基波變換

李孟書

前言

基波理論 (wavelets theory) 近年來在調和分析的研究領域中相當熱絡。本文試著從古典傅立葉級數的概念開始, 簡略地引入基波的構造方式, 並比較這兩者之間在一些數學性質上的差異; 接著重點式地描述如何導出在應用上常見的基波變換 (wavelets transform)。最後舉一個用基波變換來做影像壓縮 (image compression) 的例子作爲結束。

一. 引言:

在科學上有很多現象, 由於太複雜不易直接去了解, 需要抽取實際問題的精要部分去做較理想化的假設, 以簡化問題; 或是需把問題分解成很多細小、簡單或獨立的部分, 個個去理解它。細小的部分了解後, 對於原來大問題的解決, 就是把這些細小的部分綜合 (組合) 起來。當然經由這種程序所得的結果, 須保持對原來問題在某種程度上的接近。以上的這些步驟, 就是一般所謂的分析與綜合 (analysis and synthesis)。利用分析與綜合的觀念, 假設我們要研究一個一維度的函數 $f(x)$, 首先的「分析」步驟就是產生 $f(x)$ 的光譜 (spectrum) $S(f)$; 接著的「綜合」步驟就是相當於用反變換 T (inverse transform), 還原回到函數 $f(x)$ 本身, 也就是 $T(S(f))(x) = f(x)$。這種變換最著名的例子便是傅立葉級數 (fourier series) 及傅立葉積分 (fourier integral)。

假如 $f(x)$ 是一個週期爲 2π 的函數, 這個傅立葉係數的數列, 就是光譜 $S(f)$,

$$\begin{aligned} S(f) &= \{(Sf)_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \\ &= \{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx\}_{k=-\infty}^{\infty} \end{aligned}$$

而反變換 T, 可經由乘法及求和得到

$$T(\{(Sf)_k\}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (Sf)_k e^{ikx}$$

而 $T(S(f))(x) = f(x)$ 就相當於這個函數 $f(x)$ 可用傅立葉級數來表示。

另外一個例子, 假如 $f(x)$ 是一個非週期性的實函數, 我們有

$$\begin{aligned} S(f)(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx \\ T(S(f))(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(f)(\xi)e^{i\xi x}d\xi \end{aligned}$$

其中 $S(f)$ 就是 $f(x)$ 的傅立葉變換, 而 $T(S(f))(x) = f(x)$ 就是傅立葉反變換公式。

在數學及工程應用上尚有很多其他算子 (operator) 或變換 (transformation) 的例子。這些變換 S 與 T 到底要具有何種性質呢? 這跟我們要解決的問題有關, 但一般說來, 對於算子 S, T 的基本要求是它們應有線性的 (linear) 性質, 也就是, 對任意的實數α,β及函數f_1, f_2, 算子 S, T 滿足

$$S(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha S(f_1) + \beta S(f_2)$$

及

$$T(\alpha_1 f_1 + \beta f_2) = \alpha T(f_1) + \beta T(f_2)$$

基於抽象化的理由, 這個算子 S 可表成內積的形式, 也就是對於一群函數族 $\{g_k\}_{k\in K}$, 其中 K 是一個指標集, 我們有

$$S(f) = \{(Sf)_k\}_{k\in K} = \{\langle f, g_k\rangle\}_{k\in K} \tag{1}$$

同時, 反變換 T 亦可表成,

$$T(S(f))(x) = f(x) = \sum_{k\in K}\langle f, g_k\rangle h_k(x) \tag{2}$$

這裡 $\{h_k\}_{k\in K}$ 是另一群函數族。當我們取上式中的 $h_k(x) = g_k(x) = e_k(x) = e^{ikx}$ 時, 我們就得到傅立葉級數的模型, 也就是

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\langle f, e^{ikx}\rangle e^{ikx} \tag{3}$$

