

# “問題解決”與數學教育

鄭毓信

“問題解決”是美國數學教育界在八十年代的主要口號，即是認為應當以“問題解決”作為學校數學教育的中心。這一思想在八十年代後期興起的美國新的數學教育改革運動中又得到了進一步的確認。集中地對這一思想的合理性進行論述，並對美國關於“問題解決”研究的歷史和現狀作出簡要的說明即是本文的主要內容，筆者的基本目標則是希望通過對於國外數學教育最新進展的介紹和分析，促進中國的數學教育的深入發展。

## 1. “問題解決”與數學教育

“問題解決”\*是美國數學教育界繼六十年代的“新數運動”和七十年代的“回到基礎”，在八十年代提出的主要口號。現在的問題是：“問題解決”這一口號的提出究竟是一個“偶然”的現象，或是有其一定的歷史必然性和內在的合理性？顯然，這一問題事實上也關係到了應當如何去認識“問題解決”對於數學教育的特殊意義。

筆者認為，對於“問題解決”的強調正是數學觀的現代演變和數學教育研究深入發展的直接產物，同時也集中地體現了數學教育的時代特徵。

### (1).數學觀的現代演變

所謂數學觀的現代演變在此主要是指由靜態的數學觀向動態的數學觀的轉變。

由數學哲學的歷史發展可以知道，在很長時期內，人們往往把數學等同於數學知識（特別是“事實性結論”）的匯集；進而，具有哲學頭腦的數學家或具有較多數學知識的哲學家們也就常常把自己的注意力集中在數學知識內在的邏輯結構的分析上，特別是，那些熱衷於數學基礎研究的學者們則更希望能把整個數學（注意：這裡所說的“數學”即是指“數學知識的匯集”）或至少是其大部分建成單一的一個公理系統：在其中，我們由少數幾條公理出發，可以單純憑借邏輯法則而演繹出

---

\* 對於所說的“問題解決”必須作正確的理解。事實是，由於“問題解決”從八十年代起成了美國數學教育界的主要口號，因此各種不同的主張往往都打上“問題解決”這樣一個時髦的旗號，從而，在此也就經常可以看到“名不符實”的現象。具體地說，所謂“問題解決”，在此是指綜合地、創造性地運用各種數學知識去解決那種並非單純練習題式的問題，包括實際問題和源於數學內部的問題；另外，“以‘問題解決’作為數學教育的中心”則是指應當努力幫助學生學會“數

2 數學傳播 十七卷四期 民82年12月

學地思維”。

全部的數學真理。由於對於所說的公理 [及推理規則] 的最終基礎有著不同的理解, 在數學哲學中就有邏輯主義、直覺主義和形式主義等學派的區分; 這些學派的數學觀反過來則又對當時的數學界產生了很大的影響。(可參見 [1]、[2])

從 1890 年到 1940 年的這五十年被稱為是“數學哲學的黃金時代”, 其主要特徵即是基礎研究各個學派的數學觀佔據主導地位; 而又正如上面所已指出的, 儘管邏輯主義等學派的數學觀不盡相同, 它們卻又具有這樣的共同點, 即都對數學持靜止的觀點。

由於基礎研究各個學派的研究規劃均未能獲得成功, 數學哲學的發展在四十年代以後就進入了一個停滯的時期, 而數學家們則開始尋找新的思想。這就如同美國當代著名數學哲學家普特南 (H. Putnam) 所指出的: “我希望我們能對數學真理、數學‘對象’和數學的必然性等進行澄清, 但我並不認為數學哲學中各種著名的‘主義’能夠導致這樣一點”; “我希望能使你們相信, 數學哲學中的各種體系無一例外都是不用認真看待的。” (“沒有基礎的數學” [“Mathematics without Foundations”, 載《數學、物質和方法》, 英文版, 1979 年。])

新的思想既來自對已有工作的反思, 也來自外部的重要啓示。後者主要指現代的科學哲學研究: 從五十年代起, 科學哲學的研究進入了一個異常活躍的時期, 其主要特徵則是由對於科學知識的邏輯分析 (這集中地體現於邏輯實證主義的科學觀, 並是與關於“科學發現”與“檢驗”的嚴格區分直接相聯繫的,

