# 模糊理論簡介

楊敏生

自從扎德 (L.A. Zadeh) 教授於 1965 年提出模糊集合 (Fuzzy Sets)(參考文獻 [1]) 至今已近 30 年了。從模糊理論發展初期所受到的冷嘲熱諷、排斥、辯解等, 直到今日的開花結果, 雖是短短 30 年 (相對於其他傳統科學的發展), 卻值得我們去作一回顧。筆者想借本文來對模糊理論的基本理念及思想作一簡介並回顧其發展過程以及應用價值。

記得大約八年前筆者在美國攻讀博士學位期間, 第一次聽到模糊 (Fuzzy) 的名詞時, 著實對它是“模糊不清”, 只知道其簡單定義, 也知道它被用來表示不確定性 (uncertainty)。我本身是研究統計的, 統計不就是在探討不確定性嗎? 而統計上的不確定性正就是機率所表達的隨機性 (randomness), 我實在好奇到底什麼是模糊理論所表達的不確定性, 因此開始嘗試去了解探究它, 終於體認到兩者所代表的不確定性確實有所不同, 這使我產生極大的震撼與衝擊, 本來一直認爲隨機性就是不確定性的唯一現象, 現在我更看到不確定性的另一種現象, 即是所謂的模糊性 (fuzziness)。簡單地說, 機率上的隨機性是代表著發生的不確定, 此經由機率測度函數 (probability measure function) 來表示; 而模糊理論所描述的模糊性乃是隸屬程度上的不確定, 此借由隸屬函數 (membership function) 來表達。

十幾年前, 知名的貝氏 (Bayesian) 學者 Lindley 曾極度地爲機率及貝氏理論作闡釋, 他在一篇非常獨到且漂亮的論文 (參考文獻 [2]) 中下結論說, 機率上的隨機性是表達不確定性唯一的一條路, 他提到, 模糊性是多餘且不必要的。但是如果我們小心去看他在論文的論證與描述中, 卻是建立在可加性 (additivity) 的限制上, 此可加性乃是機率測度函數上非常重要的條件。我們是否曾經問過, 難道我們眞的非生活在此限制下不可嗎? 是否存在著不確定現象是在可加性的限制以外的呢? 現在就用下面簡單的例子來說明。假若我們用美與不美來表達我們對一個人外觀的感受, 以機率的角度來描述, 若我們認定此人是美的機率爲 0.4, 則此人被認爲不美的機率應該就是 0.6 了。你是否覺得這樣的描述很怪異。我想我們若認爲此人屬於美是 0.4, 則我們也可能認爲此人屬於不美也是 0.4 而不必定是 0.6。這個現象是爲什麼呢? 原因就是美與不美的認定不應該是可加性的, 也不合適用機率的特性來描述。事實

上, 美與不美往往是個人的感覺與認定, 很難有明確的定義, 其本身就具有模糊特性。總言之, 若我們放寬可加性, 則不確定性的領域就豐富了, 其表達方式也更寬廣, 這正是模糊理論的實際價值。事實上, 機率論與模糊理論正可相輔相成, 而使不確定性的領域加大, 表達也更加完備了。下面再舉一例說明。若有一人被介紹與異性朋友見面, 在未見面前當然不知道是不是美 (或帥), 這種不確定就是隨機性的, 因爲還沒有發生 (見面) 所以不能確定, 但是往往見面後, 仍舊無法確定到底是美還是不美, 或則說是“說不上來吧”, 此時的不確定就是模糊性, 因爲美 (或帥) 本身的定義就是模糊的, 甚至於若是美 (或帥), 可能還會問到底有多美 (或多帥)。換言之, 美也有程度的差別, 例如“還算美”, “很美”, “美若天仙”等。雖然看來隨機性與模糊性有明顯的不同, 而且可相輔相成, 但是一個新的理論提出時, 總是避免不了不同見解的辨論與溝通 (參考文獻 [2], [3], [4], [5]等)。