在表示式 (2) 裡, 我們可看出如果要把這式用到數值應用上的話, 我們需要對 S 與 T 多加一些性質。首先我們希望能在等式的右邊用適當的項數去逼近函數 $f(x)$; 接著在 $S(f)$ 中所載的資訊, 我們除了用它來還原回到函數 $f(x)$ 外, 我們也希望能從它讀出函數 $f(x)$ 的一些性質, 如平滑性 (smoothness), 大小 (size) 等等。可惜的是傅立葉級數中的係數, 不足以來描述大多數的函數空間 (function spaces) 中的平滑及大小特性。

二. 基波:

首先我們簡略的介紹基波如何從古典的調和分析中的 Littlewood-Paley theory 演進過來及近年來 (1985年以後) 一群數學家如何以更一般化的方法來構造它。

假如$\psi(x)$是一個具有快速減緩的 (rapidly decreasing) 實函數, 如 $\psi(x) \le \frac{c}{1+x^2}$, 而且滿足 $\int\psi(x)dx = 0$, 定義

$$\psi_b(x) = \frac{1}{b}\psi(\frac{x}{b}),\ \psi_b^a(x) = \frac{1}{b}\psi(\frac{x-a}{b})$$

則我們稱函數 $\psi(x)$ 是一個基波 (wavelet)。接下來我們可定義連續型的基波變換 (continuous wavelets transform) 爲函數 $f(x)$ 與 $\psi_b^a(x)$ 的內積。亦即

$$\langle f, \psi_b^a\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_b^a(x)dx = (f*\psi_b)(a)$$

而 $(f*\psi_b)(a)$ 中的 "$*$" 爲卷積 (convolution)。

當得到 $\langle f, \psi_b^a\rangle$ 的值後, 我們有一個簡便的方法來還原函數 $f(x)$, 亦即我們有底下的表示式, 對任一 $f(x) \in L^2(R)$, 我們有

$$f(x) = \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\langle f, \psi_b^a\rangle\psi_b^a(x)da\frac{db}{b} \tag{4}$$

$$= \int_0^\infty (f * \psi_b) * \psi_b \frac{db}{b}$$

(4) 式有時亦稱為 Calderon reproducing formula。其中$\psi(x)$ 除了合乎上述的條件外, $\psi(x)$ 的傅立葉變換 $\hat{\psi}(\xi)$ 要滿足

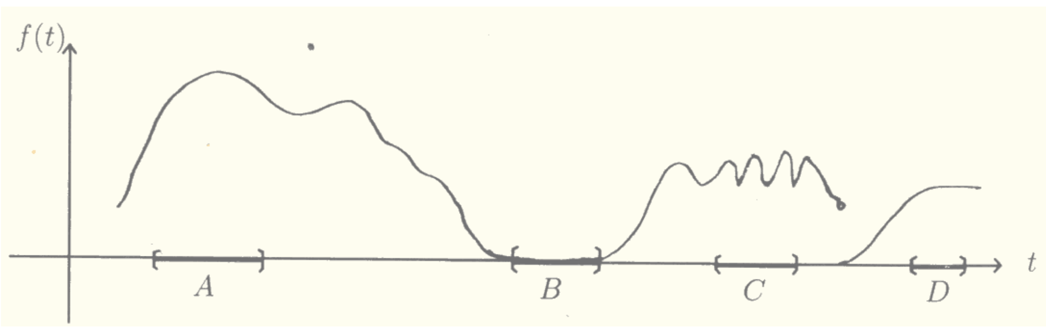
$$\int_0^\infty (\hat{\psi}(b\xi))^2 \frac{db}{b} = 1。$$

關於這式子的意義及推導細節, 有興趣的讀者請參考[1]的第二章或 [2]的第一章, 這裡不再重述。有趣的是關於 (4) 式, 如果 $\psi(x)$ 滿足 Daubechies 書上 [1]第56頁3.1.4所述之不等式 (即存在 A, B 兩正數, 使得對所有 $f \in L^2(R)$, $A\|f\|^2 \leq \sum_{m,n} |\langle f, \psi_m^n > |^2 \leq B\|f\|^2$, 其中 $\psi_m^n(x) = 2^m\psi(2^m x - n)$, m, n 為整數)。則我們有一個類似於傅立葉級數的離散型版本來表示函數 $f(x)$。即

$$f(x) = \sum_{k,j} \langle f, \psi_j^k \rangle \widetilde{\psi}_j^k(x) \qquad (5)$$

