數學 —— 做為一門客觀的科學

N. D. Goodman 著

林　明　輝 譯

本文譯自「American Mathematical Monthly, 1979, Aug. - Sept., "Mathematics as an Objective Science"」一文。本文已獲得作者同意翻譯。

1. 前言

Morris Kline 曾經寫下 :「數學是一個整體的知識, 但是並不包含眞理。」[13, p9]這種否認數學有客觀科學內容的觀點, 廣被數學家們所接受, 而且在課堂上和一些通俗書上 (像是 Kline 的) 廣爲流傳。我相信這種觀點是錯的; 我也相信它們的流傳已經傷害到我們自己還有其他人對這門學科的尊敬。底下我將說明四種觀點, 這四種觀點雖然不能窮盡目前在數學哲學上所流行的意見, 然而就引起數學客觀性的主要爭論而言, 我認爲他們是夠具代表性了。我將論證, 這四種觀點之所以產生, 皆起源於他們過度簡化了我們在做數學時所發生的事情。

2. 表面主義 (surfacism)

爲了引出這四種觀點的一些共同特徵, 我想先討論一種想像出來的, 有關於物質的哲學觀點, 我們賦給物質對象的許多性質—諸如確定的形狀、硬度、顏色—都可以被想成是物質對象的表面性質。假設有一個哲學家, 他被這個簡單的觀察所誤導致使他相信物質對象的所有性質就是它們的表面之性質。再假設該哲學家堅持, 物質對象並不具有堅實性 (就像我們通常假設的那樣), 無限細的表面就是它的全部了。以他的觀點而言, 談及物質對象的內部將是無意義的。這位哲學家當然不會稱呼他的觀點爲 "浮面主義 (superficialism)", 就讓我們稱這種觀點爲 "表面主義" 吧。如果要求我們的表面主義者解釋, 爲什麼當我們切開一個物體時並不會發現裡面是空的, 他會說這是因爲刀鋒能牽引它所作用的表面, 拓展該處的表面而製造出兩個新的表面。但有一些性質, 像是重量, 很難將它也當作是表面的性質做一致的處理; 如果再要求他對此提供一個說明, 他會斷言這些性質是虛幻的。他將宣稱, 實際的情形是我們的

身體表面的特定性質或者我們和其他表面交互作用的特定性質正不斷地被投射進外在世界。例如, 如果我們更小心地考慮重量, 將會發現一個物體的重量正是我在舉起它時所感到的困難度。嚴格來講, 那個困難度必須發生於物體和我的身體進行交互作用的那些點上。因此, 重量必須存在於物體和我的身體接觸的共同表面上。把重量當做是物質對象本身所擁有的一個性質, 那將是一個得不償失的過度簡化。

我們不必假設表面主義哲學家總得去捍衛他的觀點。例如, 他可以主張傳統觀點首先就違背了經濟原則 (principle of parsimony), 因爲傳統觀點創造出一個完全不必要的實體 —物體的內部— 然後再賦給該實體荒謬的性質。傳統觀點假設物體的內部是物質性的但又是不可見的。爲什麼內部這麼不同於外部? 何以會有這種不對稱? 如果眞的有空間在物質對象的內部, 那麼就像物質對象外部的空間一樣, 假設內部空間也充滿了空氣不是更合理嗎? 我們還可以假設我們的表面主義者會抱怨他的論敵所持的觀點既迷信又不科學。他會說, 認爲物質對象有堅實內部的這種信念, 是"相信有不死靈魂"之下的殘渣, 因爲不死靈魂正是所謂人類的"堅實"內部。他會繼續辯說, 事實上對物體內部的通常解釋反而是不可理解的。有誰能不藉由看著一個物質對象的表面來看見該物質對象? 而除了它的表面之外, 又有誰能在看著一個物質對象的時候看見其他任何東西呢?

那四種有關於數學本質的觀點, 我覺得多少都帶有一個表面主義的形式, 因此, 考慮怎麼樣才可以在前文敍述的純形式上駁斥表面主義, 那將是有用的。

對物質對象的本質採取一種觀點, 目的是要以一個方法將我們對那些物體的經驗納入一個次序之中; 而在我們處理那些經驗時, 該方法必須是有用的。這樣的觀點必需是一個能提供種種社會功能的社會性人工製品。物質對象本身在特徵上是共有的, 因此我和我的物質環境之間的互動, 其中大部份, 直接或間接地也是我和我的社會環境之間的互動。如此一來, 這樣的觀點必須要有的功能中, 最重要的就是使底下兩件事情容易處理: 一是我們和物質對象之間的那些具共有性意義的互動, 另一則是我們彼此之間的互動, 該互動以物質對象爲媒介或和物質對象有關。因此一個關於物質對象本質的觀點, 如果我們希望它不要老是具有爭議性, 那麼它應滿足下列客觀性原則: 凡是實際上實在的都應該被當成是客觀上實在的。

讓我再說淸楚一點。當我說一個像重量那樣的屬性是實際上實在的, 我的意思是說那個屬性扮演一個角色; 而且在我們和具該屬性的物體之間的互動中, 我們一致同意該屬性的確扮演一個角色且應該扮演一個角色。如此一來, 當該屬性在某個特定物體出現時, 我們至少能在程度上或種類上達成模模糊糊的一致。再重複我上文已說過的, 這是因爲我們和物體之間的互動一般而言也是我們彼此之間的互動。另一方面, 當我說一個屬性是客觀上實在的, 我的意思是該屬性存在於被觀察的物體, 而不是存在於觀察者的主觀經驗, 也不是存在於觀察者和被觀察物體之間的主