對此可參見以下的討論) 過渡到了對於科學的動態研究, 即是把科學看成是一種人類活動。容易看出, 這種動態的觀點與下述關於數學哲學的自覺反思是完全一致的: “我們不必去繼續尋找基礎而徒勞無功, 我們也不必因缺乏基礎而迷惑徘徊或感到不合邏輯, 我們應把數學看成是一般的人類知識的一部分。我們能夠試著分析數學究意是什麼, 亦即, 真實地反映當我們使用、講授、發現或發明數學時所做的事情。” “數學哲學的任務應是闡明數學家們正在作什麼。” (赫斯 [R. Hersh]: “復興數學哲學的一些建議”, 載《數學譯林》, 1981 年, 第二期。)

對於真實的數學活動可以從各種不同的角度去進行研究。例如, 所謂的“數學活動論”和“數學文化論”就分別是從社會—心理學的角度和文化的角度去進行研究的結果 (可參見 [3]、[4]、[5])。就目前的論題而言, 我們僅限於指出這樣一點: 由靜態的數學觀向動態的數學觀的轉變必然會導致數學教育思想的轉變。這即是指, 如果採取數學的動態觀, 在數學教育中, 我們顯然就不應唯一地強調數學知識的掌握, 而應更加重視使學生學會像數學家那樣去工作、像數學家那樣去思維。這就如同美國著名數學教育家倫伯格 (T. Romberg) 所指出的: “兩千多年來, 數學一直被認為是與人類的活動和價值觀念無關的無可懷疑的真理的集合。這一觀念現在遭到了越來越多的數學哲學家的挑戰, 他們認為數學是可錯的、變化的, 並和其它知識一樣都是人類創造性的產物。… 這種動態的數學觀具有重要的教育涵義: 數學教育的

目標應包括培養學習者創造自己的數學知識的能力……”（“學校數學課程中所存在的問題”[“Problematic Features of the School Mathematics Curriculum”]）

顯然，從這樣的角度去進行分析，強調“問題解決”、強調學會數學地思維就是十分自然的了，因為，如果就日常的數學活動進行分析，解決問題（更為準確地說，即是解決各種非單純練習題式的問題）顯然可以被看成數學活動的基本形式。事實上，在下述的意義上，問題和問題解決即就可以看成數學活動的核心所在：“某類問題對於一般數學進展的深遠意義及它們在研究者個人的工作中所起的重要作用是不可否認的。只要一門科學分支能提出大量的問題，它就充滿著生命力；而問題的缺乏則預示著獨立發展的衰亡或中止。正如人類的每項事業都追求著確定的目標一樣，數學研究也需要自己的問題。正是通過這些問題的解決，研究者鍛煉其鋼鐵意志，發現新方法和新觀點，達到更為廣闊和自由的境界。”（希爾伯特：“數學問題”，載《數學史譯文集》。）

最後，依據上面的分析，我們也就可以清楚地看出現行教育體制的一個嚴重弊病，即學生所學習的數學並非是真正的數學。

## (2). 數學教育研究的深入

所謂數學教育研究的深入，在此主要是指對於數學學習過程的深入研究，特別是關於數學教育的認知科學研究。

籠統地說，數學教育的認知科學研究主要屬於數學學習心理學的範圍，而後者則就

是關於數學學習過程的心理學研究。數學學習心理學這一研究課題的明確提出正是心理學研究深入發展的一個標誌，即是由一般心理學的研究深入到了專門的學科領域；另外，就數學學習心理學的現代研究而言，其最重要的成果則就是關於數學教育的認知科學研究和所謂的“建構主義的數學學習觀”（The Constructivist View on Mathematical Learning）。

具體地說，認知心理學的基本立場即是認為心理學的研究不應（像行為主義者所主張的那樣）侷限於可見行為，而應深入到認識主體內在的思維活動之中，特別是應當深入研究知識的貯存、提取、表達、發展等問題。另外，所謂的建構主義的學習觀即就是認知心理學研究的一個主要結論：就數學學習而言，這就是指數學學習並非一個被動的吸收過程，而是一個以已有的知識和經驗為基礎的主動的建構過程。

從歷史的角度看，瑞士心理學家皮亞杰（J. Piaget）的發生認識論、特別是關於主體的認知結構在認識活動中作用的分析可以被認為是為上述的建構主義學習觀提供了必要的理論基礎；然而，又只是作為對於數學教育歷史教訓的一種“反省”，這種觀點才在數學教育界中獲得了普遍的重視。這就如同戴維斯（R. Davis）教授等所提出的：“‘建構主義’的思想——在一些年前幾乎無人提及——現今在數學教育界中引起了極大的重視。許多人對此進行思考並撰文加以論述。儘管人們的意見並不完全一致；但是，在這些爭論背後我們則又可以看到關於學習