其中 $\widetilde{\psi}$ 為 ψ 的一種對偶函數 (dual), 參閱 Daubechies 書 [1] 3.2 節。

這個式子可解釋為對於 (4) 式的一種逼近。廣義上說來, 基波分析就像傅立葉分析同樣是用來探討係數 $\langle f, \psi_j^k \rangle$ 及函數 $f(x)$ 之間的關係。事實上, 約在六十年前 (1930's), 當基波這個名詞尚未出現時, 研究調和分析的數學家, 就已經發展出一套理論來描述大部分的古典函數空間與係數間的關係。這套理論現今稱為 Littlewood-Paley Theory。這裡所提到的古典函數空間包括 Hölder spaces, L^p spaces, $1 < p < \infty$, Sobolev Spaces 等。這個情形正好是給予傅立葉級數一個對比, 因為從 (3) 式及 Plancherel's Theorem 知道, 唯一能被係數的大小所描述的函數空間, 就是 $L^2(\mathcal{R})$ 及其相關函數空間而已。另外, 給定一個函數或訊號 $f(x)$, 對於 (3) 式及 (5) 式間的一個重要差別是如何從係數部分來認知這個函數或訊號在某個小區域的變化情形。關於這一點, 我們舉個例子來說明: 假如我們要分析的訊號是如下圖。



訊號 $f(t)$ 在不同的時間域 A, B, C, D 各有不同的行為。為了說明起見, 讓我們集中在 B 區域。回想我們求傅立葉係數時, 是把整個訊號 $f(t)$ 對各種不同的頻率做積分, 這樣所得的結果必然有很多係數不為零, 但還原 (重建) 訊號 $f(t)$ 在 B 區域的值時,

必須使得 $f(t)=0$, 如何能做到呢? 就是要利用這些不為零的項之間的抵消 (cancellation)。這個性質源自於 $\sin, \cos$ 函數在時間域上散佈於整個實數軸, 因此在訊號處理的應用上有時造成不便。然而 (5) 式的基波展開式卻能避開這個不便, 即基波係數 $\langle f, \psi_j^k\rangle$ 能代表訊號 $f(t)$ 在某個小區域的特徵。這個重要的基波性質在 [4]裡有詳述, 請參閱。在本文最後的應用部分, 我們將用此特性來做影像壓縮。

三. 基波變換:

以下我們略述基波的構造方法, 詳細請參閱 [1]的第五、六兩章。這裡的重點放在如何導出離散型基波變換 (discrete wavelets transform) 的演算法。目前構造基波的方法中, 以多重解像分析 (multiresolution analysis) 最為普遍 (註一), 在這裡我們也採用此法做為開始。

假如 $V_j,\ j\in Z$ 是 $L_2(R)$ 的閉子空間序列, 而且滿足以下的五個條件, 我們就稱 $V_j,\ j\in Z$ 是 $L^2(R)$ 的一個多重解像分析。

(i) $V_j\subset V_{j+1}$

(ii) $f(x)\in V_j \Longleftrightarrow f(2x)\in V_{j+1}$

(iii) $f(x)\in V_0 \Longleftrightarrow f(x+1)\in V_0$

(iv) $\overline{\bigcup\limits_{j\in Z} V_j}=L^2(R)$, and $\bigcap\limits_{j\in Z} V_j=\{0\}$

(v) 存在一個函數 $\phi(x)$ 在 V_0 中使得 $\{\phi(x-k)\}$, $k\in Z$ 是一個 V_0 的正交基底。

從上述的幾個條件中, 我們可得以下的一些結論。

(a) 因為 $\phi(x)\in V_0\subset V_1$, 我們可找到一個序列 (h_k) 使得

$$\phi(x)=\sum_k h_k\sqrt{2}\phi(2x-k)$$

特別在 Daubechies 的書裡 [1]提到, 如果加上一些條件限制, 我們可找到有限的序列 $(h_k)_{k=0}^{2N-1}$, 使得 ϕ 函數的緊緻支柱(compact support) 是 $[0,2N-1]$, 而且 $\phi(x)$ 函數的平滑性隨著 N 增加而遞增, 其中 $N\geq 2$。(註二)

