

# 數學哲學的內容和意義

鄭毓信

什麼是數學哲學？什麼又是數學哲學研究的基本意義？這顯然是數學哲學研究的二個基本問題，並事實上關係到了數學哲學的研究方向或途徑。本文將分別圍繞數學哲學的歷史發展和數學哲學的現實意義對此作出簡要的分析。

## 一．什麼是數學哲學？

“什麼是數學哲學？”這無疑是數學哲學研究最爲基本的一個問題。儘管數學哲學這一學科在世界上建立已久，而且，即使在中國，這也不再是一個陌生的名詞；然而，就數學哲學研究的現實情況進行分析，可以看出，有不少不能令人滿意的地方其根源仍應追溯到對於上述基本問題的模糊或錯誤認識。

具體地說，我們在此可以首先考慮以下的問題：

一些專業的數學工作者、甚至是著名的數學家，他們平時的一些哲學言論、或者是對於自己數學工作較爲自覺的哲學反思，能否就說是數學哲學？

應當肯定，這些言論、特別是著名數學家對於自己工作自覺的哲學反思，無論對於數學哲學或是新的數學研究都具有十分重要

的意義；然而，作爲上述問題的明確回答，我們則又應當說，這種言論或分析不應被等同於數學哲學，或者說，它們不應被看成數學哲學的主要內容，因爲，即如任何一門科學的理論，數學哲學也具有自己特殊的研究問題，從而，數學哲學的基本內容就具有相對的穩定性，即是圍繞這些基本問題展開的，而不能被等同於個人隨意的哲學遐想或反思。

例如，從歷史的角度看，數學對象的實在性問題（本體論問題）和數學的眞理性問題（認識論問題）可以被看成數學哲學研究的兩個基本問題；而除去一般哲學的影響外，這在很大程度上又是由數學本身的特殊性所決定的：由於數學的抽象性，因此，數學對象就並非經驗世界中的客觀存在，然而，在數學中我們所從事的又顯然是一種客觀的研究，從而，我們就必須對數學對象的實在性問題作出明確的解答；另外，由於數學是演繹地展開的，因此，如果我們能對數學公理的眞理性作出合理的說明，數學似乎就可以被看成先驗論的“最堅固堡壘”，但是，我們又應怎樣去解釋數學在現實世界中的成功應用呢——當然，我們在此不能僅限於斷言這是一個“不可思議的謎”，而必須從根本上對數學的眞理

性、特別是數學的認識論問題作出深入的分析。

也就是圍繞上述的基本問題，從古希臘的時代起，在數學哲學的範圍內就形成了“柏拉圖主義”和“唯名論”、以及“先驗論”和“經驗論”等對立的觀點，這種對立並一直延伸到了今天。

其次，作為對於“什麼是數學哲學？”的具體分析，我們又應強調指出，與其它科學的理論一樣，數學哲學也有一個歷史發展過程，從而，其基本內容就不應被看成絕對不變的。

例如，就早期的數學哲學研究而言，主要是作為一般哲學研究的一個部分得到了發展；然而，從十九世紀中期開始，數學哲學則進入了一個以數學基礎研究為中心的新的不同時期，而其基本問題就在於：如何為數學奠定一個可靠的基礎，並借助於可靠的方法去開展(重建)出全部或大部分的數學，從而徹底地解決數學的可靠性問題。

對於基礎問題的重視在本質上也是由數學本身的特性所決定的。事實上，在數學中歷來存在有兩種不同方向的研究：一是由已有的數學去發展、構造出新的、更為複雜的結論和理論；另一則是研究已有的數學可以以何種更為一般的概念和原理作為基礎而得到建立。顯然，公理化方法在數學中的普遍採用即是與後一方向上的研究直接相聯繫的。另外，以下的一些實際發展則又構成了數學基礎研究的特殊的“歷史背景”：分析(微積分理論)的嚴格化，非歐幾何的建立，悖論的發現。

由於各自觀點的不同，在基礎研究中形成了邏輯主義、直覺主義和形式主義等不同

的學派。這些學派的一個共同特點是“哲學分析與數學工作”的密切結合：依據各自的哲學主張，他們分別提出了自己的基礎研究規劃，並希望通過這些規劃的實施(這主要是一種數學工作)來證明自己的哲學觀點的正確性。這樣，就數學哲學的研究而言，在1890至1940年之間就出現了一個“百花齊放”、欣欣向榮的“黃金時代”。(關於數學基礎研究可參見夏基松、鄭毓信：《西方數學哲學》，人民出版社，1986年。)

然而，數學哲學以基礎研究為中心的時代現在也已過去了。這不僅是因為邏輯主義等學派的基礎研究規劃都未能取得成功，而且也是因為這種“失敗”及隨之而出現的發展的停頓引起了關於應當如何去從事數學哲學研究的新的思考：“數學哲學往何處去？”

對於數學哲學的現代發展可參見本期另文“數學哲學現代發展概述”。

綜上可見，數學哲學具有自己特殊的研究問題，從而就不應被等同於各種片斷的見解；另外，又正是通過研究問題的解決和轉移，數學哲學獲得了自己的歷史發展，從而我們也就不應對此持絕對的、僵化的觀點。

## 二．數學哲學研究的基本意義

作為一般哲學、特別是科學哲學的一個重要組成部分，數學哲學顯然有著一定的理論意義，或者說，具有作為獨立學科存在的必要性；然而，筆者在此所關心的主要是數學哲學的實際意義。這即是指：除去專門的研究家外，誰最需要數學哲學？

