算法及其產生的一些數學

楊東屏

李昂生

摘要: 本文討論由算法 (algorithm) 的精確定義而產生的與算法和遞歸 (recursiveness) 有關的, 判定性 (decidability) 問題、可計算性 (computability) 理論、計算複雜性 (computational complexity)、遞歸論 (recursion theory) 和遞歸數學等數學研究的基本成果和問題。

算法是數學裡的一個重要概念, 它對數學的發展起了重要作用, 也對電子計算機的發展起了重要作用。這裡我們介紹一下有關算法的一些問題。

什麼是算法? 算法是爲解決一類數學問題的統一方法。它是由有窮多條規則組成, 可以機械地執行。對有解的輸入數據, 可以在有窮步內進行完算法過程並給出答案。

例如求兩個代數式的最大公因式的輾轉相除法, 又稱歐幾理德算法 (Euclidean), 就是一個很好的算法的例子。現在人們使用電子計算機時編寫的程序, 也是算法的例子。

早在公元前三世紀, 古代中國和希臘的數學家就在尋求各類數學問題的算法。中國古代也用類似輾轉相除方法求兩個自然數的最大公因數。

公元七世紀時印度人佈拉馬古佈塔 (Brahmagupta) 給出了判定二元一次不定方程式 $ax+by=c$ 是否有解的算法, 這算法在當時是很難的, 因爲它包含求 a 和 b 的最大公因數的算法, 用 a 和 b 的最大公因數是否可以整除 c 來判定 $ax+by=c$ 有整數解。

大約生活在公元 780 到 850 之間的阿拉伯著名數學穆罕莫德·以佈·穆薩·阿爾哥裡茲米 (Mohammed ibn Musa al-Khowârizmî), 他給出了今天大家熟悉的自然數上運算的算法規則。他還給出了二次方程式根式解的算法。由於他在算法上的貢獻很重要, 英文算法一詞 Algorithm 即由他的名字轉化而來。

在阿拉伯人影響下, 西班牙人萊芒德·盧利 (R. Lully, 1235-1315) 提出要找推斷出

眞理的算法, 並希望選出機器來實現這種算法。他的想法雖然不能被同代人接受, 但是對後世影響很大。

在盧利的影響下卡丹諾 (Cardan, 1501-1576) 和法拉里 (Ferrari, 1522-1565) 給出了尋求三次和四次方程式根式解的算法。爲尋求五次和五次以上方程式根式解的算法產生了近世代數理論。

法蘭西斯·維也特 (Francis V.) 在研究算法過程中系統地使用了符號, 這不但對日後算法研究的發展起了重要作用, 而且影響了以後形式語言的產生。

由於在代數裡找到了大量算法, 笛卡爾 (Descartes, 1598-1650) 在尋求幾何證明的算法時企圖能利用代數裡已有的算法。所以他引進了座標, 用代數工具來描寫、處理幾何圖形, 從而產生了解析幾何。雖然他本人未能達到他的目的, 後來希爾伯特 (Hilbert) 和塔斯基 (Tarski) 沿著他的方向進行了工作, 最後塔斯基完成了笛卡爾的設想。目前由於有了電子計算機, 人們又在尋找, 可以在計算機上實現、複雜性小的算法。我國吳文俊先生的吳方法在這方面有重要貢獻。

1623 年施卡特造出了第一架計算器, 人類第一次用物理裝置延伸了人腦, 用機器部分地代替人腦活動。稍後在 1641 年巴士噶 (Pascal, 1623-1662) 也造出了計算器。

萊佈尼茲 (Leibniz,1646-1716) 在盧利影響下要找出發現一切眞理的通用算法。爲此他想首先要建立一個可以描寫科學命題, 起碼可以描寫數學命題的語言。在這語言裡可以進行邏輯推導。然後再對此語言找出產生一切科學眞理的算法。他的想法用今天的話來說就是建立謂詞演算並給出謂詞演算命題可證性的判定算法。這樣他創造了數理邏輯, 後來在許多數學家的努力下有了今天的完善的謂詞演算系統。

在尋求算法的過程中, 數學家們長期尋求某些數學問題的算法, 但是總找不到, 因此開始懷疑有些數學問題不存在解決它們的算法。爲了證明某些問題不存在算法, 就要求有算法的精確定義以便數學地處理它。

