淺談形式化方法

楊東屏

使用電腦的人都會使用某種程序語言, 用它來編寫程序。電腦是不理解程序語言裡各個符號的含意的, 但是它可以根據程序裡不同符號的不同排列順序正確地執行編寫程序的人要求做的事情。這說明不含任何意義的不同符號的排列規律可以表達一定的數學規律。實際上連唸初中的學生都知道這個事實, 例如當他們由式子: $-(a+b-c)$ 得到 $-a-b+c$ 時腦子裡想的是: 表達式裡的括弧前面若有負號且當人們要取消括弧時原括弧內每個項前的正負號要改變, 把正號變爲負號, 負號變爲正號; 而當括弧前面沒有負號時, 可以只取消括弧而不對括弧內的符號做任何改動。這裡想的只是符號排列的變化規則而不直接去想任何數學規則。同樣地, 當他們把 $x=y-z$ 變爲 $x+z=y$ 時他們也只是考慮符號排列的變化規則: 移項時變該項前的正負號。這種用符號排列的規則去表達一定的數學內容的方法就是一種形式化方法。本文要著重介紹一下數理邏輯裡研究的有關形式語言的一些結果, 希望藉此介紹一些關於形式化方法的知識。

形式化方法是數學長期發展過程中產生的。古代的埃及人和巴比侖人都知道很多數學知識。例如古埃及人知道計算正方錐體體積的方法, 古巴比侖人知道直角三角形斜邊長度的平方等於二直角邊長的平方和。但是他們也有些錯誤的結論, 例如古埃及人認爲其邊長分別是a、b、c、d 的四邊形面積公式是 $\frac{(a+b)(b+d)}{4}$; 古巴比侖人認爲圓周率 π 等於 3。

在紀元前 640 到 546 生活在小亞細亞城市 Miletus 的 Thales 知道古埃及人和古巴比侖人的數學知識不一定可靠, 他提出證明的概念, 進而用邏輯驗證的辦法來發展幾何學。經過若干人的努力到了公元前三世紀有了歐幾理德的幾何原本。幾何原本是用邏輯驗證的辦法發展出來的幾何學, 但是人們也發現書中用的邏輯驗證方法的缺陷。例如在「數學傳播」第 64 期裡蕭文強先生的文章裡提到的, 由於根據錯誤的圖形而會產生錯誤的證明的例子。他的例子是可以 “證明” 一切三角形是等腰三角形。因此像 Leibniz、Reimann、Gauss、Pasch 都曾指出歐幾理德幾何的證明有時有缺陷, 即是有的證明裡邏輯推演的根據不是公理或已經證明爲眞的定理, 而是直觀的幾何圖形, 這會推演出錯誤的結論。因此人們提出正確的幾何證明應該不以圖形爲根據。爲了排除對圖形的依賴

人們使用了形式化方法, 用無任何直觀內容的抽象的符號表示幾何對象, 用關於抽象符號的抽象的關係表示幾何關係, 而這些對象和關係只滿足公理裡所陳述的邏輯關係。在證明過程中只依賴於這種邏輯關係而不依賴於這些符號的直觀含意。這樣把幾何對象和他們的直觀含意脫離開, 防止了錯誤直觀的潛入, 從而保證了數學推理的正確。這樣就開始用形式化的方法去處理數學系統。Hilbert 建立的歐幾理德幾何系統是這方面的典範。

1879 年 Frege 在他的書 Begriffsschrift 裡給出了邏輯系統謂詞演算的形式系統爲形式化各種數學系統提供了邏輯框架。

Hilbert 建立了他的幾何系統後, 他開始了元數學 (metamathematics) 的研究, 即以形式數學系統爲對象的研究。他提出了如下的一些問題:

1. 獨立性 (independence), 即各個公理是不是相對於其他公理是獨立的? 即是不是可以由其他公理推演出來。這問題是有意義的, 例如在歷史上幾何學用了很大的精力來討論平行公理是否可由其他公理推演出來?