觀關係。在我們對物體的通常處理中, 如果有某個屬性扮演一個大家共同接受的角色, 那麼, 一個關於物質對象本質的理論若要被認爲是重要的, 就必須接受那個屬性做爲理論本身的資料。該理論必須再以一個融貫的說明將那些資料統一起來, 能以其中一些毫無疑問地解釋另外一些, 不允許用搪塞的方式說明其中任何一個。特別地, 如果有個理論把日常活動中很重要的屬性只當做是主觀的幻覺, 那麼該理論不但不是在支持我們的日常活動, 反而是在侵蝕它們。當然, 我們也能發現這樣的例子: 本來我們認爲在實際活動中的確扮演一個角色的實體, 後來才發現根本是不存在的。然而, 假設我們正在爭論某件事物的客觀實在性, 再假設該事物在實際上很明顯地是實在的, 那麼舉證責任應該是落在持反對意見者的那一邊。畢竟, 一個東西爲何在實際上有那麼明顯的重要性, 最簡單的解釋就是在我們的實際活動中, 那個東西事實上就是存在的, 而且也的確扮演一個角色。如果反對者不能提出一個強而有力的論證, 那麼我們就必須假設, 凡實際上實在的就是客觀上實在的。

爲了避免可能的誤解, 讓我們考慮一個滿足客觀性原則的情形。我們有時候會聽到一個持反對立場的論證, 該論證只從字面上理解物理學繼而認爲, 在物理學家的世界裡並沒有像黃色這樣的東西。如果情況眞是如此, 那麼這會是一個很有力的論證。幸運的是情況並非如此。

首先, 我們必須在黃色本身和我們的黃色經驗之間做出區別。我們如何共同處理一個物質對象? 與其有關的並不是該物質對象在那些條件下如何呈現給哪些人。眞正有關的是物體的實際顏色, 大略地講, 就是該顏色如何在標準的條件下呈現給一個正常人。因此, 爲我們的黃色經驗提供一個說明, 這應該是心理學家的事而不是物理學的課題。

無論如何, 問題仍未解決, 物理學在描述世界時並不會把顏色當做一個要素。然而, 若以光的波長做爲解釋, 這就能爲談及黃色時提供一個客觀內容, 顏色並不會被瞧不起也不會被矇混過去。我們也不認爲顏色存在於我的眼睛或我們的心靈。波長理論使我們處理顏色的能力變強了, 它不但解釋了顏色可被觀察的性質, 而且也提供新的可能應用。物理學家甚至已經發現我們看不到的顏色 (例如紅外線)。

因此, 就這個情形而言, 客觀性原則完全被滿足了。將我們的顏色經驗當做只是私人擁有的, 這種觀點因其主觀性而被摒棄。另一方面, 我們也提供了客觀內容給實際上存在著的顏色本色。

那麼, 現在可以使用客觀性原則去駁斥表面主義了。一個均勻物質對象的重量, 和其成比例的並非該物體的表面積而是它的體積。因而下此結論是合理的: 一個物體的重量會透入該物體而分佈。而表面主義者卻堅持重量並非客觀上實在的, 它只是我們的幻覺。因爲在我們處理物質對象時重量實在太重要了, 而且我們也有一個人人都認爲是有效的方法去量度重量; 所以, 那些視重量爲幻覺的表面主義者只不過是用他們的特有觀點把他們的理論搞得很無聊罷了。

爲了將這些想法應用到數學哲學上, 首先我們必須注意到數學也是一種公共活動。數學是在某個社會情境下產生, 因而也會有社會性的結果。提出問題、陳述定義、證明定理, 這些都不是私人的活動。他們屬於一個較大的社會性過程的一部份, 我們稱那個社會性過程爲科學。一個盡責的數學家會知道其他數學家的工作, 他也會發表自己的工作成果而且期待其他數學家能注意到這個成果的重要性。因此, 一種數學哲學非常類似於一種關於物質對象本質的觀點。它的主要功能應該是, 使得我們做數學時正在進行的那個社會性過程變的容易處理。如此一來, 一種認眞的數學哲學就必須滿足客觀性原則, 也就是對數學活動的任一個現象而言, 如果該現象是實際上實在的, 那麼它就不可以否認該現象的客觀實在性。

3. 形式主義

我們若觀察數學家的工作, 沒有人能不注意到數學家們根據規則巧妙地操作符號。因此, 我們在數學哲學上的第一個嘗試也許是主張, 數學就是由規則支配的, 或形式上的, 符號之巧妙運作; 其他就沒有什麼了。(“其他就沒有什麼”這句話正是表面主義者的標誌) 通常稱這個觀點爲形式主義。我們可以在底下幾本書內發現, 多多少少是像形式主義那樣的觀點, Haskell Curry [5], Abraham Robinson [17], 和 Panl Cohen [4]。(David Hilbert 的觀點雖然也常被稱爲“形式主義”, 但是和我們在這裡所討論的有很大的不同, 因爲 Hilbert 至少認爲數學中的有限的和組合的部分是有意義的也是眞的。例如, 可以去看 Hilbert [12] 或 Kreisel [15]) 對人工智慧有興趣的電腦科學家們也提供了一個不同類的例子。他們認爲, 人類的智慧現象和計算器所做的事情在原則上並沒有什麼不同。因此, 人類大腦類似於電腦、理論類似於程式, 思想類似於圖林機的運作。形式主義者可以說, 數學還能是其他的什麼呢? 你能夠想像數學家以任何方式工作而不用去操作符號嗎?