(b) 函數 $\phi(x)$ 經過平移及放大(translation and dilation) 我們有

$$\phi_j,\ell(x)=\sum_k h_{k-2\ell}\phi_{j+1,k}(x) \qquad (6)$$

而 $\phi_{j,\ell}(x)$ 是 V_j 上的一個正交基底, 其中 $\phi_{j,\ell}(x)$ 定義為 $2^{\frac{j}{2}}\phi(2^jx-\ell)$。(註三)

$$\begin{aligned}
\text{因為 } \phi_{j,\ell}(x) &= 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^jx-\ell)\\
&= 2^{\frac{j}{2}}\sum_k\sqrt{2}h_k\phi(2^{j+1}x-2\ell-k)\\
&= 2^{\frac{j+1}{2}}(\sum_k h_k\phi(2^{j+1}x-2\ell-k))\\
&= 2^{\frac{j+1}{2}}(\sum_k h_{k-2\ell}\phi(2^{j+1}x-k))\\
&= \sum_k h_{k-2\ell}\phi_{j+1,k}
\end{aligned}$$

(c) 假如我們定義 W_0 是 V_0 在 V_1 上的正交互補(orthogonal complement), 我們得到 $V_1=V_0\oplus W_0$, 而在一般情況下是 $V_{j+1}=V_j\oplus W_j$。對於多重解像分析裡一個基本的重要結果便是存在一個函數 $\psi(x)$, 使得 $\psi(x-k)$, $k\in Z$, 是 W_0 的一個正交規

格化基底(orthonormal basis), 而且 $\psi(x)$ 可表成

$$\psi(x)=\sum_k g_k\phi(2x-k),\ g_k=(-1)^k h_{1-k}$$

同樣的, $\psi(x)$ 經過平移與放大, 我們有

$$\psi_{j,\ell}(x)=\sum_k g_{k-2\ell}\phi_{j+1,k} \qquad (7)$$

其中 $\psi_{j,\ell}(x)$ 與 $\phi_{j,\ell}(x)$ 有相同的定義, 亦即 $\psi_{j,\ell}(x)=2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x-\ell)$; 而 $\{\psi_{j,\ell};\ j,\ell\in\mathcal{Z}\}$ 是 $L^2(\mathcal{R})$ 上的正交規格化基底, 也就是 $L^2(\mathcal{R})=\oplus W_j$, 如果結合一些較小的頻率在一起, 我們也可把上式表成

$$L^2(R) \;=\; V_{j_0}\bigoplus_{j\geq j_0}^{\infty} W_j,$$

其中 j_0 是某固定的整數。

接下來, 我們定義 P_j, Q_j 分別為 $L^2(R)\to V_j$, $L^2(R)\to W_j$ 的正交投射算子(orthogonal projector)。從以下的式子裡, 我們即將導出, 如果給定一個函數 $f(x)$, 如何經過離散型基波變換, 類似於快速傅立葉變換 (fast fourier transform), 算出它的基波係數 (wavelets coefficients), 以做進一步應用。

對於任一給定函數 $f(x)\in L^2(R)$, 定義 $f_j(x)$ 為函數 $f(x)$ 在 V_j 層上的正交投射, 我們有

$$f_j(x)=P_jf(x)=\sum_\ell c_{j,\ell}\phi_{j,\ell}(x)$$

其中係數是 $f(x)$ 與 $\phi_{j,\ell}(x)$ 經由內積而來, 也就是 $c_{j,\ell}=\langle f,\phi_{j,\ell}\rangle$, 而正交投射算子的特性 $P_jP_{j+1}=P_j$, 告訴我們可更進一步計算係數 $c_{j,\ell}$,

$$\begin{aligned} c_{j,\ell} &= \langle f_{j+1},\phi_{j,\ell}\rangle \\ &= \sum_k c_{j+1,k}\langle\phi_{j+1,k},\phi_{j,\ell}\rangle \qquad (8)\\ &= \sum_k c_{j+1,k}h_{k-2\ell} \end{aligned}$$