模糊理論到今天爲何會被廣泛地研究且成功地應用在多種領域上, 我將其歸納爲兩點, 一是其簡單性, 另一是它帶動了人類科學思想的革新。到底什麼是扎德教授所定義的模糊集合, 我們就從傳統的集合論及二值邏輯思想談起。傳統集合論這樣描述, 從全集 $X$ 上任意給定一個元素 $x$ 及任意一個子集合 $A$, 則元素 $x$ 與子集合 $A$ 之間的關係就是, 要麼 $x$ 屬於 $A$ (即 $x \in A$), 不然就是 $x$ 不屬於 $A$ (即 $x \notin A$), 二者只其一且僅有其一成立, 基於這種基本關係, 集合上的包含 ($\subseteq$)、聯集 ($\cup$)、交集 ($\cap$)、補集 ($\sim$) 以及有名的 De-Morgan 定律等等就構成一套完整的理論架構。我們也可以將 $x \in A$ 及 $x \notin A$ 對等地 (equivalently) 用數學上的特徵函數 $I_A$ 來表示: 若 $x \in A$ 則 $I_A(x) = 1$; 若 $x \notin A$ 則 $I_A(x) = 0$, 也就是只有“0”或“1”兩種狀況。由傳統的集合論發展出二值邏輯理論, 進而開發了數位電腦。二值邏輯思想, 使得科學建立明確且精確的研究與發展, 更是帶動了整個科技的蓬勃發展, 笛卡兒的方法論加上二值邏輯架構出明確分析及客觀手法的科學方法。我們知道笛卡兒的“我思故我在”乃是道地的客觀理性主義, 以「理性與物質」爲中心的思想, 相對比的, 後來巴斯噶 (Blaise Pascal) 提出了主觀內在性主義, 而以「情感與精神」爲中心。笛卡兒建立了全然確定性 (客觀、理性) 的思想體系, 直到巴斯噶時開始處理不確定性 (主觀、內在) 的體系, 這也是機率論的最早雛型。由於笛卡兒的方法論著重以物質爲中心, 且相當成功, 致使巴斯噶的不確定性思想, 也漸漸發展成以物質爲中心導向, 也就特別著重於機率的不確定性。近來由於人類對資訊的需求與體認, 資訊與人類的關係更形緊密, 使得科學研究開始注意到以人爲導向, 人類本身的個體性, 主觀及情感世界的不確定性開始再被注意, 這種不確定性往往不是隨機性所涵蓋的, 反而以模糊性來表達會更爲得體, 到底應如何使用明確且不模糊的數學方式來表達建立所存在的模糊特性呢? 扎德教授簡單地將具有 0 及 1 兩個值的特徵函數 $I_A(x)$ 擴展成 [0,1] 區間連續值函數 $\mu_A(x)$, 即對 $x \in X, \mu_A(x) \in [0,1]$, 而稱此函數爲隸屬

函數 (membership function), 隸屬函數的值正可表示元素 $x$ 隸屬於集合 $A$ 的程度, 如此一來, 就可將介於"是"與"不是"之間的所有"中庸"之值表示出來, 換言之, 從是到不是之中介過渡沒有明確的概念都可被隸屬函數表示出來, 中介過渡沒有明確的概念不就是模糊概念嗎? 因此這理論也就稱爲模糊理論, 其目的就是使用明確且嚴緊的數學方法來刻劃描述模糊的現象。在人類語言中到處可看到模糊特性, 如扎德所給的例子 (參考文獻 [6]), 年老, 非常老及年輕等都是模糊集合, 他以年齡爲全集 $X$, 並給於年老, 非常老及年輕的隸屬函數如下:

$$\mu_{\text{年老}}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 50 \\ (1 + (\frac{x-50}{5})^{-2})^{-1}, & 50 < x \le 100, \end{cases}$$

$$\mu_{\text{非常老}}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 50 \\ (1 + (\frac{x-50}{5})^{-2})^{-2}, & 50 < x \le 100 \end{cases}$$

$$\mu_{\text{年輕}}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 25 \\ (1 + (\frac{x-25}{5})^{2})^{-1}, & 25 < x \le 100. \end{cases}$$

因此隸屬函數就完全刻劃出模糊集合, 就如 $\mu_{\text{年輕}}$ 表達了年輕這個模糊集合的意思。當然隸屬函數有時是一種主觀的認定, 有時也可由客觀的實驗 (或經驗) 得來。從上面的討論, 我們清楚看到模糊集合完全擴張了傳統的集合論, 其媒介由隸屬函數來刻劃。如此一來, 相對應的集合運算如聯集 ($\cup$), 交集 ($\cap$) 及補集 ($\sim$) 等等的運算, 在模糊集合論中自然就應運而生, 其定義如下: 若 $\underset{\sim}{A} = \{(x, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)) | x \in X\}$ 及 $\underset{\sim}{B} = \{(x, \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)) | x \in X\}$ 爲兩個模糊集合, 則

(1) $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \{(x, \mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x)) | x \in X\}$, 此時 $\mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}}(x) = \min\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\}$。

(2) $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \{(x, \mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x)) | x \in X\}$, 此時 $\mu_{\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}}(x) = \max\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\}$。

(3) $\sim \underset{\sim}{A} = \{(x, \mu_{\sim \underset{\sim}{A}}(x)) | x \in X\}$, 此時 $\mu_{\sim \underset{\sim}{A}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$。

當然還有其他各式各樣的運算與性質, 可參考文獻 [1] 及 [7]。

基於模糊集合的架構理念, 扎德於 1978 年再度提出"可能性分配"的概念 (參考文獻 [8]), 其理念與機率分配函數的想法相似, 由此而產生一系列的理論, 稱之爲"可能性理論"(參考文獻 [9]), 此理論背後思想與自然語言所傳達的信息有著密切的關係, 算是模糊理論的一部份。