本世紀三十年代人們找到了幾個等價的定義算法的數學概念, λ - 可定義函數、遞歸函數, 圖靈可計算函數, 正規算法和波斯特演算等。

有了算法的精確定義後, 人們很快地證明了一些重要的問題不存在解決它們的算法。如上面講的謂詞演算判定問題的算法、停機問題的判定算法、半群上字的等價性的判定算法、希爾伯特第十問題, 即丟方庭 (Diophantus) 方程可解性判定算法等。

圖靈 (Turing) 在給出爲定義圖靈可計算函數的圖靈機後, 證明了存在通用圖靈機。他的通用圖靈機的思想影響了馮·諾依曼 (J. Von Neumann) 的電子計算機體系設計思想。通用圖靈機存在性定理的證明思想也對解釋性編譯程序提供了思路。所以算法的研究成果爲今天電子計算機的產生、發展提供了很好的理論儲備。這種科學發展的規律, 由理論研究成果到應用於生產實用的發展過程, 應該很好地總結一下, 以利於中國科學的正常發展。

和上述歷史情況相反, 由於算法概念和計算機的密切聯繫, 現在許多人誤以爲算法概念是有了計算機以後才產生的。

由算法研究的發展產生的可計算性、計算等概念不但很好地用於電子計算機, 也可用於其他領域。例如對人類認知過程的研究, 很長的時期只是思辯式的成果。後來人們用圖靈的計算作爲認知的數學描述, 第一次使認知概念有了嚴格的數學描述, 由思辯式的研究方式轉變爲嚴格的科學的理論分析。

隨著計算機實踐和理論的發展與算法有關的研究有了進一步的發展。人們不只關心對某類數學問題是否存在有算法, 而且要考慮在執行算法時所用的資源多少, 即計算複雜性的研究。

人們在描述算法時所需用的信息量, 通常是以描述算法時所用的符號量, 稱爲算法的靜態複雜性。在執行一算法過程中所使用的資源, 即爲存儲執行過程中所有的信息而用的空間和所用的時間, 稱爲算法的動態複雜性。

平常人們講的計算複雜性, 主要是指動態複雜性。動態複雜性很重要, 因爲如果一算法的空間計算複雜性大, 那麼意味著要用大型計算機, 這也意味著每小時的機時費很高。如果一算法的時間計算複雜性大, 那麼計算的時間要長, 要付的機時費要高。如果數據量大到再大型的機器也無法處理, 或計算時間要上百年, 那麼這種算法起碼在目前是無法應用的。

人們對計算複雜性是有很淸楚的直觀概念的, 例如人們知道通常的乘法運算的計算複雜性要大於加法的計算複雜性。但是如果要進行理論研究, 那麼我們應該對計算複雜性有精確的數學定義。當然這些定義應符合人們的直觀概念。

爲了給計算複雜性以精確的數學定義, 首先遇到的問題也是計算模型的問題。通常用的計算模型是圖靈機 (Turing Machine) 或 RAM 機器 (隨機存取機器)。圖靈機易於處理複雜性的下界問題, 而 RAM 機器易於處理複雜性的上界問題。RAM 機器也是馮 · 諾依曼計算機的更具體的模型。圖靈機和 RAM 機器在相互模仿時, 所用的空間存儲數只差一個常數乘積因子, 用的時間則只差一多項式倍數。RAM 機器也可作爲描述並行計算的模型。此外還可以用它們的某些變型, 如多帶圖靈機。單帶圖靈機和多帶圖靈機在計算複雜性上差異不大, 只差一個多項式倍。例如具有單向輸入的單帶圖靈機可在平方時間內模擬具有單向輸入的多帶圖靈機, 且模擬時間不少於平方時間。

後來佈拉姆 (Blum) 引入了幾條公理定義出了抽象計算複雜性。把時間、空間複雜性統一起來了。而且得出了一些有趣的結果。例如存在有其計算複雜性可超過人們所預料的任意程度的可計算函數, 即對任意可計算函數 $t(x)$, 存在可計算函數 $g(x)$, $g(x)$ 的複雜性函數 $R_g(x)$ 除有窮多個 x 外都 $> t(x)$。