2. 協調性 (consistency), 即這組公理系統是否是協調的? 即是不是會推演出兩個互相矛盾的命題來。Hilbert 指出了 Euclidean 幾何的實數集上的模型。他把 Euclidean 幾何的協調性歸約到實數理論的協調性上去。

3. 完全性 (completeness), 即這組公理系統是否是完全的? 即是否一切模型滿足同樣的性質。即 Euclidean 幾何的眞命題是否都可以在這公理系統裡可以證明。

4. 範疇性 (categoricity), 即在同構意義下是否某給定基數的模型 (model) 是唯一的? Hilbert 證明 Euclidean 幾何的範疇性。

因此 Hilbert 建立了他的 Enclidean 幾何系統後開始了一門全新的方向: 元數學方向。

上面提到 Frege 建立的謂詞演算系統可以作爲建立各個數學系統的邏輯框架。但是這點還應該加以證明。因爲應該數學地論證謂詞演算系統確實表達了通常科學家們用的推演規則。1931 年 Gödel 在他的博士論文裡證明了謂詞演算系統的完全性定理。加上協調性定理說明這形式系統恰好完全表達了科學家們用的邏輯推演規則, 因此我們可以放心地把它作爲各個數學系統的邏輯框架。

1902 年 6 月 Russell 給 Frege 寫了封信, 在信裡提出了著名的 Russell 悖論 (paradox), 使當時的數學基礎問題動搖了。當時人們想把各門數學建立在集合論之上。而當時人們的集合的概念就是滿足一定數學性質的所有元素組成的集體。這樣 Russell 定義了一個集合 $X = \{x|x \notin x\}$。那麼由 $X \in X$ 可以推演出 $X \notin X$; 由 $X \notin X$ 可以推演出 $X \in X$。這樣就出現了著名的 Russell 悖論。

這樣一來就提出了集合論系統是不是可靠的問題。如何才能建立協調的集合論, 然後在協調的集合論基礎上建立各種數學分支。

Hilbert 提出了他解決各種數學分支絕對協調性的方案。他建議建立各個數學分支的形式公理系統。這樣一切數學命題就變成了有窮的符號串。而證明則是有窮符號串的有窮串, 其中每個符號串要麼是公理或已證明的定理, 要麼是由前面符號串經過推演規則而得的公式。證明的最後一個公式是這個證明所推演出來的定理。形式數學系統的協調性就變成了, 不存在公式 A 使得 A 和它的否定 $\neg A$ 都是可以證明的。這系統的協調性就變成了一個關於符號串的組合問題。Hilbert 認為用這個辦法可以解決各數學系統的絕對協調性, 即只用本系統內的數學工具證明上述表示協調性的組合問題。當時許多數學家都按 Hilbert 的想法企圖去證明各個數學分支的協調性。

Gödel 當時的想法是在二階算術 (second order arithmetic) 系統裡用自然數集 N 的子集表示實數。以此來證明實數理論相對於算術理論的相對協調性。同時還證明算術理論的絕對協調性。這樣就可以同時證明了實數理論和算術理論的協調性。Gödel 利用了數論謂詞的眞變目是一個自然數集 N 的子集, 同時實數的二進位表示也可以和自然數子集對應的性質, 把自然數謂詞的眞假性和實數的可定義性聯繫起來。他得到了一個類似於說謊者悖論的論證方式, 最後得到了他的第一不完全性定理, 即如果 T 是一個充分複雜的數學理論, 那麼存在一個數學命題 A, A 和它的否定命題 $\neg A$ 在 T 中都不可證明。但是 A 和 $\neg A$ 中必有一個是眞命題, 因此在 T 中有眞命題是不能被證明出來的, 即 T 不是一個完全的系統。由此他進而證明了對這個複雜的數學系統 T, 不可能在 T 內證明它自身的協調性, 從而否定了 Hilbert 的方案, 說明 Hilbert 方案是無法實現的。

Gödel 的不完全性定理說明了語法規律無法完全表達充分複雜的數學系統的全部語義內容。因爲這形式理論 T 起碼有兩個不同構的模型, 即有兩個模型都滿足 T 的各條公理, 但是上述命題 A 在一個模型中爲眞, 而 $\neg A$ 則在另一個模型中爲眞。數理邏輯自己嚴格地表明了自己方法的局限性。最近見到李國偉先生寫了一篇非常好的介紹 Gödel 不完全性定理的文章, 讀者們可以看看李先生的文章進一步瞭解這個定理。

由 Gödel 的完全性定理可以得到緊緻性 (compactness) 定理, 這定理說, 公式集 $\{A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots\}$ 有統一的模型當且僅當它的任意有窮子集 $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_s}\}$ 有模型。這樣就可以論證出有非標準模型。例如我們取公式集 S 爲算術的公理加上集 $\{i > n | n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 裡的元素組成的集合, 那麼對 S 的任意有窮子集如 $S_i = \{i > n_0, \ldots, i > n_t\}$, S_i 有一模型, 即取 $i = \max\{n_0, \ldots, n_t\} + 1$ 即可。由緊緻性定理存在有 S 的統一的模型, 它滿足 S 裡的一切公式。這樣算術理論就有一個非標準模型, 在其中有大於一切標準自然數 n 的"自然數"。

