$4k$階全對稱幻方的一種快速構作方法

梁培基

張航輔

1. 引言

在 n 階方陣 $A=(a_{ij})$ 中, 我們分別稱

$$\sum_{j=1}^{n-p} a_{j+p,j}+\sum_{j=n+1-p}^{n} a_{j+p-n,j} \text{ 與 } \sum_{j=1}^{n-p} a_{n+1-p-j,j}+\sum_{j=n+1-p}^{n} a_{2n+1-p-j,j} \quad (p=1,2,\cdots)$$

爲 A 的左與右折斷對角線元素和。

定義: 將連續自然數 $1,2,\cdots,n^2$ 排成一個 n 階方陣, 如果它的每行、每列及每條對角線 (包括折斷對角線) 上n個元素之和均爲定值 $n(n^2+1)/2$, 則稱此方陣爲 n 階全對稱幻方。

2. $4k$階全對稱幻方的快速構作方法

將 $n=4k$ 階方陣 $A=(a_{ij})$ 分成 4×4 個 k 階子方陣

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & | & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & | & A_{23} & A_{24} \\ - & - & + & - & - \\ A_{31} & A_{32} & | & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & | & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}$$

根據下式確定出各子陣中最小元素的值與位置 [下面, 我們用 a_{ij}^{pq} $(p,q=1,2,3,4;\ i,j=$

$1,2,\cdots,k)$ 表示位於子陣 A_{pq} 中第 i 行 j 列處的元素];

$$\begin{array}{ll} a_{11}^{11}=1 & a_{1k}^{31}=n^2+1-a_{1k}^{13}=n^2+1-11k^2 \\ a_{11}^{12}=13k^2+1 & a_{1k}^{32}=n^2+1-a_{1k}^{14}=n^2+1-8k^2 \\ a_{k1}^{13}=10k^2+1 & a_{kk}^{33}=n^2+1-a_{kk}^{11}=n^2+1-k^2 \\ a_{k1}^{14}=7k^2+1 & a_{kk}^{34}=n^2+1-a_{kk}^{12}=n^2+1-14k^2 \\ a_{11}^{21}=11k^2+1 & a_{1k}^{41}=n^2+1-a_{1k}^{23}=n^2+1-2k^2 \\ a_{11}^{22}=6k^2+1 & a_{1k}^{42}=n^2+1-a_{1k}^{24}=n^2+1-13k^2 \\ a_{k1}^{23}=k^2+1 & a_{kk}^{43}=n^2+1-a_{kk}^{21}=n^2+1-12k^2 \\ a_{k1}^{24}=12k^2+1 & a_{kk}^{44}=n^2+1-a_{kk}^{22}=n^2+1-7k^2 \end{array} \tag{1}$$

然後, 按照如下法則, 分別從各子陣中的最小元素出發, 依次遞增1, 塡寫出該子陣中的 k^2 個元素 [下面各 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,k)$ 的下標均爲元素在指定子陣中的行列座標]

在子陣 $A_{11},A_{12},A_{21},A_{22}$ 中, 元素按列的順序

$$a_{11},a_{21},\ldots,a_{k1},a_{12},a_{22},\ldots,a_{k2},\ldots,a_{1k},a_{2k},\ldots,a_{kk}$$

從上至下, 依次遞增 1;

在子陣 $A_{13},A_{14},A_{23},A_{24}$ 中, 元素按列的順序

$$a_{k1},a_{k-1,1},\ldots,a_{11},a_{k2},a_{k-1,2},\ldots,a_{12},\ldots,a_{kk},a_{k-1,k},\ldots,a_{1k}$$

從下至上, 依次遞增 1;

在子陣 $A_{31},A_{32},A_{41},A_{42}$ 中, 元素按列的逆序

$$a_{1k},a_{2k},\ldots,a_{kk},a_{1,k-1},a_{2,k-1},\ldots,a_{k,k-1},\ldots,a_{11},a_{21},\ldots,a_{k1}$$

從上至下, 依次遞增 1;

在子陣 $A_{33},A_{34},A_{43},A_{44}$ 中, 元素按列的逆序

$$a_{kk},a_{k-1,k},\ldots,a_{1k},a_{k,k-1},a_{k-1,k-1},\ldots,a_{1,k-1},\ldots,a_{k1},a_{k-1,1},\ldots,a_{11}$$

從下至上, 依次遞增 1。

這樣我們就構作出一個 $4k$ 階全對稱幻方 A。

爲便於記憶塡寫順序, 我們可將方陣 A 等分爲 4 塊, 利用模擬圖

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & | & 2 & 4 \\ 2 & 4 & | & 1 & 3 \\ - & - & + & - & - \\ 3 & 1 & | & 4 & 2 \\ 4 & 2 & | & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

來幫助記憶每塊中4個子陣內元素的遞增排列順序。因此, 我們也可稱這種方法爲“模擬圖法”。

從 (1) 式可見, 在具體構作過程中, 我們也可先將 A 方陣的上半部份構造出來, 然後分別用 n^2+1 減去上半部各子陣 A_{13}, A_{14}, A_{11}, A_{12}, A_{23}, A_{24}, A_{21}, A_{22} 中的最大元素, 即可依次得出下半部份各子陣 A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}, A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44} 中的位於相同位置處的最小元素。