人們也發現在某些情況下複雜性與函數構造的複雜性有關。例如, 原始遞歸函數的波蘭分層所揭示的構造複雜性和計算複雜性一致。

佈拉姆的一個使人驚訝的結果是加速定理。他給出了一個可計算函數 $f(x)$, 對任意

單調增函數 $g(x)$ 及對 f 的任何算法 α, 都可以找到另一個 f 的算法 β 使得除對有窮多個輸入外的一切輸入 x, 使用 α 時的計算步數 $s_\alpha(x) \geq g(s_\beta(x))$, 其中 $s_\beta(x)$ 爲使用 β 時的計算步數。即使用 β 時計算複雜性比使用 α 時可以小到人們任意預計那樣小, 因此對 f 而言, 它不存在最佳算法。

但是經過研究後, 人們發現在實際的計算過程中不會出現加速現象。因此計算機科學家們對佈拉姆的計算複雜性理論持否定態度。

後來計算機科學和數學家找到了共同感興趣又都認爲有意義的研究領域; 多項式計算複雜性。

在介紹多項式計算複雜性之前先介紹一個概念: 非確定性圖靈機。我們通常講的圖靈機是確定性的。我們日常用的程序語言也是確定性的。在執行它們時, 每執行完一步計算後, 如果尚未停機, 下一步計算只有一種選擇的可能性。如果一個圖靈機在執行過程中, 對下一步的選擇, 有時可以多於一種選擇, 那麼這種圖靈機稱爲是非確定性的。

稱一確定性圖靈機是多項式可計算的, 若存在一多項式函數 $p(n)$, 使對一切輸入 x, 機器對 x 的計算在 $p(|x|)$ 步內要停止。其中 $|x|$ 是 x 的長度。一切多項式可計算的問題類的全體記爲 P。一非確定性圖靈機是多項式可計算的, 若有一多項式函數 $p(n)$ 使得, 對一切輸入 x, 機器對 x 的計算的所有可能的計算路徑中至少有一路徑可在 $p(|x|)$ 步內停止。即它不管一切可能的計算, 只看最短的成功的計算。非確定性圖靈機概念的直觀可以看成是一檢驗對各種可能計算的方式。多項式可計算圖靈機即一圖靈機, 我們可以檢驗對計算的好的猜測可否在多項式界內完成。一切非確定性多項式圖靈機可計算的問題類記爲 NP。

在多項式複雜性理論中最重要的一個問題是 P 是否 $= NP$? 許多重要的看起來好像具有指數複雜性的問題, 如背袋問題、推銷員路線問題, 佈爾代數可滿足性問題等等都是 NP 問題。如果它們都可以在多項式界內計算那麼這些問題就較容易處理了。

如果把上面定義的關於時間、計算步數的定義改爲關於空間的定義, 那麼相對於 P 和 NP 我們可有 PSPACE 和 NPSPACE 的概念。

可以證明

$$P \subseteq NP \subseteq \text{PSPACE} \subseteq \text{NPSPACE}$$

同時也知道最右邊一個 $\subseteq$ 是 $=$ (薩維奇 (Savage) 定理), 但是其它的 $\subseteq$ 是 $=$ 還是 $\subset_+$ 卻還沒解決。

有了算法的精確定義以後, 全體自然數上的函數就分成兩類, 一類是算法可計算函數, 如前所述, 對這一類函數進一步的數學問題就是計算複雜性問題 (是否實際可計算的問題), 另一類函數就是算法不可計算函數。事實上, 大量的函數是不可計算函數。

研究不可計算函數的不可計算程度是由遞歸論這一學科來進行的。在遞歸論中, 刻畫一個函數 f 的不可計算程度用不可解度 $\deg(f)$ 來表示。爲了定義不可解度的概念, 需要引入相對可計算性的概念, 比如我們採用 Turing 計算模型下的相對可計算性。設 A 和 B 是兩個自然數集 ω 的子集, 稱 A

是相對於 B Turing 可計算的, 如果存在一部帶喻示的 Turing 機 M_e, 使得對給定 x, 判定是否 $x \in A$, 只須啓動 M_e, 以 x 作爲輸入進行計算, 在計算過程中有窮次對某個 y, 詢問了是否 $y \in B$ 的問題, 由於假定 B 已知從而這些問題的回答是確定的, 然後最終在有窮時間內產生一個輸出 0 和 1, 輸出 0 時 $x \notin A$, 輸出 1 時 $x \in A$。這就像一個人–機系統, 機器在進行過程中時常停止來交給人, 人做某種指示後再繼續計算, 我們用 $A \leq_{\mathrm{T}} B$ 表示 A 相對於 B Turing 可計算。