同樣地, 對於任一給定函數 $f\in L^2(R)$, 定義 $w_j(x)$ 為函數 $f(x)$ 在 W_j 層上的正交投射, 我們有

$$w_j(x)=Q_jf(x)=\sum_\ell d_{j,\ell}\psi_{j,\ell}(x)$$

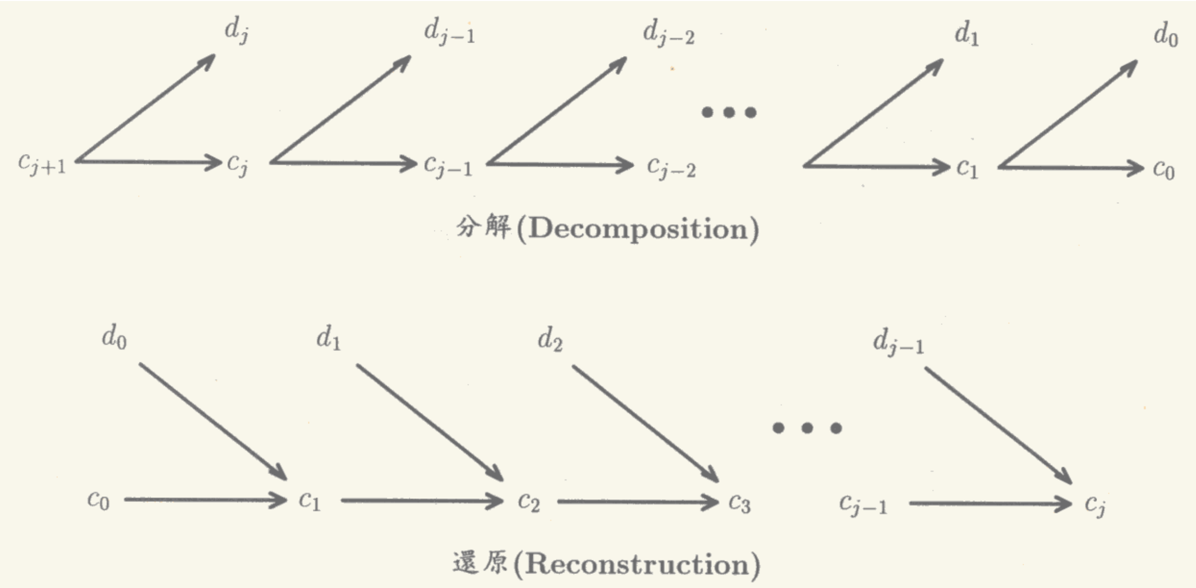
其中係數 $d_{j,\ell}=\langle f,\psi_{j,\ell}\rangle$, 而且利用 (7) 式, 我們可計算出

$$d_{j,\ell}=\sum_k c_{j+1,k}g_{k-2\ell} \qquad (9)$$

關於 (8) 及 (9) 式, 告訴我們以下這樣的事實: 如果我們以某一個固定層 V_{j+1} 對 $f(x)$ 的逼近 f_{j+1} 為開始, 表示式 (8) 的計算將得到 f_j, 是較粗層 V_j 對 $f(x)$ 的逼近, 而 (9) 式的計算代表著函數 $f(x)$ 在這兩個鄰近層 V_{j+1}, V_j 逼近所"遺失"的資訊。現在, 假如我們從 c_{j+1} 開始, 由 (8) 及 (9) 的式子裡可得 c_j, d_j, 然後再從 c_j 及式子 (8), (9) 去得到 $c_{j-1},d_{j-1}\ldots$ 一直做下去。在實際應用上, 我們只做有限次, 便停止。有時稱此部分的步驟為"分解" (Decomposition)。"還原"(Reconstruction) 的步驟則告訴我們如何從 $c_{j-1,\ell}$ 和 $d_{j-1,\ell}$ 來計算 $c_{j,k}$。因為