爲了再具體一點, 假想我們去問一個形式主義者, 他會把什麼當成是算術基本定理的內容。如果他眞的是一個嚴格的形式主義者, 他就必須回答, 該定理一點點內容也沒有。這個定理終究只是一串符號罷了。我們之所以覺得它有內容就是因爲在我們從事的特定活動中, 該定理扮演一個確定的角色。這很像我們在下棋時常常碰到的情形。那麼, 我們的符號活動又是什麼? 一個較精確的描述是: 以一個特定的形式系統去整理編排數學的某個部分。如果我們以此說明符號活動, 那麼我們也就爲算術基本定理的角色提供一個精確的說明。我們可以在形式系統中給出一個, 甚至多個該定理的證明, 我們也可以給出一些使用該定理去證明其他定理的例子。對形式主義者而言, 該定理除了在我們的符號活動中所扮演的角色之外, 不再有任何意義。一個嚴格的形式主義會認爲, 該定理並沒有對自然數下任何斷言, 因爲對他而言根本就沒有像自然數這種東西。

現在, 我同意數學幾乎總是伴隨著符號的形式運作; 我也同意數學家通常能被看做

是正在一個形式系統內工作。對我而言, 這似乎是一個重要的洞識。有一個數理邏輯的分支, 它討論的主題正是這個觀點。我說的就是遞迴函數理論。數學在本質上有什麼限制? 就我們對它的理解而言, 遞迴理論對此所作的貢獻多過其他任何一支數理邏輯。讓我以更強的說法說明這個觀點: 我不相信數學家們將來有辦法去計算一個非遞迴函數、解開一個遞迴不可解的問題; 我也不相信他們能在一個不可遞迴公理化的理論內工作。但這並不蘊含著我願意承認底下這種觀點: 人類心靈是一種“算法式的設計”(就遞迴函數理論的意義而言)。這頂多只是一個沒什麼大不了的讓步, 就像我願意和表面主義者一樣, 承認我們不能不經由表面去看見一個物質對象。

很容易了解, 爲何一個從來沒有實際數學經驗的哲學家會採取形式主義的觀點。因爲, 除了看到數學家們在玩符號之外, 他還能看到什麼呢? 但是偶爾也會有一些具創造力的數學家是形式主義者, 這我就很難了解了。拿我自己做數學的經驗而言, 當我和一個毫無頭緒的問題纏鬥時, 我很難去處理符號, 這時候我面對的是想法和建構 (construction)。數學家們遭遇到的最困難的工作之一就是, 他已經有想法了但暫時還沒辦法將那個想法形式化地表達出來。這樣子的想法通常先以一種可見的或動態的 (kinesthetic) 心像顯現出來。當數學家把該想法弄得較淸楚了, 該想法也變得比較形式化了, 他還是可能發現: 這個已有豐富內部結構的想法還是不能被“符號式編碼” (symbolically encoded)。如果避談一種和認識論無直接關聯的純心理學, 那麼實在很難討論上述這種情形。當數學家們談論概念、建構、證明時, 他們的談論方式通常是想把“心裡的東西”弄淸楚, 而不是想將“使用的符號”弄淸楚。因此, 數學家們也許討論兩篇不同的論文是否具體化了同一個想法、兩個不同的符號串是否表達了相同的建構、兩個不同的說法是否闡釋了相同的證明。每一個數學家都知道, 相同的建構可用在數學裡的許多不同的部門; 因此, 如果你發現一個舊定理的新證明, 你最好檢查一下, 它可能僅僅是一個換上新形式的舊證明而已。

在數學家寫下的符號裡, 隱藏著一些能賦予這些符號生命和內容的東西 (entities); 自從布勞爾 (Brouwer) 以來, 習慣上用“建構”這個詞去泛指那些東西。我認爲, “建構”毫無疑問地是實際上實在的 (就我上文提的意義而言)。數學家們時常討論它們, 一致同意它們的一些普遍性質, 也同意在數學的創造活動中, 它們占有重要的地位。因此, 一種適當的數學哲學不能將它們看成僅僅是主觀的幻覺。而形式主義哲學家要嘛就根本不提它們, 要嘛就是在“heuristics”的名目下摒棄它們, 完全不做任何說明—說明那些性質 (數學家同意的那些“建構”的性質) 是什麼。的確, 形式主義者是不能做出一個有關於“建構”的理論, 因爲他們根本就否定它們的存在。例如, 即使有這樣一個程式: 它能遞迴地確認出是否兩個符號串具體化了相同的想法, 形式主義者還是不能承認那就是該程式所做的事。“一台計算機器已經有了一個證明的想法, 但卻苦於無法將它形式化地表達出來” 這樣子的說法有什麼意思呢?

爲了能更小心地敍述這個論證, 我想引進一個詞 — “直覺的”。這裡我將它當做是“形式的”這個詞的相反詞來使用。因此, 如果一個論證的推論是如此的自然以致於很容易一步一步跟隨它的推論步驟, 那麼我們可以稱呼該論證是“直覺的”。在直覺主義裡, “直覺的”這個詞的意思, 粗略地講, 也正是這樣。因此, 一個“直覺的證明” 就是一個未形式化的、和符號無關的證明, 它甚至可能沒有辦法在數學家之間被交流。無論如何, 肯定有這樣子的建構: 它是“直覺的”、有內部結構、可使我們看見新事實, 而且也可被形式化使得能給出一個正確的證明。

現在, 我的論證可摘要如下: “直覺的建構”是實際上實在的, 它們也正是數學的生命力, 而否認它們的存在卻是形式主義的基本觀點。因此, 由客觀性原則, 形式主義不能是一種適當的數學哲學。

4. 直覺主義 (Intuitionism)

如果形式主義被摒棄是因爲它忽略了數學裡的直覺內容, 那麼選擇底下敍述的第二種數學哲學是很自然的。就讓我們堅持數學是由直覺的建構組成的, 符號操作只不過是它們的外在表達方式, 就這樣了, 其他沒什麼了。我認爲, 這似乎就是直覺主義的基本觀點。此觀點是由 L.E.J Brouwer 和 Arend Heyting 提出。對於這個觀點, Heyting[11]是一本很好的介紹書。Dummet[6]則是另一本較現代的介紹書。而 Brouwer 本人最淸楚的一般性說明可能是他的 [3]。至於 Errett Bishop[2], 又是另一種有關的、但肯定是不一樣的觀點。所以我應該做下列說明: 我對直覺主義所做的評論並不能直接用到 Bishop 的數學哲學, 因爲他只有很少的, 像 Brouwer 那樣的直觀性傾向。