再如無窮小數 (infinitesimal), 遠在古希臘時就曾在推導一些結果裡用無窮小作爲工具, 但是由於有些缺陷, 所以後來就排除了無窮小, 因此在有的 Euclidean 幾何書裡寫

了和推導定理毫不相干的話, "點無大小"。因爲點若有大小, 就出現了無窮小量。

可是微積分發展的初期人們又使用了無窮小量來進行推導。例如求自由落體下落一秒鐘後的速度時是這樣進行的。速度 v 等於

$$\begin{aligned}\frac{\Delta s}{\Delta t} &= \frac{\frac{1}{2}g(1+\Delta t)^2-\frac{1}{2}g\cdot 1^2}{\Delta t}\\ &= \frac{1}{2}g\frac{1+2\cdot\Delta t+\Delta t^2-1}{\Delta t}\\ &= \frac{1}{2}g\frac{2\Delta t+\Delta t^2}{\Delta t}\\ &= \frac{1}{2}g(2+\Delta t)\\ &= g+\frac{1}{2}g\Delta t。\end{aligned}$$

讓 Δt 爲 0 得到速度 v 爲 g。這結果是對的, 但是當把 Δt 作爲分母時 Δt 應該不等於 0, 但是最後又令 $\Delta t=0$ 而得到結果。那麼 Δt 到底値是 0 還是一個非 0 的數? 爲排除這種矛盾, 人們使用了 ε-δ語言, 排除了無窮小, 得到了正確的推導方法, 形成了標準的實數理論。後來數理邏輯學家使用緊緻性定理又論證了無窮小量的存在性。例如我們取公式集 S 由實數理論的公理及如下集合中的元素組成:

$$\{0<x<\frac{1}{2}, 0<x<\frac{1}{3}, \cdots, 0<x<\frac{1}{n}, \cdots\}$$

對 S 的任意有窮子集, 如集 S_i:

$$\{0<x<\frac{1}{n_0}, \ldots, 0<x<\frac{1}{n_i}\}$$

取 $x=\frac{1}{\max\{n_0,\ldots,n_i)+1}$, 則 S_i 中一切句子爲眞。對整個集 S 有一個統一的模型在其中有大於 0 而小於一切 $\frac{1}{n}$ 的 x 存在, 即無窮小量的存在。由此而可以產生帶有無窮小量在內的非標準實數理論。非標準模型和標準模型的並存也說明了語法和語義的相對獨立性。

數理邏輯裡還有個 Löwenhim-Skolem 定理。這定理說一個在謂詞演算上建立的形式理論如果有模型, 則有可數模型。因此 ZF 集合論也有可數模型, 記爲 M。這樣 M 之中只能有可數集合。但是 ZF 集合論裡有個定理說, 存在不可數集 x。這看起來似乎有個矛盾。其實沒有, 因爲什麼叫可數集, 即有一個一一函數把它和自然數集建立一一對應。x 在 M 中是不可數, 因爲在 M 中不存在把 x 和自然數集建立一一對應的函數。但是在 M 之外有這樣函數。因此 x 在 M 裡看起來是不可數集, 而在 M 外看起來卻是可數的。這個看起來似乎有矛盾的事情, 其實並無矛盾。人們稱它是 Skolem 佯謬。因此語義方面會出現很奇怪的現象。

今天除了數理邏輯外還有其他專業裡也出現了形式語言。我們在開始時就講到了計算機用的形式語言。這些形式語言裡也出現許多問題要加以解決。例如有人把某個形式語言加以擴充, 那麼當加入了新的東西後要考慮新建立的形式語言是否是協調的, 新加進的東西會不會和原有的內容產生矛盾。另外數學裡的模型概念用到計算機的形式語言後會產生困難。需要用新的方法構造模型。例如爲保證遞歸域方程的解的存在性而建立了域理論 (Domnin Theory)。

現在計算機工作者可以借鑒數理邏輯裡有關形式語言的結果來解決本領域裡產生的有關形式語言的問題。

—本文作者任職於北京中國科學院軟件研究所—