數學與眞理

董世平

數學與眞理

「沒有眞理」這似乎已是一般人心中所認定的事實, 但眞的「沒有眞理」嗎? 由簡單的邏輯推論可知「沒有眞理」不是眞理, 因「沒有眞理!」若是眞理, 則自相矛盾, 故「沒有眞理」不是眞理, 結論是有眞理。那麼什麼是眞理呢? 本文主要的目的, 即在論證人類對數學的知識是眞理的部份。

數學的普世性

我們對眞理最基本的要求就是普世性, 即眞理不會因人、因地、因時而改變, 從某一方面說, 這一點亦是數學與其他的科學最不同的地方, 正如十九世紀的數學家韓柯爾 (Hermann Hankel) 所說的「對於大多數的科學, 這一代拆除上一代的建樹, 而這一代所建樹的, 同樣也被下一代所拆除, 唯獨數學不然, 每一代都在已有的建構上建設新的一層。」(註一), 對於韓柯爾論及其他科學的那段話, 可能有人不盡同意, 但是極大多數的數學家們, 都會同意他論到有關數學的部份。

我們以「質數有無窮多個」這個定理爲例, 距今已超過 2000 年前的希臘數學家歐基里德已證明了這個定理, 你若將質數一個個排列下去, 將永遠排不完, 換句話說, 給任意一個數 N, 一定有質數比 N 大, 我們可能有這個經驗就是看到報紙或某個地方登載: 某某數學家找到了最大的質數 $\cdots$, 不必以爲又有一個所謂的眞理被推翻了, 那只是記者等人不懂數學才如此報導, 正確的說法是: 某某數學家找到了現在所知的最大質數 $\cdots$, 你若有興趣, 再加上能力和電腦, 你可以再去找一個更大的質數, 這個工作可以永遠做下去。

因歐基里德證明相當簡潔我們將它寫出來。

假設質數只有有限多個, 我們可將所有的質數按著大小 $2, 3, 5, 7, \ldots, P_m$ 全部寫下來, 現在令 $N = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot P_m+1$ 爲所有質數的乘積加 1, 很明顯 N 一定大於最大的質數 P_m, 現在 N 有兩種可能, N 是質數, 或者 N 不是質數, 我們先證 N 不可能是質數。若 N 是質數, 則 N 應列在 $2, 3, 5\cdots, P_m$ 之間, 但 N 大於 P_m, 此爲矛盾, 故 N 不是質數, 但這也會得到矛盾, 因 N 不是質數, 則 N 可分解成質因數的乘積, 但它的質因數亦不可能列在 $2, 3, 5, \cdots, P_m$ 之中, 因這些數除 N 皆餘 1, 不是它的因數, 所以我們亦

有一些質數沒有被列出來, 此亦爲矛盾。不論 N 是否爲質數都爲矛盾, 乃是因爲我們一開始的假設: 質數只有有限多個是錯誤的, 所以質數有無窮多個。

質數有無窮多個, 2000 多年前被歐基里德證明後, 這個事實在2000年後的此地亦是如此, 再過兩千年到月球上, 人還是無法將所有的質數都列出來, 這就是數學的普遍性。

在註一所引述的「數學眞理會隨時間改變嗎?」這篇文章的結論說: 「數學或許是永恆的, 但是我們對它的所知並不是, 我們現在看到了一個對數學眞理的態度隨時間改變的實例。」, 粗看似乎與我們所說的並不相合, 我們來看看爲什麼會有這樣的差異, 上文所說的實例, 主要是指十八世紀許多微積分的定理, 到十九世紀才給予「嚴謹」的證明, 而在十八世紀卻已被接受, 這並不是我們所說數學眞理的改變, 的確, 證明是會錯誤的, 因而導致認識的錯誤, 但若發現錯誤, 進而得到正確的證明, 正確的認識也就被建立了。

何謂正確或嚴謹的證明, 這的確隨時代而有不同, 上面歐基里德的證明, 現今來看並不夠嚴謹, 因爲用了「算術基本定理」, 即任一個數必可分解成質數的乘積, 我們必須先能證明算術基本定理, 歐基里德的證明才能說嚴謹, 如此一步步的往回推, 我們會碰到所謂的公理或公設, 因任何的演繹系統必從公理或公設出發, 在數論中最常用的系統就是皮亞諾公設, 我們也許會問我們現在所謂嚴謹的證明, 將來是否也會被認爲不夠嚴謹呢? 答案是不會。符號邏輯發展的一個主要的原因, 即是在證明過程中, 除掉任何個人的因素, 懷海德和羅素花了許多的工夫, 所寫的「數學原理」最主要的貢獻, 即在於表明數學可以完全用符號和邏輯建構出來, 所以當書完成, 工作也完成了, 這就是爲什麼「數學原理」影響甚大, 但卻沒有人會好好看它的原因, 我國邏輯家王浩得到第一屆的人工智慧里程碑獎, 即在於他在 1950 年代, 用電腦證明了「數學原理」一開始所有的定理。現在數學家們所寫的證明, 若有必要都可以用來電腦檢查, 這其中是否有漏洞? 是否有用到未證明的假設? 所以我們可以不必再顧慮到證明是否不夠嚴謹, 若出問題, 問題在於一開始的公理系統。

皮亞諾公設是否對算數爲「眞」呢?