底下是直覺主義的特徵: 它否認有所謂的在數學家之外的“數學實在” (mathematical reality); 它也否認有那種超越數學家們已經證明的 (或者能夠實際證明的) 數學眞理。對我而言, 數學對象之所以存在只因爲它們是我建構的結果; 而數學事實之所以是眞的, 也只能就它們做爲論證 (我能做的論證) 的結論這個層面來談。因此, 旣然一個自然數序列是無限的, 它就不能是“可看盡的”(surveyable); 它只能是一種潛藏的實在 (potentially real)。而那種到現在還沒被證明也沒被反證的陳述, 像 Fermat 猜測, 並沒有一個確定的眞假值。至於邏輯排中律 (每個陳述非眞即假), 則不能被應用到那些談到無窮集的陳述, 而且對這種陳述使用歸謬證明也是無效的。

例如, 還是再考慮算術基本定理這個例子。直覺主義者和形式主義者不同, 他不會只把該定理當做是符號串。這個定理是有意義的。但是, 他也不會視該定理爲一種談論自然數 (存在於我們之外) 的眞理。他的看法是: 該定理表達的是一種我們所具有的特殊能力, 也就是; 當一個任意的自然數被分解成質數的連乘積時, 如果有兩個這種分解式, 我們有能力看出這兩個分解式中有相同的質數, 而且帶著相同的冪次方。和形式主義者一樣, 直

覺主義者認爲這個定理的意義有賴於我們對數學的實際操作, 而不是在任何的“外在的實在”(exernal reality) 上。

現在, 我想較仔細地檢查爲何 Brouwer 拒絕使用排中律。Brouwer 並沒有提出任何可接受的眞理概念可去辯護、或者去解釋對邏輯連詞的眞值功用的解釋。對他而言, 判斷一個陳述是否爲一個直覺證明的結論, 這才是有意思的。但是, 如果去證明“A 是眞的或 B 是眞的”這種陳述, 證明過程應該指出正在證哪一部分, 是在證 “A是眞的”? 或“B 是眞的”? 否則, 我們將能夠斷定一個數 n 的存在使得如果 $n = 0$, 那麼 A, 如果 $n = 1$, 那麼 B, 但我們卻不知道 n 到底是多少。而我們當然能知道一個已經建構出來的數的值。因此, 我們正在宣稱一個數的存在, 然而我們卻不用去建構它。所以, 一個關於 Fermat 猜測眞假的證明必須包含一個證明 (證其爲眞) 或是一個反證 (證其爲假)。既然我兩者都做不到, 那麼根據 Brouwer 的觀點, 我並沒有資格說“Fermat 猜測是眞的或是假的”這樣子的話。因此, 排中律之所以被拒絕並非因爲發現了第三個可能的值, 而是因爲我們對它做了額外的要求。一個斷言只有在下列情況下才能得到辯護: 該斷言能獲得一個直覺建構的辯護。

有一個非常有意思的類比, 數學的直覺主義就像存在主義。存在主義強調個人在群體之間的 “孤離”(isolation), 而正因爲這種孤離使得我們在認識上, 必須迴歸到我們自己的個體本源 (we are epistemically reduced to our own individual resources)。這兩個觀點都有一個特徵: 它們都堅持只有我們的內在經驗才是可接受的知識本源, 而且他們也都否認我們的內在經驗居然可以導出一個所謂的“外在的實在”(external reality)。因此, 這兩個觀點很容易墜入非理性主義和獨我論。當 Brouwer 強調能創造的主體在數學上的絕對自由時, 他正採取一種和存在主義緊密關連的立場, 因爲存在主義也正是強調這個相同的能創造的主體在審美上、在倫理學上或在政治上的絕對自由。

可以看出來, 直覺主義也是一種非常典型的表面主義。他們獨特的辯論姿態就是問: 除了自己的建構之外, 數學家還能有什麼呢? 除了你自己的思想, 你難道還能想什麼? 除了自己的心像, 你又能看見什麼?

就像形式主義的情況, 我們也不要忽略了直覺主義者在了解“數學的實際操作” 這方面所做的貢獻。關於數學創造的心理歷程, 直覺主義者的作品提供了非常豐富的想法。也有一門數理邏輯的分支專門去粹取、發展這些想法的深刻內容。這些實現 (realization) 想法、功能闡釋 (functional interpretations)、Kripke 結構等, 對我來說好像是在應許一種數學理論的存在, 該數學理論直接研究操作數學的經驗, 雖然這種理論尙未出現。

直覺主義對我倒是很有吸引力。但經過一段很長的時間之後, 我漸漸覺得, 直覺主義者的強烈信念對“做數學”反而是一種傷害。因爲一個數學家若是太堅信直覺主義, 那麼他等於放棄了做數學的最強動機 —去搜尋大家都認可的眞理。數學畢竟是科學的一部

分, 其主要目的還是去發現新的眞理。如果放棄了這個主旨, 就像直覺主義者那樣, 那麼數學將變成一種祕傳的藝術形式, 頂多只不過是一種遊戲罷了。直覺主義忽略了一件事, 這一件事在我反省自己做數學的心態時是非常明顯的: 當我建構數學時, 我並非對“建構”本身有興趣, 而是因爲該建構能使我發現新的眞理。“建構”必須由它扮演的認識上的角色獲得意義。誰會對一個什麼都沒說的證明有興趣? 就像“建構”隱藏在符號裡面而且賦予符意義一樣, 一定也有某些東西隱藏在建構裡面—那就是數學眞理。

就“數學眞理”這個角度而言, 數學創造絕不是完全自由的。一個數學論證常常給人一種“不得不如此”(inevitability) 的感覺。當數學家們談論和思考他們的工作時, “嚴密”這個要求佔有非常重要的地位, 而“嚴密”正是對他自由的一個限制。數學家接受它爲的是使他的定理可以成眞, 以及使他的論證能眞正建立結論的眞實性。