的性質、數學的性質以及適當的教學方法的實質性的一致。”(《數學學習和教學的建構主義觀點》[《Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics》, Monograph 4, Journal for Research in Mathematics Education], 第 187 頁)

一般地說, 建構主義的數學學習觀即是對於傳統數學教育思想的直接否定(可參見[6]); 由於論題的限制, 我們在此則僅限於指出這樣一點: 如果堅持“數學學習並非是一個被動的吸收過程, 而是一個以已有知識和經驗為基礎的主動的建構過程”的觀點, 那麼, 一個必然的結論就是: 最好的學習方法就是動手去作。就數學學習而言, 這就是指, “學數學就是作數學(“knowing” mathematics is “doing” mathematics)”, 也即我們應當讓學生通過問題解決來學習數學。顯然, 從這樣的角度進行分析, 現代的認知科學研究即就為“以‘問題解決’作為數學教育的中心提供了重要的理論依據, 而這事實上也就是把學生擺到了與數學家同樣的位置之上。

### (3).時代的要求

數學教育研究深入發展的又一重要內容即是關於數學教育目標的分析。事實上, 很早就有人提出了這樣的主張, 即認為能力與知識相比是更為重要的; 而又正如著名數學家波利亞(G. Polya)所指出的, “在數學裡, 能力指的是什麼? 這就是解決問題的才智”, 從而, 數學教育無疑就應突出強調解決問題能力的培養。然而, 就目前對於“問題解決”的強調而言, 則又有著更為明顯的時代特徵, 也

即是與關於數學教育目標的新的思考直接相聯繫的。

具體地說, 在數學教育的歷史上, 始終存在有所謂的“人本主義”與“實用主義”的對立。前者唯一地強調對於簡單技能的掌握, 而這在很大程度上就是工業社會的產物: 由於工業社會的基本特徵就在於大規模的機器生產, 因此, 工業社會的教育目標主要地也就在於培養出大批具有健壯體格、靈巧雙手和簡單技能(包括計算技能), 從而能夠勝任簡單機械勞動的未來勞動力, 這樣, 工業社會的教育體制在整體就必然表現出重(具體)技能和抹殺個性的特徵, 特別是表現為對大多數學生在培養目標上的低要求。與此相反, 人本主義者則認為教育的根本目標應在於實現人的“自我完善”, 特別是應當促進個人理性思維(包括批判分析和邏輯推理能力)和創造性才能的充分發展。就美國(一般地說, 就是西方社會)現行的教育制度而言, 上述的“矛盾”最終是以所謂的教育的“雙重目標”得以“解決”的, 這就是對大多數學生(這是未來的勞動力)的低要求, 和對少數學生(這是未來社會的上層分子)的高要求。特殊地, 由於數學學習在理性思維和創造性才能發展中的重要作用(對此, 我們在下面還將作出進一步的分析), 因此, 所說的對少數學生的高要求也就以數學上的高標準作為一項重要的基本內容。

然而, 主要地由於科學技術的迅速發展, 現代的信息社會對未來勞動力的培養提出了與工業社會不同的要求。這就如同《人人都算數, 關於數學教育的未來給國民的報告》

(《Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education》) 這一對美國當前的數學教育改革有著重要指導意義的文件所指出的: “二十一世紀的勞動力將是較少體力型, 而更多智力型的; 較少機械的, 而更多電子的; 較少穩定的, 而更多變化的。”又 “信息社會已經創造了一個在其中巧幹要比單純苦幹重要得多的世界經濟。這一經濟需要的是智力上適合的勞動者, 即善於吸收新思想、能適應各種變化……並善於解決各種複雜問題的勞動力。”(第 11, 1 頁) 從而, 與工業社會對大多數學生的低要求不同, 信息社會要求未來的勞動力普遍地具有較高的文化素養, 特別是具有較強的解決問題的能力。(這樣, 傳統的“實用主義”與“人本主義”在教育目標上的尖銳對立在新的條件下也就得到了統一, 或者說, 由工業社會向信息社會的發展必然地要求學校教育用普遍的高標準去取代傳統的“雙重目標”。)