戈德爾不完備定理的結果之一就是對皮亞諾公設我們必須藉著「外在」的證據「相信」它是眞的 (請參閱註二), 在我們還沒討論皮亞諾公設之前, 也許有人會想到歐基里德幾何的前例, 歐基里德幾何有極長的時間被認爲是「眞」, 即我們所處的空間是滿足歐基里德公設的, 而現今卻認爲這樣的想法是錯的, 在此我們有些說明, 第一、數學家們並未宣稱第五公設, 即造成問題的平行公設,「過直線外一點只有一條直線與此線平行」, 是被證明了, 而事實上, 數學家們一直想要證明平行公設, 直到後來才逐漸體會到可能無法證明平行公設, 而因此導出了所謂的非歐幾何。那麼歐基里德幾何到底是不是眞的? 或是更準確的說法, 空間是否滿足平行公設呢? 對此, 我們必須做非常非常準確的測量來做決定, 我們可以如此說, 空間即使是非歐的, 歐基里德幾何與空間的差距也是非常小, 在應用上歐基里德幾何仍是一個非常好的工具。

回到原來的問題, 皮亞諾公設對算數是否爲眞呢? 這裡面較多人討論的就是數學歸納法, 首先對算數我們不須要考慮所謂的誤差的問題, 因爲自然數是離散的, 也就是一般所說的 1 是 1, 2 是 2, 我們並不須要用測量來決定它的性質, 也就不會有測量誤差了, 所以也就不會有歐基里德幾何所遇到的問題, 按照戈德爾不完備定理我們是無法用有限的方法來決定數學歸納法爲眞, 因爲它所涵蓋的是所有的自然數, 若我們所討論的只是某一個特定數時, 我們並不須要用數學歸納法, 例如算術基本定理的證明須用到數學歸納法, 因要證明「每個數」必可分解成質數的乘積, 但對任一個給定的數, 如 12345678910, 我們要證明它可分解成質數的乘積時, 我們並不須要用數學歸納法, 數學歸納法的精神在於用一個固定的方法, 對任一個給定的數皆可證明爲眞, 也就結論爲對每一個自然數都是對的。接受這樣的結論是須要信心, 因從有限跳到無限, 但說這個結論是錯的, 須要更大的信心, 因爲找不到任何的反例說它是錯的。

數學的合一性

數學是眞理的另一個證據在於它的合一性, 此處所講的合一性是指數學各領域彼此不僅不會相互矛盾, 更互相支援配合, 我用另一個有關質數有名的定理, 即質數定理, 來說明這件事。

質數它的出現似乎是毫無規則的, 除了 2 以外所有的質數都是奇數, 所以除了 2 與 3 以外, 任兩個質數的差必定大於等於 2, 我們是有質數差爲 2 的, 如 (3,5), (5,7), (11,13), $\cdots$ (10006427, 10006429), $\cdots$, 被稱爲雙生質數, 雙生質數是否爲無限多? 這是個由希臘一直留到現在仍無法解決的問題, 由此似乎可見我們無法掌握質數出現的規則, 又例如從 9999900 至 10000000 之間有 9 個質數, 但 10000000 至 10000100 之間只有兩個質數, 若不去查質數表, 大概沒有人知道再下面的 100 個數之中會有幾個質數? 質數的出現眞的是毫無規則嗎? 高斯可能在他 15 歲 (1792 年) 時發現質數的出現是有個規則的。令函數 $\pi(x)$ 爲小於 x 質數的個數, 小於 20 的質數爲 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 所以 $\pi(20) = 8$。高斯所發現的規則即質數定理爲

$$\lim_{n\to\infty} \pi(n)/(n/\ln(n)) = 1$$

即當 n 很大時 $\pi(n)$ 和 $n/\ln n$ 的比值趨近於 1, 當我們看這個定理時, 實在不容易相信它會是眞的, 而且能被證明。關於對數函數人們一開始研究的著眼點在於它有

$$\ln(m \cdot n) = \ln(m) + \ln(n)$$

將乘法變爲加法的性質, 可節省運算, 若非經過對質數做大量的計算與觀察 (數學實驗?) 實在不容易得到質數定理這個猜測, 一百年後 C. de la Vallee Poussin 與 J. Hadamard 分別證明了這個定理, 他們的證明都是經由複變函數的理論而得到的。質數、對數、複數雖都是數, 但是由不同的原因而分別發展出來的, 但卻彼此相關, 因而得到了質數定理, 我們可對質數的個數做大概的估計。Erdos 和 Selberg 50 年後 (1949) 又分別給質數定理所謂初等證明, 即證明中沒使用任何複數的理論。同一個定理數學家們常能