數學眞理和數學建構不一樣, 不是光靠完全的內省就能得到的。數學眞理不在我們的心中。一個數學理論, 就像任何其他的科學理論一樣, 是一個社會性的製品。它必須經由衆多心靈的交互辯證才能得到創造和發展, 並不是一個心靈可獨自完成的。當我們去看數學的歷史時, 我們會發現它不僅僅是新定義、新技巧、新定理的累積而已; 它還包括: 對舊概念和舊陳述不停地細緻化和精確化, “嚴密”的標準漸漸提升, 還有在廣度和深度上的持續增加。每一代的數學家都會重新考察前一代的數學, 摒除那些標新立異的、膚淺的、甚至是假的東西; 重新鑄造那些含有豐富創意的想法。指導這整個過程的就是一個對眞理的共同看法和共同信念, 這個信念使我們能去澄淸和更正我們的老師們所做的工作; 同樣的, 我們的學生也能澄淸和更正我們的工作。

爲了能更小心地敍述我的論證, 對於“嚴密”這個概念我想多說一些話。數學家們普遍認爲, 這個概念是會改變的。同樣一個論證, Euler 來看可能覺得夠嚴密了, 換作 Cauchy 可能就不這樣覺得。而一個 Cauchy 覺得夠嚴密的論證, 我們來看可能會看出明顯的漏洞。但不能因爲這樣就說“嚴密”這個概念在改變, 事實上改變的是“嚴密”的標準。也就是說, 所謂一個嚴密的論證, 就是一個能充份建立其結論的眞實性的論證。當我們的洞察力 (insight) 漸漸增強, 我們就能看出有更多的東西是爲建立眞實性所必需, 因此一個曾經是嚴密的論證對我們而言可能就充滿漏洞了。但是, 至少從 Euclid 開始, “嚴密”這個概念本身並沒改變過。

還有許多事情顯示出“嚴密”必須預設“眞理”。實際上, 當我們在評估一個數學論證時, 我們並不會去檢查該論證是否符合某組推論規則, 例如, 邏輯教科書上的推論規則; 我們眞正考慮的是: 這個論證是否能達到目的? 也就是, 它能不能說服我們而且應該說服我們其結論的確是眞的。因此, “數學眞理”這個概念直接被引用進“數學嚴密性”的實際操作中。在“嚴密性”的判斷標準裡, “數學眞理”是一個不可或缺的考慮要素。

現在我可以敍述反對直覺主義的論證了。數學眞理實際上是實在的。眞的, 如果實

際上沒有數學眞理這種東西, 也就不可能有所謂的"數學嚴密性"這種東西。但是否認數學眞理的客觀實在性卻是直覺主義的基本觀點, 所以, 直覺主義不能是一個適當的數學哲學。

5. 邏輯主義

如果直覺主義被摒棄是因爲它忽略了數學眞理, 那麼我們可能選擇第三種數學哲學。這種哲學認爲數學是由下列東西所組成: 特定的眞理、建立這些眞理的論證、這些論證底下的建構、還有表達這些論證和眞理的符號操作。完了, 其他沒什麼了。這似乎就是習慣上被稱爲邏輯主義的中心信念。這種觀點的擁護者中, 最著名的兩位就是 Gottlob Frege 和羅素。說明這個觀點的書, 較早的有 Frege [7] 和羅素 [8]; 較近代的則是 Hempel [9]。

和形式主義者及直覺主義者不同, 邏輯主義者會將算術基本定理視爲是一種眞理, 一種其內容獨立於我們活動的眞理。對邏輯主義者而言, 並沒有這樣子的自然數: 它是一種獨立存在的實體而且具有定理所表達的性質。我們應該在一系列定義的基礎上來了解這個定理。當這個定理用到的所有表達式被展開成符合這些定義的形式時, 邏輯主義者會說這個定理只是一個非常複雜的邏輯眞理罷了。對他們而言, 這個定理和下列陳述處於相同的地位: "如果所有的 A 都是 B 和 C, 那麼所有的 A 是 C"。

邏輯主義者否認數學眞理裡有任何的主觀成份。數學詞項也不會有一個唯一的指涉。數學眞理之所以是眞的並非因爲它們成功地描了實際上發生的事態, 它們不包含任何事實內容 (factual content)。因此, 數學眞理之所以爲眞, 必須就它們自己的內部結構還有它們彼此之間的關係這兩個層面來談, 而那正是邏輯眞理之所以爲眞的方式。所以邏輯主義者認爲, 整個數學就是邏輯。當然, 實際上邏輯主義者在使用"邏輯"這個詞時是有點鬆的, 有時候他們也會把集合論包含進來。但是其基本觀點還是否認"數學斷言"有任何事實內容, 也就是否認數學眞理必須依靠數學內部結構以外的任何東西。本文開頭引的 Kline 的那句話很可能就是這個意思。([13, pp.424-431] 裡有關於 Kline 的觀點的一個精確說明; 若要再更仔細的, 可以看 Kline[14, pp.1028-1039]。)

邏輯主義推動大部分早期的數理邏輯研究工作。我認爲, 就對數學基礎的了解而言, 邏輯主義做的貢獻大過其他任何一派數學哲學, 雖然它對"數學的實際操作"並非如此。那種想把整個數學還原成"邏輯"(即純粹是概念上的推衍) 的渴望強烈地刺激了下列兩件工作: (1) 簡化和統一基本的數學想法; (2) 找出並表明所有數學奠基的基本原則。即使現在, 邏輯主義仍不停地做出這樣子的貢獻。例如, 有一支數理邏輯的分支, 即證明論, 正努力地在數學的各個方向上拓展邏輯概念, 藉此將愈來愈多的數學還原成邏輯眞理。這裡我想只提證明論的一個成果, 過去25年來已發展了一套關於無限長的式子和證明的理論, 可對算術及日益擴展數學分析的部份理論做一"邏輯"的分析。