從數學教育的角度看, 上述的變化當然也就包括了在數學教育方面的普遍的高標準, 特別是, 我們應當努力提高學生應用數學知識解決問題的能力, 並通過數學學習發展學生的理性思維和創造性才能。例如, 作為指導九十年代美國數學教育改革的又一綱領性文件《學校數學課程和評估標準》(《Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics》), 首先就通過體現時代要求的“社會目標”的分析而引出了關於數學教育的五個具體目標, 而其核心即就是使學生具有數學地解決問題的能力。從而, 總的

來說, 現代數學教育中對於“問題解決”的突出強調事實上也就是一種“時代的要求”, 即是人類社會由工業社會向信息社會發展的必然產物。

最後, 還應提及的是, 波利亞並曾依據學生未來的職業情況對“問題解決”, 特別是思想方法訓練的重要進行了論證。波利亞指出, 普通中學的學生畢業後在其工作中需要用到數學的 (包括數學家在內) 約占全部學生的 30%, 而其餘的 70% 則幾乎用不到任何具體的數學知識 (註: 波利亞的這一統計是在六十年代作出的, 從而就未必適用於現代社會, 特別是考慮到由於計算機技術的迅速發展和普及所大大加強了的“數學化”傾向)——正是基於這樣的分析, 波利亞認為, “一個教師, 他若要同樣地去教他所有的學生——未來用數學和不用數學的人, 那麼他在教解題時應當教三分之一的數學和三分之二的常識 (即是指一般性的思想方法或思維模式——註)。對學生灌注有益的思維習慣和常識也許不是一件太容易的事, 但一個數學教師假如他在這方面取得了成績, 那麼他就真正為他的學生們 (無論他們以後是做什麼工作的) 做了好事。能為那些 70% 的在以後生活中不用科技數學的學生做好事當然是一件最有意義的事情。”(《數學的發現》, 第二卷, 第 181-82 頁。)

應當強調的是, 在筆者看來, 波利亞的上述分析不應被理解為降低了數學的重要性; 恰恰相反, 這事實上正是表明了數學作為一種文化因素對於個人, 乃至整個民族、整個人類的重要性, 即數學對於人們養成良好的思維習慣, 以及理性思維和創造性才能 (就整

個民族或人類而言,就是理性精神)的發展具有特殊的意義。當然,這種關於“數學文化價值”的分析事實上就從又一角度表明了我們在數學教育中應當突出“問題解決”,突出思維方法的學習和訓練。

綜上可見,以“問題解決”作為數學教育的中心事實上體現了數學教育思想、乃至數學觀的重要變化,從而也就意味著數學教育的一個根本性的變革。正是在這樣的意義上,倫伯格指出:“解決非單純練習題式的問題正是美國現今數學教育改革的一個中心論題。”

## 2. 美國“問題解決”研究的歷史和現狀

### (1). 波利亞的貢獻

在論及美國關於“問題解決”的研究時,無疑應當首先提及波利亞關於數學啟發法的研究,這不僅是因為波利亞的這一工作可以看成現代“問題解決”研究的直接先驅,而且因為正是波利亞的工作為之提供了必要的理論基礎。

縱覽波利亞在這方面的幾部主要著作,即《怎樣解題》、《數學的發現》、《數學與猜想》等,不難看出,貫穿於這些著作主中的是以下的一些基本思想(應當指出,以下的論述大都取自波利亞的一篇短文“論中學裡的數學解題”(“On Solving Mathematical Problems in High School”)。美國數學教師全國委員會在1980年出版的指導性著作《學校數學中的問題解決》[(Problem Solving in School Mathematics)]即以此文作為全書

的第一篇,編者並強調指出:“每一個數學教師,不僅是中小學的數學教師,都應認真閱讀這一文章”):

第一,對於“問題解決”重要性的強調。例如,波利亞指出:“解題是智力的特殊成就,而智力乃是人類的天賦,正是繞過障礙,在眼前無捷徑的情況下迂迴的能力使聰明的動物高出愚笨的動物,使人高出最聰明的動物,並使聰明的人高出愚笨的人。”“解題是人類的本性。我們可以把人類定義為‘解題的動物’;他的生活充滿了不可立即實現的目標。我們大部份的有意識思維是與問題相關的;當我們並未沉溺於娛樂或白日作夢時,我們的思想有著明確的目標。”

第二,關於“問題解決”與數學教育關係的分析。波利亞認為:“如果教育未能對智力的發展作出貢獻,這樣的教育顯然是不完全的”;而數學在發展學生的智力方面恰恰“具有最大的可能性”。因此,“數學教師的首要責任是盡其一切可能來發展他的學生的解決問題的能力。”