於是, 集合A的不可解度定義爲 $\deg_{\mathrm{T}}(A) = \{X | X \subseteq \omega \ \& \ X \leq_{\mathrm{T}} A \ \& \ A \leq_{\mathrm{T}} X\}$, 也用 $\underset{\sim}{A}$ 或 $\underset{\sim}{a}$表示這一度。

不可解度就是遞歸論中的基本元素, 最小的不可解度是 0, 即遞歸集的度。早期的停機問題是一不可解問題從而產生了一個非遞歸的不可解度$0'$。類似地相對於任何一個集合A可產生一個相對於A的停機問題, 得到一個集合 A', 同樣可證 $A <_{\mathrm{T}} A'$, 於是 $A < A'$。這也得到不可解度的第一個運算 $\prime : a \mapsto a'$, 稱爲躍變算子。躍變算子產生了一個無窮遞增的不可解度序列, 如 $0 < 0' < 0'' < \cdots$, 這裡 $0 = \deg_{\mathrm{T}}(\phi)$, $\deg_{\mathrm{T}}(\phi^{(n)}) = 0^{(n)}$, $n \geq 1$。因此不可解度無最大元素。

爲了獲得不可解度的數學知識, 還需引入不可解度的運算, 很容易人們定義了 $x \vee y$, 表示不可解度 x 和 y 的上確界 (最小上界)。

Kleene & Post 1954 和 Spector 1956 證明, 存在不可解度 a 和 b 使得 a 和 b 的下確界 $a \wedge b$ 不存 在從而 a 和 b 也不可比。因此全體不可解度只形成一個上半格。Spector 1956 和 Sacks 1963 還證明了存在 $a > 0$, 使 $(0, a) = \phi$, 即存在極小度。這裡的結果和方法成了後來度論的全局性結構這一研究方向的基礎。

由 Post 1944 開始的對不可計算函數和不可解度的分層研究得到了不可計算性的算術分層, 並引出了後來的遞歸論分層理論這一方向。

另一個重要概念是遞歸可枚舉集, 即算法可產生集的概念。集合 A 被稱爲是一個遞歸可枚舉集, 如果存在部分可計算函數 f 使得 $A = \{f(x) | x \in \omega$ 且 $f(x)$ 有定義$\}$。一個度 a 稱爲遞歸可枚舉度, 如果存在遞歸可枚舉集 A 使 $A \in a$。1944 年以前, 人們知道的遞歸可枚舉集的不可解度只有 0 和 $0'$。因此 Post 1944 提出了他的著名問題, 是否存在遞歸可枚舉度 a 使 $a \neq 0$, $0'$?

沿 Post 問題的思路, 產生了對遞歸可枚舉集作成之格 $\mathcal{E}(\subseteq, \cup, \cap)$ 和遞歸可枚舉度作成之上半格 R 這兩個研究方向。我們以 R 爲例說一點這方面的研究情況。遞歸可枚舉度論 R 的研究以 1957 年 Friedberg 和 Muchnik 創造的有窮損害方法, 1963 年 Sacks 創造的無窮損害方法和 1975 年 Lachlan 創造的 $0'''$ 方法的出現爲標誌得到了逐步深入的研究。在格嵌入 R 的代數結構以及基本理論 $Th(R)$ 的研究等方面得到了豐富的結果。而且這裡的構造方法被廣泛用於代數、分析、計算複雜性、計算機科學理論及模型論等學科的研究。主要的未解決問題有一致性問題, 比如 Sacks 1967 提出的是

否 Post 問題有一致解? 可定義度和不可定義度的存在性, 可定義度類的刻畫, 格嵌入的判定條件, 在 R 中找到算術 $(\omega, +, \cdot)$ 的模擬物, 找到 $Th(R)$ 的可判定子類, 用一階語句來分離度的層次以及一些新的課題的研究。

我們還須指出, 不可解度恰是數學裡的基本對象。任何實數 $x \in [0,1]$ 對應於 2^{ω} 中一個元素, 於是有 x 的度 x。因此一個實函數也是一個度的函數, 把實函數看成度上的函數的研究也是一個課題。

以上是對不可計算函數研究的一些基本情況。

現在來介紹一些算法和遞歸工具在經典數學中應用的情況。

說起遞歸方法在數學中的應用, 人們往往想起經典數學中的一些遞歸定義、歸納方法、遞歸等式及遞歸不等式, 比如, 人們隨手便可舉出一些例子:

$$x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}$$
$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n},\ y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

$$(\mathrm{f} \circ \mathrm{g})^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k f^{(m-k)} g^{(k)}$$
$$y_{n+1} = (n+1) y_n$$
$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$$
$$x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$$
$$f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$$