給幾個完全不同的證明, 並視之爲理所當然。自從質數定理被證明後, 雖然表面上看不出它爲什麼會對, 但不會有任何一個數學家會再想證 $\lim_{n\to\infty} \pi(x)/(n/\ln(n)) \neq 1$, 即因大家都相信數學的合一性。

數學的應用性

數學爲眞理的另一個證據即是數學的應用性, 我們先引用楊振寧院士所舉的例子, 用馬克斯威爾的幾道方程式, 你可以計算電子的磁矩直到小數後 11 位, 結果跟測量完全吻合, 他的結論爲: 我們已用一種不可思議的方法洞悉大自然的結構 (註三)。這裡面的方程式和計算當然脫離不了數學, 數學已成爲我們洞悉大自然的工具。

我們再舉一個例子, 陳省身院士在「我與楊家兩代因緣」這篇文章中有這麼一段話:『一九四五年振寧來美國留學。在他去芝加哥前我們曾在普林斯頓相見。等到我一九四九年夏去芝加哥任教, 振寧在物理系任教員, 時常相會, 一九五四、五五我從芝加哥休假, 去普林斯頓一年, 振寧在彼。我們見面常談學問。很奇怪的楊-米爾斯場論發表於一九五四年, 我的示性類論文發表於一九四六, 而我於一九四九年初在普林斯頓講了一學期的連絡論, 後來印成筆記, 我們竟不知道我們的工作有如此密切的關係。二十年後兩者的重要性漸爲人所了解, 我們才恍然我們所碰到的是同一大象的兩個不同部份』(註四)。

這兩個例子也都回應了 Eugene Wigner 常被引用的一句話「The unreasonable effectiveness of Mathematics」, (數學之不可思議的有效性), 我們一再的遇到這樣的例子, 即物理所要描述的現象, 已被數學的理論表示的清清楚楚了, 數學可說是純粹我們內心心智的工作, 當數學家做數學時, 是按著內心的好奇來尋找問題及答案, 按著邏輯的要求來證明答案, 但數學的結果竟和外在世界觀察的物理是一致的, 我們已把這件事看作當然, 但仔細想想, 我們會得到陳省身院士的結論:「我們才恍然我們所碰到的是同一大象的兩個不同的部份。」, 重點是有而且都摸到了大象。

當愛因斯坦被問到他對科學的態度時, 他回答:「Subtle is the Lord, malicious he is not。」

Pais 於 1982 年出了一本很有名的愛因斯坦的傳記, 書名即爲「Subtle is the Lord $\cdots$」, 愛因斯坦此處所要表示的就是「實在論」的態度。我們所做的科學是眞的, 是實在的, 你可能必須很認眞很努力的去找, 但它是在那裡。由戈德爾不完備定理, 我們可知我們不可能完全知道眞理, 對於眞理我們的認識是會改變, 但這並不是說我們不能知道眞理, 在數學這個領域中, 我們是知道的越來越多, 如質數定理以前不知道, 但現在知道了, 我們知道的越來越清楚, 如質數個數無窮多是建立在數學歸納法的正確上。

在現今這改變急速, 沒有秩序的社會裡, 人們的確會對眞理失去信心, 但做爲一個數學家應該較其他人更有把握眞理是存在的, 當學了一個新的定理時, 他可很確定的說他又多學了一個眞理, 當數學家證明了一個新的定理時, 他是可自豪的說, 人類又多知道一個新的眞理!

參考文獻

1. The American Mathematical Monthly, vol. 99 (1992). No. 6. P. 537。中文翻譯可參考「數學眞理會隨時間改變嗎?」戴久永譯, 數學本質與方法 (一), 數學傳播季刊選輯 (2), P. 98。
2. 戈德爾不完備定理, 董世平, 數學傳播季刊, Vol. 15, No. 4, 82 年 12 月
3. 科學已成新宗教? 比爾, 摩耶士專訪楊振寧博士, 中國時報, 人間, 78 年, 1 月 4 日。
4. 寧拙毋巧, 楊振寧訪談錄, 牛頓出版社。

—本文作者任教於中原大學數學系—