下面, 我們給出根據上述方法構作出來的8階全對稱幻方的實例:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 53 & 55 & 42 & 44 & 30 & 32 \\ 2 & 4 & 54 & 56 & 41 & 43 & 29 & 31 \\ 45 & 47 & 25 & 27 & 6 & 8 & 50 & 52 \\ 46 & 48 & 26 & 28 & 5 & 7 & 49 & 51 \\ 23 & 21 & 35 & 33 & 64 & 62 & 12 & 10 \\ 24 & 22 & 36 & 34 & 63 & 61 & 11 & 9 \\ 59 & 57 & 15 & 13 & 20 & 18 & 40 & 38 \\ 60 & 58 & 16 & 14 & 19 & 17 & 39 & 37 \end{bmatrix}$$

其實, 用上述方法構作的 $4k$階全對稱幻方 $A=(a_{ij})$ 完全等價於下列計算公式:

$$a_{ij}=\begin{cases} (j-1)k+i & 1\le i\le k,\ 1\le j\le k \\ 12k^2+(j-1)k+i & 1\le i\le k,\ k+1\le j\le 2k \\ 8k^2+jk-i+1 & 1\le i\le k,\ 2k+1\le j\le 3k \\ 4k^2+jk-i+1 & 1\le i\le k,\ 3k+1\le j\le n \\ 11k^2+(j-2)k+i & k+1\le i\le 2k,\ 1\le j\le k \\ 5k^2+(j-2)k+i & k+1\le i\le 2k,\ k+1\le j\le 2k \\ -k^2+(j+1)k-i+1 & k+1\le i\le 2k,\ 2k+1\le j\le 3k \\ 9k^2+(j+1)k-i+1 & k+1\le i\le 2k,\ 3k+1\le j\le n \\ n^2-10k^2-(j+2)k+i & 2k+1\le i\le 3k,\ 1\le j\le k \\ n^2-6k^2-(j+2)k+i & 2k+1\le i\le 3k,\ k+1\le j\le 2k \\ n^2-2k^2-(j-3)k-i+1 & 2k+1\le i\le 3k,\ 2k+1\le j\le 3k \\ n^2-10k^2-(j-3)k-i+1 & 2k+1\le i\le 3k,\ 3k+1\le j\le n \\ n^2-k^2-(j+3)k+i & 3k+1\le i\le n,\ 1\le j\le k \\ n^2-11k^2-(j+3)k+i & 3k+1\le i\le n,\ k+1\le j\le 2k \\ n^2-9k^2-(j-4)k-i+1 & 3k+1\le i\le n,\ 2k+1\le j\le 3k \\ n^2-3k^2-(j-4)k-i+1 & 3k+1\le i\le n,\ 3k+1\le j\le n \end{cases} \tag{2}$$

利用 (2) 式可計算出任一指定階數的 $n=4k$ 階全對稱幻方中的任意元素, 這給用計算機編程構作全對稱幻方提供了很大的方便。

3. 構作方法的證明

在下述證明過程中, 我們要多次用到首項爲 a_1, 公差爲 d 的等差數列的第 $m_1+1\sim m_2$ 項和的公式:

$$S_{m_1+1\sim m_2}=(m_2-m_1)(a_1+\frac{m_1+m_2-1}{2}d) \tag{3}$$

此式易由等差數列的前 n 項和公式推出。

下面我們按行、列與對角線分爲 3 個方面來證明根據上述方法構作出來的 $n=4k$ 階方陣 $A=(a_{ij})$ 爲全對稱幻方。

(1) 當 $1\le i\le k$ 時, 由 (2) 與 (3) 式可得

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}a_{ij} &= \sum_{j=1}^{n}[(j-1)k+i]+\sum_{j=k+1}^{2k}[12k^2+(j-1)k+i]+\sum_{j=2k+1}^{3k}(8k^2+jk-i+1)\\ &\quad +\sum_{j=3k+1}^{n}(4k^2+jk-i+1)\\ &= k[\frac{(k-1)k}{2}+i]+k[12k^2+\frac{(3k-1)k}{2}+i]+k[8k^2+k+\frac{(5k-1)k}{2}-i+1]\\ &\quad +k[4k^2+k+\frac{(7k-1)k}{2}-i+1]\\ &= k(32k^2+2)\\ &= n(n^2+1)/2\end{aligned}$$

當 $k+1\le i\le 2k$ 時, 由 (2) 與 (3) 可得

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}a_{ij} &= \sum_{j=1}^{k}[11k^2+(j-2)k+i]\sum_{j=k+1}^{2k}[5k^2+(j-2)k+i]+\sum_{j=2k+1}^{3k}[-k^2+(j+1)k-i+1]\\ &\quad +\sum_{j=3k+1}^{n}[9k^2+(j+1)k-i+1]\\ &= k[11k^2-k+\frac{(k-1)k}{2}+i]+k[5k^2-k+\frac{(3k-1)k}{2}+i]\\ &\quad +k[-k^2+2k+\frac{(5k-1)k}{2}-i+1]+k[9k^2+2k+\frac{(7k-1)k}{2}-i+1]\\ &= k(32k^2+2)=n(n^2+1)/2\end{aligned}$$