從上面的描述, 我們看到模糊理論在數學上的表達與建立並非創見, 不複雜也不稀奇, 但是在理念上卻是革命性的科學思想與方法。傳統科學"精益求精", "精打細算", 這使得技術越來越準確, 也越來越高超, 但是倒也越來越遠離了模糊現象, 使得模糊現象成爲科學研究的死角, 不僅摸不著, 更是格格不入。模糊理論將科學研究與方法帶進此禁區, 使得原本確定、精準的仍歸於確定與精準, 但

是本身具有模糊特質的卻也能還其模糊本色, 使得模糊現象本身所蘊函的資訊能夠全然地被擷取。另一方面, 模糊理論也軟化了人機介面, 使得人機之間的溝通與關係更形密切, 機器不再是"硬繃繃"且"冰冷無情", 它更能了解人類語言及感受, 使得人工智慧及類神經網路得到更合理的解決。

模糊理論從最早十年間的理論發展到後來各式各樣的應用, 從分類 (參考文獻 [10], [11], [12])、控制 (參考文獻 [13], [14], [15])、數學規劃 (參考文獻 [16], [17], [18]) 等, 到最近熱門的類神經網路 (參考文獻 [19], [20], [21]) 等等的應用, 可說是五花八門, 其中有很多成功的例子, 當然也有不少是假借模糊之名變花樣的, 眞希望這些花樣不要使人越來越模糊, 越來越糊塗才好。目前市面上各種家電產品所標榜的 Neuro & Fuzzy, 雖然有些是言過其實, 但是不可否認的, 模糊理論不只是理論, 更是實用的標誌。盼望它將帶給人類更多的益處, 更能將科學的研究與方法眞正帶入人類內在與精神的世界中。若是你想更進一步了解模糊理論及其應用, 可參考下列文獻: Zimmermann [7], Klir and Folger [22], Kosko [20, 23], 汪培庄 [24] 及向殿政男 [25]。

## 參考文獻

1. L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control 8, 338-353 (1965).
2. D. V. Lindley, Scoring rules and the inevitability of probability, International Statistical Review 50, 1-26 (1982).
3. A. Kandel and W. Byatt, Fuzzy sets, fuzzy algebra, and fuzzy statistics, Proceedings of the IEEE 66(12), 1619-1639 (1978).
4. M. Tribus, Comments on "fuzzy sets, fuzzy algebra and fuzzy statistics", Proceedings of the IEEE 67 (8), 1168-1169 (1979).
5. B. Kosko, Fuzziness vs. probability, Int. J. of General Systems 17 (2), 211-240 (1990).
6. L. A. Zadeh, Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision process, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. 3 (1), 28-44 (1973).
7. H.-J. Zimmermann, Fuzzy Set Theory and Its Applications, Kluwer Aca- demic, Dordrecht (1991).
8. L. A. Zadeh, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems 1, 3-28 (1978).
9. D. Dubois and H. Prade, Possibility Theory, Plenum Press, New York (1988).
10. R. Bellman, R. Kalaba and L.A. Zadeh, Abstraction and pattern classification, J. Math. Anal. Appl. 2, 581-586 (1966).
11. M. S. Yang, On a class of fuzzy classification maximum likelihood procedures, Fuzzy Sets and Systems 57, 365-375 (1993).
12. M. S. Yang, A survey of fuzzy clustering, Mathematical and Computer modelling 18(11), 1-16 (1993).
13. E. H. Mamdani and S. Assilian, An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller, Int. J. Man-Machine Studies 7, 1-13 (1975).

14. M. Sugeno, An introductory survey of fuzzy control, Information Science 36, 59-83 (1985).
15. J. J. Buckley, Theory of the fuzzy controller: an introduction, Fuzzy Sets and Systems 51, 249-258 (1992).
16. H. -J. Zimmermann, Description and optimization of fuzzy system, Int. J. of General Systems 2, 209-215 (1976).
17. C. V. Negoita, The current interest in fuzzy optimization, Fuzzy Sets and Systems 6, 261-269 (1981).
18. R. Fullér and H. -J. Zimmermann, Fuzzy reasoning for solving fuzzy mathematical programming problems, Fuzzy Sets and Systems 60, 121-133 (1993).
19. J.M. Keller, R.R. Yager and H. Tahani, Neural network implementation of fuzzy logic, Fuzzy Sets and Systems 45, 1-12 (1992).
20. B. Kosko, Neural Networks and Fuzzy Systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1992).
21. J. J. Buckley, Y. Hayashi and E. Czogala, On the equivalence of neural nets and fuzzy expert systems, Fuzzy Sets and Systems 53, 129-134 (1993).
22. G. J. Klir and T. A. Folger, Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information, Pren- tice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1988).
23. B. Kosko, Fuzzy Thinking: The New Science of Fuzzy Logic, Hyperion, New York(1992).
24. 汪培庄著, 模糊集合論及其應用, 中國生產力中心出版, 中華民國七十九年。
25. 向殿政男著, 劉天祥, 佟中仁合譯, FUZZY 理論入門, 中國生產力中心出版, 中華民國八十一年。

—本文作者任教於中原大學數學系—