顯然，作為可能的解答，我們可以分別列舉出哲學家、數學家和數學教師。

的確，從歷史的角度看，數學哲學可以被認為對於一般哲學、特別是認識論研究有著特殊的重要性。事實上，在很長時期內，數學被認為是唯一的真理，從而就為相應的哲學思考提供了必要的立足點。這就正如 M. 克萊因所指出的：“在各種哲學系統紛紛瓦解、神學上的信念受人懷疑以及倫理道德變化無常的情況下，數學是唯一被大家公認的真理體系。數學知識是確定無疑的，它給人們在沼澤地上提供了一個穩妥的立足點。”（《古今數學思想》，上海科學技術出版社，1979年，第一冊，第251頁。）例如，正是以數學為典範，笛卡兒發展起了自己的理性主義方法論；另外，也就是基於關於“純數學何以可能？”的分析，康德提出了自己的先驗主義的認識論。一般地說，正如前面所已提及的，數學往往被認為是先驗論的最堅固堡壘，從而，數學的真理問題也就成了經驗主義所必須認真對待的一個難題。即如休謨關於兩類命題的區分；這一立場並一直延續到了現代的邏輯實證主義。

但是，在邏輯實證主義以後，數學與哲學的這種密切聯繫開始變得疏遠起來。特別是，現代的哲學大師們對於數學已經不那麼熟悉了。對於造成這種現象的原因可以從各個角度去進行分析：即如現代數學已經變得過分專門化、從而對於非專門家來說是過於深奧了；或是因為另有更重要的問題吸引了哲學家的注意；等等。但是，無論最終的原因是什麼，這已表明了這樣一個事實，即數學在現代的哲學研究中已不再占有特別重要的地位。

其次，數學哲學能否說對於實際的數學研究工作有著重要的指導意義？應當肯定：數學家的研究工作必定處在一定哲學觀念、特別是數學哲學觀念的指導或影響之下；但是，現在的問題卻在於，一個成熟的數學工作者往往已經形成了固定的觀念——儘管這可能只是一些素樸的觀念，但由於這些是與其研究活動密切相關、並就是在這種實踐活動逐漸地（並且常常是不知不覺地）形成的，因此，他們通常就感受不到有必要對此進行系統學習和反思、以期達到由不自覺向自覺狀態的轉化和必要的更新。事實上，除個人的特殊與趣外，大部分數學家在自己的工作生涯中主要地都是集中於專業研究，而根本無暇從事系統的哲學思考，從而也就談不上對於數學哲學的迫切需要。另外，從整體上說，作為數學的哲學分析，數學哲學相對於數學本身而言在發展上必然表現出一定的滯後性，從而，對一個處在自己學科前沿的數學家來說，數學哲學也就往往會顯得過於陳舊落後。（當然，筆者在此並不是要完全否定數學哲學對於實際數學活動的促進作用，而只是認為這種作用往往是以一種較為間接的形式體現出來的。對此可見以下的討論。）

那麼，數學哲學是否對於任何人來說都是不必要的呢？不！筆者認為，對於廣大的數學教師來說，我們就應作出肯定的答覆。

具體地說，與數學家的研究活動一樣，各種層次上的數學教師的教學工作也都處於其哲學觀念、特別是數學哲學觀念的指導或影響之下；然而，這種教學活動則又不僅反映了教師本身的觀念，而且也直接影響到了新的

年輕一代的數學觀念的形成——正是在後一意義上，我們即應明確肯定數學哲學對於數學教師特殊的重要性。

爲了清楚地說明問題，在此可以借助道德教育的例子來進行分析。如衆所知，正常人的行動都是在一定的道德規範指導下進行的。然而，儘管道德教育對任何人來說都有一定的意義，但又只是對於年輕人來說才是特別重要的，因爲，他們尚未形成固定的道德規範，而這一旦形成，則又將對其整個人生產生十分重要的影響；與此相反，成年人則往往不能感到對自己的道德規範進行自覺反省的必要性，另外，這也是一個無可否認的事實，即要改變一個人所已形成的道德規範是十分困難的。

進而，上述的比喻同時也表明了這樣一點：正如教師的日常言行往往對於學生道德觀念的形成有著十分重要的影響（這就是通常所說的“身教重於言教”），學生往往也就是在教師的影響下逐步地形成了自己的數學觀念。例如，正如 G. 波利亞所指出的：“有一條絕對無誤的教學法——假如教師厭煩他的課題，那麼，整個班級也將毫無例外地厭煩它。”（《數學的發現》，內蒙古人民社，1982年，第二冊，第174頁。）

由此，從教育的角度看，我們就應充分肯定數學哲學對於數學教育的重要性；進而，

考慮到素樸的哲學觀念往往是片面或膚淺的；我們則又應當說，首要的任務就是應幫助廣大的數學教師通過數學哲學的學習建立起正確的數學觀。

值得指出的是，就數學教育的現代發展來說，我們已經看到數學哲學、特別是數學哲學現代發展的重要影響。例如，數學觀的現代演變，即由靜態的數學觀向動態的數學觀的過渡，就是現代數學教育中突出強調“問題解決”的重要原因之一。一般地說，這就如同美國著名數學教育家倫伯格（T. Romberg）所指出的：“兩千多年來，數學一直被認爲是與人類的活動和價值觀念無關的無可懷疑的真理的集合。這一觀念現在遭到了越來越多的數學哲學家的挑戰，他們認爲數學是可錯的、變化的，並和其它知識一樣都是人類創造性的產物。……這種動態的數學觀具有重要的教育涵義。”（可參見另文“數學哲學、數學教育與數學教育哲學”，載《哲學與文化》[台灣]，1992年，第十期。）

在筆者看來，以數學教育爲“中介”，數學哲學最終也將對數學的未來發展產生重要和深遠的影響，從而，這也就更爲清楚和全面地表明了數學哲學的意義。

——本文作者任教於南京大學哲學系——