由 (1) 式顯然可知, A 的第 $2k+1\sim n$ 行中的每個元素分別與第 $1\sim 2k$ 行中的一個元素之和爲 n^2+1, 而且它們是一一對應的, 因此, 當 $2k+1\le i\le n$ 時

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}a_{ij} &= \sum_{j=1}^{n}[(n^2+1)-a_{i-2k,j}]\\ &= n(n^2+1)-n(n^2+1)/2=n(n^2+1)/2\end{aligned}$$

從而可知, A 的各行元素之和均爲 $n(n^2+1)/2$。

(2) 由 (2), (3) 式可知, 當 $1\le j\le k$ 時

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}a_{ij} &= \sum_{i=1}^{k}[(j-1)k+i]+\sum_{i=k+1}^{2k}[11k^2+(j-2)k+i]+\sum_{i=2k+1}^{3k}[n^2-10k^2-(j+2)k+i]\\ &\quad+\sum_{i=3k+1}^{n}[n^2-k^2-(j+3)k+i]\\ &= k[(j-1)k+\frac{k+1}{2}]+k[11k^2+(j-2)k+1+\frac{3k-1}{2}]\\ &\quad+k[n^2-10k^2-(j+2)k+1+\frac{5k-1}{2}]+k[n^2-k^2-(j+3)k+1+\frac{7k-1}{2}]\\ &= k(2n^2+2)=n(n^2+1)/2\end{aligned}$$

當 $k+1\le j\le 2k$ 時

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}a_{ij} &= \sum_{i=1}^{k}[12k^2+(j-1)k+i]+\sum_{i=k+1}^{2k}[5k^2+(j-2)k+i]\\ &\quad+\sum_{i=2k+1}^{3k}[n^2-6k^2-(j+2)k+i]+\sum_{i=3k+1}^{n}[n^2-11k^2-(j+3)k+i]\\ &= k[12k^2+(j-1)k+\frac{k+1}{2}]+k[5k^2+(j-2)k+1+\frac{3k-1}{2}]\\ &\quad+k[n^2-6k^2-(j+2)k+1+\frac{5k-1}{2}]+k[n^2-11k^2-(j+3)k+1+\frac{7k-1}{2}]\\ &= k(2n^2+2)=n(n^2+1)/2\end{aligned}$$

當 $2k+1\le j\le 3k$ 時

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij} = \sum_{i=1}^{k}(8k^2+jk-i+1)+\sum_{i=k+1}^{2k}[-k^2+(j+1)k-i+1]$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{i=2k+1}^{3k}[n^2-2k^2-(j-3)k-i+1]+\sum_{i=3k+1}^{n}[n^2-9k^2-(j-4)k-i+1]\\
=\ & k[8k^2+jk-\frac{k-1}{2}+1]+k[-k^2(j+1)k-\frac{3k-1}{2}]\\
&+k[n^2+2k^2-(j-3)k-\frac{5k-1}{2}]+k[n^2-9k^2-(j-4)k-\frac{7k-1}{2}]\\
=\ & k(2n^2+2)=n(n^2+1)/2
\end{aligned}
$$

當 $3k+1\leq j\leq 3k$ 時

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}a_{ij} &= \sum_{i=1}^{k}(4k^2+jk-i+1)+\sum_{i=k+1}^{2k}[9k^2+(j+1)k-i+1]\\
&\quad+\sum_{i=2k+1}^{3k}[n^2-10k^2-(j-3)k-i+1]+\sum_{i=3k+1}^{n}[n^2-3k^2-(j-4)k-i+1]\\
&= k(4k^2+jk-\frac{k-1}{2}+1)+k[9k^2+(j+1)k-\frac{3k-1}{2}]\\
&\quad+k[n^2-10k^2-(j-3)k-\frac{5k-1}{2}]+k[n^2-3k^2-(j-4)k-\frac{7k-1}{2}]\\
&= k(2n^2+2)\\
&= n(n^2+1)/2
\end{aligned}
$$

即 A 的各列的 n 個元素之和爲 $n(n^2+1)/2$。

(3) 由上述構作方法可知, A 的子陣 A_{13}, A_{14}, A_{11}, A_{12}, A_{23}, A_{24}, A_{21}, A_{22} 分別依次與子陣 A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}, A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44} 中各對應位置處的兩元素之和爲 n^2+1。因此, 顯而易見 A 的各左、右對角線及折斷對角線上 n 個元素恰由 $n/2$ 對和爲 n^2+1 的元素對所組成, 故其和均爲 $n(n^2+1)/2$。

綜合 (1), (2), (3), 我們已證按照上述方法構作的 $4k$ 階方陣 $a=(a_{ij})$ 爲全對稱幻方。

—本文作者分別任教於中國河南省封丘縣科協和雲南民族學院數學系—