等等。

由此可以看出, 遞歸是一種由已知對象產生新對象的模式。它所處理的對象是相當任意的, 可以是整數, 可以是實數, 甚至一般函數。通過一個遞歸模式可以建立對象之間的聯繫, 研究對象被產生的規律。

這些是遞歸方法在經典數學中被應用的顯而易見的例子, 熟練這種方法對學生學習數學是有益的, 我們感到它在數學的研究中也是很好的工具。

然而遞歸數學的目的是, 用算法和可計算的觀點來改建經典數學。由於觀點的細微差別, 出現了不同的學派, 這裡以例子來說明這方面研究的基本情況。

一個典型的例子是把可計算函數 (即遞歸函數) 推廣到實數域上以建立可計算分析。這裡把一切數學分析中所出現的概念限制在可計算的範圍, 可計算被作爲中心而加以強調。

Specker 1949 定義, 一個實數 x 是原始遞歸實數, 如果存在原始遞歸函數 f, f' 和 g 使下列不等式成立。

$$\left| x - \frac{f_{(n)} - f'_{(n)}}{g(n)} \right| < \frac{1}{2^n},$$

對一切 $n \in \omega$。

然而, 存在原始遞歸實數 x 使得 $3x$ 不是原始遞歸實數。這使 Specker 對可計算實數的定義失敗了。

Rice 1954, Robinson 1951 和 Mazur 1963 用遞歸函數代替 Specker 定義中的原始遞歸函數, 於是所有以前的怪現象消失了。並證明了, 一個實數 x 是可計算實數, 當且僅當 x 的十進展開式的數字序列是可計算的。這也是我們在前面定義一個實數

x 的不可解度 x 爲 x 的二進展開式產生的 ω 上子集的不可解度的理由。

容易證明, 可計算實數形成一個實數封閉域。因此可建立這個域的代數運算, 得出可計算實數的結果。

爲發展分析, 須建立可計算實變函數的概念, 爲此, 先定義可計算序列。

稱實數序列 $\{x_m\}_{m\in\omega}$ 爲可計算序列, 如果存在遞歸函數 f, f' 和 g 滿足下面不等式

$$\left|x_m - \frac{f(m,n)-f'(m,n)}{g(m,n)}\right| < \frac{1}{2^n}$$

對任 $m,n\in\omega$。

然而與這個定義有關也出現了一些不合人意的事, 例如, Mazur 1963 證明, 存在可計算實數序列 $\{x_m\}_{m\in\omega}$ 使對任意 $m\in\omega$, $x_m\neq 0$, 但是 $\{\frac{1}{x_m}\}_{m\in\omega}$ 不是可計算實數序列。

巴拏赫 (Banach) 和 Mazur 1959 定義, 稱一個實函數 φ 是可計算的, 如果 φ 把任何可計算實數序列轉換成可計算實數序列。並證明了, 這樣的實函數在每一個可計算點上都是連續的。他們還建立了各種分析性質, 比如中値定理, 若 $\varphi(x)<0$, $\varphi(y)>0$, $x<y$ 且 x 和 y 是可計算實數, 那麼存在可計算實數 z, 使 $x<z<y$ 且 $\varphi(z)=0$。

繼續的工作還建立了可計算巴拏赫泛函分析。Kleene 1952 和 1959 基於部份遞歸泛函建立了 Kleene 遞歸泛函。

Friedberg 1958 證明, 巴拏赫可計算泛函是比 Kleene 遞歸泛函更寬的一個類, 而且 Kleene 實函數可以不在可計算點達到極值。

沿此思路的研究還有種種推廣, 比如可定義分析、超算術分析以及高型泛函分析。

遞歸數學的另一典型例子是馬爾可夫 (Markov) 構造數學。在這裡一切數學概念歸結爲一個算法, 可計算實數和可計算實函數同前面一樣地被定義, 但處處把數換成了定義其逐次逼近的算法。這樣做的後果是謂詞“=”是不可判定的。在馬爾可夫構造數學中, 各種經典數學理論, 甚至像 Hilbert 空間和 Lebesgue 積分等都有模擬物。然而卻有各種差異, 比如在 Lebesgue 積分中, 積分和極限交換律不成立, 而這一點恰是 Lebesgue 積分所要克服的。