和形式主義及直覺主義不同, 對於“數學的實際操作” 的一個具重要意義的部分, 邏輯主義的確提供了一個適當的說明。數學中的很大一部分確實就是邏輯。我們從已淸楚列出的前提開始推理, 努力去找一個論證以解決先前的問題。但我很懷疑, 數學家們深思而得的工作結果眞的能用邏輯主義者的方式去說明嗎? 每個數學家都知道他最好的工作成果絕不是只靠推理就可以完成, 還有一個很特殊的因素, 他們稱之爲“直覺”。這裡所謂的“直覺”是指一種能力, 數學家們能經由它知覺到某個結構的性質, 而該性質在那個時候還未被邏輯地推導出來。這種知覺能被訓練出來而且時常是值得信賴的。有時候, 當試著去做推論的工作時, 我們會覺得情況很像是一個人處於一個不熟悉的陰暗房間而試圖去發現一條通道。剛開始時, 心裡面會覺得和這個房間格格不入, 但等到眼睛適應了黑暗之後, 我們會模模糊糊地知道這個房間的東西是如何放置的, 我們會知道一張先前沒被撞到的椅子擺在哪裡, 再來我們就能輕鬆愉快地在房間內走來走去了。一個數學家會“直覺地知道”如此這般的樣子一定是某種特殊情形, 但就是沒辦法證明它; 這幾乎是每天都會發生的事情。當然, 他常常是錯的 , 但他對的時候會更多。如果我很敬仰一個數學家而且他對某個結構已有廣泛的經驗, 我將很願意相信他對該結構的直覺, 即使他還不能給出證明。我當然不是一定會如此, 但在大部分的情況下我會這樣做。

我必須立刻澄淸, 我並不是主張有一種神祕的能力, 靠著這種能力我們可以直接認識柏拉圖天堂裡的東西。我想說的是, 數學家的直覺是人類一般的能力中非常特殊的一種, 靠著這種能力數學家可以認出模式 (pattern) , 講具體一點, 就是能在散亂的線索中綜合出複雜的結構。我認爲數學家在某個結構上的直覺, 是長期累積的工作經驗的結果。這和一個木匠對他的木料的“感受”(feel) 並沒有什麼不同。這是事實, 數學家總能夠不必靠邏輯推理而得到一些有關於數學物的結論, 這些結論也多少總是値得信賴的。的確, 數學的創造力來自於直覺的成份遠比來自於邏輯的要多的多。(基本上也屬於這種觀點的書, 可以看 Wilder[19] 或 Resnick[16]。) 因此, 邏輯主義者對數學的說明並不是適當的。

然而他們到底漏掉了什麼? 邏輯主義者主張數學是一個整體的眞理, 任何外在的東西都與那些眞理無關。它們之所以眞只因爲它們的內部結構, 並非因爲任何的外在事物, 雖然那些眞理提到它們。如果邏輯主義者是對的, 那麼有關於數學直覺的現象將是不可理解的。如果他們是對的, 也就沒有所謂的結構可供數學家們展現他們的“洞見”(insight)。

在這些困難中, 一個比較有趣的情況是邏輯主義者將如何看待公理所扮演的角色? 一個原則, 如果既不是邏輯眞理, 也不能由先前已接受的原則演繹出來, 那麼我們並沒有辦法光靠推理就接受它。因此, 邏輯主義者並不認爲這種原則是一定可以被接受的。例如, 他們就傾向於把幾何學視爲是一種假設性的學科。如果物理空間滿足幾何公理, 它就必須也滿足幾何定理。(關於這種看

法, 可以看前文提到的 Kline 的書, 或者 Hempel[10]。) 但實際上我們對歐氏空間 (Euclidean space) 有非常淸晰的眞覺, 而歐氏幾何的定理對該結構而言明顯地是眞的。一般都認爲最早的幾何學知識是由經驗而來。如果是這樣, 那麼這種知識並沒有假設性的特質。至於非歐幾何, 它只是告訴我們, 否定平行公理後並不會得到一個矛盾, 它並沒有說平行公理是假的。廣義相對論表明, 若將時空視爲一個非固定曲率的四維流形, 那麼某些難解的觀察就可以得到很好的描述, 從這些例子可顯示出 (雖然我不是很確定) 我們直覺上的空間並不是很能符合物理上的空間。這當然不是說我們沒有一個淸晰的空間直覺。事實上, 以我們居住的和經驗到的空間而言, 歐氏幾何仍然是一個非常好的描述。這也不是意味著幾何圖像的使用必須從公理出發, 透過純邏輯推理一步步地導出來。有一些公理, 像是次序公理, 在直覺上是這麼明顯以致於要到十九世紀才注意到它們。如果說 Moritz Posch 之前的所有幾何學家全都得蒙上"犯下系統性地邏輯錯誤"的罪名, 這似乎是不合理的。我們也許該這麼講: 他們正從事某種活動, 但並非是在公理的基礎上推衍邏輯結論。我認爲他們正在研究空間。

現在, 我可以描述我的論證如下。數學直覺是實際上實在的, 而且只能被理解成是一種結構內的非演繹式的洞見, 該結構外於數學本身。因此這樣一個外在的數學結構也是實際上實在的。但否認這種結構的客觀實在性正是邏輯主義的基本敎義; 因此, 由客觀性原則, 邏輯主義不能是一種適當的數學哲學。

6. 柏拉圖主義

邏輯主義必須被摒棄, 因爲它是不完備的數學哲學, 它忽略了和數學緊密相關的東西。因此, 我們可以選擇第四種數學哲學, 這一種數學哲學認爲數學是由下列要素組成: (1) 談及抽象結構的眞理, 該結構獨立於我們而存在; (2) 建立那些眞理的邏輯論證, (3) 在那些論證底下的建構, (4) 表達這些論證和眞理的符號操作。其他就沒什麼了。這應該就是被稱爲柏拉圖主義的數學哲學。一個最獨特的當代擁護者是戈德爾 (Kurt Gödel) (例如, 可看他的 [8])。

