角爲 $360^\circ-216^\circ=144^\circ$ 的等腰三角形 $P_1''P_1'''P_2''$, $P_2''P_2'''P_3''$, $P_3''P_3'''P_4''$, $P_4''P_4'''P_5''$, $P_5''P_5'''P_1''$, 則五邊形 $P_1'''\ P_2'''P_3'''P_4'''P_5'''$ 便是道格拉斯定理所主張的正五邊形。(參照圖 (III))。



(I)



(II)



(III)

上述情形對 $n\geq3$ 的自然數都成立。這樣說來, 道格拉斯不就可以說成爲一位發現無限多個定理的人了嗎?

—本文譯者任教於輔仁大學數學系—