從以上描述的, 沿改建經典數學思路的遞歸數學的研究我們看出, 這種研究是極其普遍而且切實可行的, 而且數學家眞正的興趣不在於堅持一個構造性的觀點去實現改建經典數學的目的, 而是用算法和遞歸的觀點去分析經典數學的概念, 產生新的數學問題與結果, 這也是一個普遍的問題。我們還用一個例子說明。Martin-Löf 定義, 稱實數集 X 是構造測度 0 的, 如果存在一個算法 A, 使得對任意 n, A 產生一個區間的集合, 其總長 $<2^{-n}$ 且該區間集合覆蓋了 X, 不在任何一個可構造測度 0 集的實數稱爲隨機實數。可見, 隨機性這樣的數學概念都是可以遞歸逼近的。然而這樣定義的隨機實數 x 和它的不可解度 x 的關係是不淸楚的。比如是否下面遞歸定義的序列是一個隨機序列,

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{如果 } (\frac{3}{2})^n \text{ 模 } 1 \text{ 大於 } \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{否則}, \end{cases}$$

是否 $\{a_n\}_{n\in\omega}$ 是一個隨機序列就是一個未解決問題。

遞歸數學的另一種思路的研究是 Dekker 和 Myhill 1960 年開始的遞歸等價型的理論。一類特殊的遞歸等價型是孤點元 (Isol), 它恰是 Dedekind 有窮序數的能行形式, 從而建立了孤點元理論和不使用選擇公理的數學之間的直觀聯繫。

此外, 孤點元和不可解度相結合的一些問題和結果也是有趣的。1991 年 Downey 和 Slaman 發表此方面的一個結果, 它的證明用到一種非一致的 $0^{(3)}$ 方法, 它是遞歸論中至今見到的第一個用 $0^{(4)}$ 方法證明的結果。

一般地, 經典數學中的一些定理和構造是能行的, 而另一些則是非構造性的。怎樣獲取經典數學中能行部分的內容? 遞歸論的發明正好就是爲了精確地刻畫能行性的概念, 它以 ω 上函數爲討論對象, 建立了成熟的能行數學的理論和方法, 因此遞歸論是這樣的一個範例。然而, 在經典數學中, 比如, 向量空間、群、環、域、序論、佈爾代數、開集的格等, 有著相當不同的對象與學科特點, 它們之間沒有深層的公共理論, 深層的研究就是犧牲普遍性, 通過獨立地對各種數學學科建立遞歸論的概念、方法和結果來實現的。這種研究從七十年代以後有了很快發展, 分別在代數、分析、組合和模型論已得到大量的好結果。

我們還應注意到, 不僅有算法和遞歸的概念和方法用於經典數學的研究, 而且經典數學的一些概念和結論也在遞歸論中有相應形式。比如 Cantor-Beinstein 定理: 設 X 和 Y 是兩個集合, 如果存在從 X 到 Y 內的單射且存在從 Y 到 X 內的單射, 那麼存在從 X 到 Y 的雙射。該定理在遞歸論中的形式由 Myhill 在 1960 年得到:

設 A 和 B 是 ω 上兩個子集, 如果存在遞歸單射 f 和 g, 使得

$$x \in A \text{ 當且僅當 } f(x) \in B, \text{ 且}$$
$$x \in B \text{ 當且僅當 } g(x) \in A$$

那麼, 存在遞歸置換 h, 使得 $B = h(A)$。

再如, 不動點定理已被證明是許多經典數學學科中的基本結果。在遞歸論中著名的遞歸定理就是, 任何一個遞歸函數 f 均有不動點, 那存在 n, 使得 $W_n = W_{f(n)}$, 這裡 W_e 是第 e 架 Turing 機的定義域。我們還有, 設 A 是遞歸可枚舉集, $\deg(A) = 0'$ 當且僅當存在一個 A- 遞歸函數 f, 使 f 沒有不動點。此外最近還證明了其它形式的一些不動點定理。

即使是遞歸論中不可解度的研究, 至今最富有成果的還是沿代數途徑的研究, 即用代數觀點來對不可解度結構的研究。

我們感到, 遞歸論的生命力之源泉也正是經典數學。

—本文作者任職於北京中國科學院軟件研究所—