柏拉圖主義者會直接解釋算術基本定理。對他們而言, 自然數是獨立於我們而存在著的, 而因爲每一個自然數的確能被唯一地分解成質數連乘積, 所以該定理是眞的。

在數理邏輯裡, 柏拉圖主義一個最特別的表現方式就是模型論。模型論研究數學理論的語意內容。當然, 形式主義、直覺主義和邏輯主義全都否認數學理論有語意內容。模型論的中心問題是: 結構的什麼性質能在一個特定的語言內被表達。而這個問題只有在下列的情況下才能成立: 結構是存在著的, 而且具有性質, 此性質獨立於對它的描述。

讓我很快的摘述由柏拉圖主義者所描繪的數學活動的景象。數學家們面對著種種不同的抽象結構, 這些結構早在數學家開始做數學之前就有了。數學家並沒有創造它們, 而是去發現它們。在訓練的過程中, 數學家們逐漸培養他們的能力、精煉出一種關於這些結構的直覺。當然, 一個數學家對某些結構的洞視會多過其他的結構。數學世界的眞理孕育

出他的直覺, 而那些眞理早被他的前輩和同事們發現了; 然後他的直覺又使他能去發現新結構以及對舊結構做出一些新猜測。爲了去檢驗這些猜測、去回答擺在他面前的問題, 他必須組織“建構”、做出論證, 定義新的概念。這些用文字表達出來的建構必須再由計算所支撑而且必須被嚴密化和形式化。最後, 這些建構進入一個數學得以發展的社會性辯證過程, 接受其他數學家的檢驗。

關於純數學家們的活動, 我覺得這似乎已是一個相當令人滿意的說明。的確, 大部分的當代數學家們, 雖然不必爲了要淸楚地回答這些問題而煩心, 但我想他們都會接受這種觀點或類似的觀點。正因爲柏拉圖主義已經是這麼地令人滿意, 以致於數學家或者數學哲學家都覺得不需要再超越它了。但就在過去這些年裡, 已經有了對柏拉圖主義不滿意的跡象。爲了指出這些不滿意的由來, 我想做一些主要的歷史回顧。

在十八世紀時, 人們認爲數學做爲一門科學, 它和其他科學不一樣的地方只在於它是比較確定的, 而且是比較基本的。它的轄區內的成員是一些律則 — 一些處理空間和量的律則。到了十九世紀, 這種看法遭到強烈的質疑。首先, 非歐幾何的出現否定了直覺上的空間結構的唯一性。然後解析幾何再砍掉對空間的任何直覺, 只保留“數字的連續”(numerical continunm) 這個直覺。這種發展的最後結局是, 當代的數學家會這樣告訴他們的學生:「所謂的三維歐氏空間, 我的意思是指由所有的實數有序三元組所成的集合。」這顯然不是歐幾里得的意思。在十九世紀末時, 甚至連“量” 或“大小 (magnitude)”的概念都改變了 (至少在學院裡面是如此), 變成了一種純粹概念上的結構。這必須歸功於 Weierstrass, Dedekind, 和 Cantor。於是, 當代的數學家們很可能再告訴他們的學生:「所謂一個實數, 我的意思是指一個“Dedekind 斷”(Dedekind cut)。」這顯然也不是 Euler 的意思。

這些改變導致了一個結果, 也許可以稱之爲“基礎上的眞空 (fundational vacunm)”。在那種情況裡, 數學家發現他們沒辦法爲結構的本質做一個系統性的說明, 而那些結構又是他們天天在研究的。於是公理集合論趕進來塡補這個眞空。集合論所提出的關於數學基礎的觀點, 在其最原始的形式上, 就是一種柏拉圖主義。在集合論學家的世界裡, 所有的東西都是抽象的。即使允許有特殊元 (individuals)(它們通常被排除在外), 這些特殊元也必須被視爲是一種既沒有內部結構也沒有內含關係 (intentional relationships) 的東西。它們只是一種抽象的點。因此, 若把所有的數學還原到集合論, 這等於是對數學世界進行裁員, 因爲集合論排除了所有的具體實在。

大約花了兩個世代, 集合論獲得巨大的成功。我想大概沒有人會懷疑集合論提供了一個簡潔優美而且方便的架構使得我們能在該架構內從事純數學的工作。在概念上, 集合論是那麼奇妙的簡潔, (若是以數學的實際操作方式幾乎不可能得到這種簡潔); 而對一些問題, 像“到底什麼才是眞正的數? ”集合論也給了一個感覺上很“順” (smoothly) 的肯

定答案; 至於它本身更是提供了許多豐富、有趣的結構, 這些結構是 Cantor 以前的人連做夢都夢不到的。

但是, 過去二十五年裡, 集合論還是遭到了一些粗略的侵蝕, 就像一百年前幾何學被侵蝕一樣。有關獨立性的一些結果、大基數公理的急速增殖、還有那些在集合論上愈來愈古怪的模型建構, 所有這些都一再地使數學家們領悟到, 他們在集合論上的直覺實際上是多麼的貧乏。在新的洞見未出現之前, 集合論學家們的觀點開始分歧了。一些人追隨 Cantor, 認爲連續統假設是合理的; 其他人則追隨 Gödel, 愈來愈堅信連續統假設一定是假的。情況已經非常明顯, 我們需要一個比"集合"更基本的新概念。不幸地是沒有一個人能想出這個新概念, 甚至連該往哪個方向找都不知道。

但所有這些情況並非一定會和柏拉圖主義起衝突。你會愈來愈頻繁地聽到這種建議: 集合論的世界並不是只有一個而是有很多個。你也許在連續統假設成立的世界裡工作; 而我工作的世界裡 Martin 公理成立但連續統假設則不成立; 他則是在包含可測基數的世界裡工作; 而她工作的世界裡則由於所有的集合都是可建構的, 因此可測基數是不可能的。這些世界只是不同的結構而已, 而且每一個都一樣有趣也一樣值得研究。這會有什麼問題嗎? 問題在哪裡?