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= \langle f_j,\phi_{j,k}\rangle \\ &= \langle f_{j-1}+w_{j-1},\phi_{j,k}\rangle \\ &= \sum_\ell c_{j-1,\ell}\langle\phi_{j-1,\ell},\phi_{j,k}\rangle \\ &\qquad +\sum_\ell d_{j-1,\ell}\langle\psi_{j-1,\ell},\phi_j\rangle \\ &= \sum_\ell c_{j-1,\ell}h_{k-2\ell}+\sum_\ell d_{j-1,\ell}g_{k-2\ell} \end{aligned}$$

我們以下圖來表示它們的演算法。



到此我們可發現在應用離散型的基波變換時, 眞正在意的是這些係數 h_k、g_k, 而在電機工程上, h_k、g_k 亦稱爲濾波係數 (filter coefficients)。至於如何找到這些值及係數 h_k、g_k 間的性質, 請參考 Daubechies 的書 [1]第六章。

四. 應用:

影像壓縮是基波理論的其中一個應用。一般說來, 一個工程上處理的影像, 或稱爲數位化的影像 (digitized image), 需要佔據相當大的儲存記憶體。例如一個 512 × 512 pixel, 24 bits 的彩色影像, 就需要 0.75 Mega bytes 來儲存。近年來, 由於個人電腦多媒體 (multimedia) 的流行趨勢, 要將大量的資訊儲存於記憶容量有限的 PC 上, 影像壓縮的技術也就更被重視了。

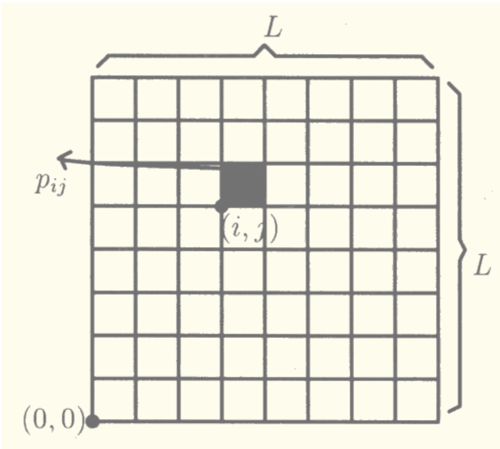
影像壓縮的種類可分爲不失眞 (lossless) 及失眞 (lossy) 兩種。前者強調在還原過程中沒有失去任何資料或訊息; 而後者是以願意接受在處理過程中有些微誤差但仍維持一定程度的影像品質爲原則。在失眞壓縮裡最常用來處理影像的程序是經過變換編碼 (transform coding), 目前在電機工程上利用離散餘弦變換 (discrete cosine transform) 的 JPEG, 就是屬於這類。而這裡我們要介紹另一種失眞壓縮處理—離散型基波變換。

爲了方便討論起見, 讓我以一個灰度 (grayscale) 爲256(8 bits) 的 $L \times L$ 黑白影像爲例。我們可準確地描述這個影像爲一個定義在方格上的常數函數, 亦即

$$f(x,y) = p_{ij} \quad \text{其中} \begin{cases} i \le x < i+1 \\ j \le y < j+1 \\ 0 \le i,j < L \end{cases}$$

而 p_{ij} 的灰度值爲整數值, 且 $0 \le p_{ij} \le 255$

以圖表示則爲:



工程上, 影像壓縮的技術相當複雜。一個圖像首先要經過變換, 得到一些係數 (如 wavelets coefficients) 後, 還需經過量化 (quantization)、編碼 (coding), 以便傳遞輸送。當訊號傳送到另一端後, 需解碼 (decoding), 解壓縮 (decompression), 才能讓影像重新出現在該端的螢幕上。由於自量化到解碼的過程屬電機工程的研究範圍。在此我們略過這部分, 僅就基波變換以取得係數的部分, 來加以討論:

對於一個影像 (相當於 $f(x,y)$), 經過基波變換 (就是上節提到的“分解”步驟), 我們設定一個臨界值 (threshhold), 讓基波係數大於這個臨界值的保留下來, 而其他小於這個臨界值的基波係數設爲0, 然後再把剩下的基波係數經過反基波變換 (相當上節提到的“重建”步驟), 還原回到逼近原來的影像。我們可以下圖來說明這整個步驟:

圖一. 原來的影像 “Lanna”

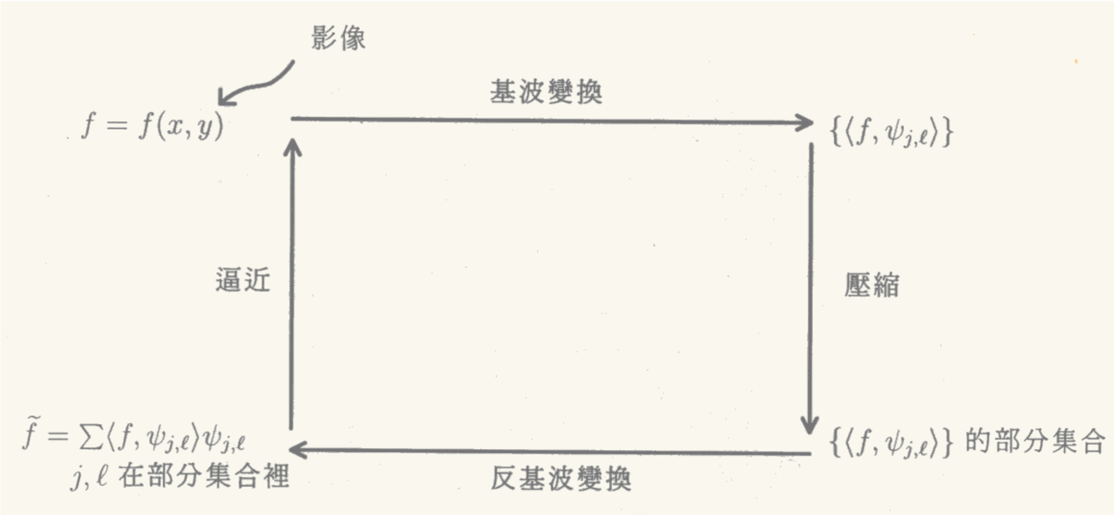
圖二. 經壓縮還原後的影像, 壓縮比 10:1.

圖三. 經壓縮還原後的影像, 壓縮比 20:1.

圖四. 經壓縮還原後的影像, 壓縮比 30:1.

圖五. 經壓縮還原後的影像, 壓縮比 50:1.

圖六. 經壓縮還原後的影像, 壓縮比 100:1.



在此我們附有一些經過壓縮後的影像及原來的影像圖片。這裡我用在基波變換中的基波是 Daubichies 書 [1]中的 W_6 基波 (見該書195頁表中 $N = 3$ 的情形)。讀者比較觀察下, 可發現如果壓縮比是 10:1 或 20:1, 則影像的畫質, 整體看來, 與原來的影像幾乎沒有什麼差別; 但如果基波係數被刪除的愈多 (即壓縮比愈大), 則影像的品質就更模糊, 這裡所謂的壓縮比 (compression ratio) 定義爲:

$$壓縮比 = \frac{原來的總基波係數}{刪除後剩下的基波係數}。$$

註一: S. Mallat 及 Y. Meger 在 1986 年首先提出這個方法。

註二: Daubechies 構造出的基波所具有的緊緻支柱特性, 是六十年來數學家所尋求的, 這是她成名的原因。

註三: 這裡基波符號定義的方式與上節略有不同, 它們分別代表兩個不同時期基波的定義方式。

參考書籍

1. I. Daubechis, “Ten Lectures on Wavelets” (1993), SIAM 出版。
2. M. Frazier, B. Jawerth and G. Weiss, “Littlewood - Paley Theory and the Study of Function Spaces” (1991), AMS 出版。
3. W. Press, B. Flannery, S. Teukolskg, W. Vetterling, “Numerical Recipes in C” (1992), Cambridge University Press 出版。
4. 李孟書,“從哈耳級數到基波理論” 「數學傳播」, 第16卷第3期, 68-71頁, 81年9月。

—本文作者任教於海洋大學共同科—