問題和1890年的發生的問題一樣: 這些不同的結構如何互相作用? 它們是什麼? 如果在這些集合論的世界中, 不論哪一個都不再能扮演統理所有結構的角色, 那麼, 將所有的數學世界視爲一個單一整體的律則是什麼? 所有這些問題都還沒有得到普遍可接受的答案。我想, 正因爲這種絕望的處境使得一些數學家又重新回到形式主義、直覺主義或邏輯主義—在這三派哲學裡是沒有那些問題的。

我想再以不同的方式說明這個問題。對我而言, 數學似乎只有在下列情況下才得以興盛: 對於我們所研究的東西有一個共同的想法, 還有在「我們所研究的種種不同結構只是同一個實在的不同側面」這一個看法上達成一致的同意。如果對於數學基礎不能有一致的看法, 那麼數學似乎就有分裂成數個派別的趨勢。

實際上不只是集合論有分裂的趨勢, 就是連數學的柏拉圖主義本身都是在一個更大的、有關於科學的架構中分裂出來的結果。對於科學本質的看法, 傳統上一向認爲只有一個實在 (例如牛頓那個時代), 因而也只有一個科學。在這種觀點之下, 種種特別的科學—數學、物理、化學、生物—所研究的其實是同一個實在, 它們只不過是問不同的問題、使用不同的研究方法罷了。然而, 每一個個別的科學都會展現它自己對這個世界的特有觀點, 所以傳統觀點留下了一個對科學的基本假設: 這些對同一個世界的不同觀點是彼此互補的而且也能夠互相支援。事實上數學中的大部分都相當直接地反應了自然的某個部分。幾何關心的是空間、機率理論教我們隨機過程、群論闡釋了對稱性、邏輯描述 了合理的推衍、分析學的大部分則是爲了研究特殊的物理過程而被創造出來, 而爲了研究那些過程分析

學仍是不可或缺的。所列的這些還可以不停地增加。然而從柏拉圖主義者的觀點而言, 只有純數學才是眞正的數學; 因此, 數學所研究的東西必定要是抽象的。那麼, 如果我們研究的群一定得建立在集合的集合的集合上面, 有限群理論怎麼能告訴我們有關於晶體的結構呢?

如果數學的基礎變得完全抽象而且和感覺世界不再有任何關連, 則數學和其他科學的聯繫就變得模糊了。最近, 當經濟學的情勢已經迫使數學家們四處去尋找支撐的新工具時, 數學和其他科學分離的這種局面已不再有什麼好自誇的而且也應該引起更多的關注。數學和其他科學如何達成諧調? 集合論無論如何都沒有辦法為這個問題提供任何線索。

因此我認為數學的柏拉圖主義仍然是一種表面主義。我們最好的定理給出關於這個具體世界的許多資訊, 這是實際上實在的情形。純粹數學和應用數學之間並沒有淸楚的界線, 這也是實際上實在的。只有一個科學。從客觀性原則可以推出, 一個適當的數學哲學應該指出這些事實的客觀內容是什麼。這樣子的數學哲學只是一種科學哲學的一章。而那種科學哲學必須能澄淸下列兩件事: (1) 在什麼意義之下我們能去談“只有一個客觀世界”? (2) 數學家研究的數學對象 (其中很大一部分不能被看成是一種物理實在) 又如何能被看成是那個客觀世界的一部分? 很遺憾, 這種哲學還沒有出現。

參考資料

1. Paul Benacerraf and Hilary Putnam, eds., Philosophy of Mathematics: Selected Readings, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1964.
2. Errett Bishop, Foundations of Con- structive Analysis, McGraw-Hill, New York, 1967.
3. L. E. J. Brouwer, Intuitionism and formalism, trans. by A. Dresden, in Benacerraf and Putnam [1, pp. 66-77].
4. Paul J. Cohen, Comments on the foundations of set theory, in Dana S. Scott, ed., Axiomatic Set Theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 13, Part I, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1971, pp. 9-15.
5. Haskell B. Curry, Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics, North-Holland, Amsterdam, 1958.
6. Michael Dummett, Elements of Intuitionism, Clarendon Press, Oxford, 1977.
7. Gottlob Frege, The concept of number, in Benacerraf and Putnam [1, pp. 85-112).
8. Kurt Gödel, What is Cantor's continuum problem?, in Benacerraf and Putnam [1, pp. 258-273].
9. Carl G. Hempel, On the nature of mathematical truth, in Benacerraf and Putnam [1, pp. 366-381].
10. ——, Geometry and empirical science, this MONTHLY, 52 (1945) 7-17.
11. Arend Heyting, Intuitionism: An Introduction, 2nd. rev. ed., North-Holland, Amsterdam, 1966.
12. David Hibert, On the infinite, in Benacerraf and Putnam [1, pp. 134-151].

13. Morris Kline, Mathematics in Western Culture, Oxford University Press, New York, 1953.
14. ——, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press, New York, 1972.
15. Georg Kreisel, Hilbert's programme, in Benacerraf and Putnam [1, pp. 157-180].
16. Michael D. Resnik, Mathematical knowledge and pattern cognition, Canad. J. Philos., 5 (1975) 25-39.
17. Abraham Robinson, Formalism 64, in Yehoshua Bar-Hillel, ed., Logic, Meth- odology and Philosophy of Science, North-Holland, Amsterdam, 1965, pp. 228-246.
18. Bertrand Russell, Selections from Introduction to Mathematical Philoso- phy, in Benacerraf and Putnam [1, pp. 113-133].
19. R. L. Wilder, The role of intuition, Science, 156 (1967) 605-610.

—本文譯者就讀於國立中正大學哲學研究所—