第三,關於“問題解決”的研究應當集中在啟發法(heuristic)上,即其目標並不是要發現可以機械地用來解決一切問題的“萬能方法”(波利亞明確指出,這樣的萬能方法也是不存在的),而是希望能通過對於解題過程的深入研究,特別是已有的成功實踐,總結出一般的方法或模式,這些方法和模式在以後的解題活動中就可起到啟發和指導的作用。(注:按照波利亞的解釋,“啟發法”即是指有助於發現的——對此可參見《怎樣解題》,第112頁。)

其次，波利亞在“問題解決”方面的工作應當說主要集中在啓發法的研究上。具體地說，波利亞在上述著作中曾先後給出了這樣一些啓發性的模式或方法（詳見[[9]、[10]、[11]]）：

分解與組合；笛卡爾模式；遞歸模式；疊加模式；特殊化方法；一般化方法；“從後向前推”；設立次目標；合情推理的模式（歸納與類比）；畫圖法；看著未知數；回到定義去；考慮相關的問題；對問題進行變形；等等。

另外，一些“定型的”問題和建議則應被看成數學啓發法的核心。波利亞指出，只要運用得當，這些問題和建議就能起到“思想指南”的作用，即能給解題者以一定的啓示，從而幫助他們去發現好的或正確的解題方法與解答。把這些問題和建議按照解題過程的四個階段，即“弄清問題”、“制定計劃”、“實現計劃”和“回顧”組織起來，則就有所謂的“怎樣解題表”（見 [9]）。

最後，爲了清楚地認識波利亞的貢獻，我們則又應當以關於數學發現方法的整個歷史作爲背景來進行分析：

具體地說，在人類歷史發展中曾有這樣一個時期，其間人們曾希望能找到這樣一種方法，用之即可有效地從事發明創造，或成功地解決一切問題。如笛卡爾就曾提出過所謂的“萬能方法”：第一，把任何問題轉化爲數學問題；第二，把任何數學問題轉化爲代數問題；第三，把任何代數問題歸結爲解方程。從現在的觀點看，上述對於“萬能方法”的尋求顯然是過於簡單了，因爲，即如並不存在可以把萬物點化爲黃金的“哲人之石”，能有效

地從事數學發現或解決一切問題的“萬能方法”也是不存在的。然而，就基本的研究傾向而言，人們卻因此由一個極端走向了另一個極端，即認爲根本不存在任何關於發現的方法。在歷史上後一種觀念是與邏輯實證主義的“科學觀”直接相聯繫的：邏輯實證主義明確地提出了關於“證明（檢驗）的方法”與“發現的方法”的區分，並認爲方法論的研究應當侷限於證明（檢驗）的範圍，而發現的問題則完全屬於心理學的範圍，對此不需要、也不可能作出任何理性的或邏輯的分析，從而也就根本不存在任何真正意義上的“發現的方法”。由於邏輯實證主義在西方學術界中曾長期占據主導地位，因此，關於數學發現（及至一般科學發現）方法的研究就一度陷入了停頓狀態。

正是在上述的“嚴峻”形勢下，波利亞自覺地承擔起了“復興”數學啓發法的責任。即如上面所已提及的，波利亞在這一問題上的基本立場是：所謂的“萬能方法”是不存在的；但是，“各種各樣的規則還是有的，諸如行爲準則、格言、指南，等等。這些都還是有用的”，而這裡所說的“行爲準則、格言、指南”等也就是前述的啓發性模式或方法。從而，波利亞事實上就是在上述的兩極對立之間開拓了第三種可能性，即我們可以，而且應當積極從事對於新的研究工作具有啓發與指導意義的一般方法或模式的研究。

綜上可見，我們就應充分肯定波利亞的貢獻：從歷史的角度看，即如他本人所指出的，波利亞在此的確起了一個“復興”啓發法的作用；並且，這一工作也爲進一步的研

究（這不僅是指國外關於“問題解決”的現代研究，而且也包括中國的數學方法論研究）奠定了必要的理論基礎，即在很大程度上決定了這種研究的性質和方向。

## (2). 曲折的前進

儘管波利亞關於數學啟發法的研究已經為進一步的工作打下了良好基礎，他的有關論著也曾在世界範圍內引起過積極的反響；但是，就美國數學教育的實際情況而言，卻經歷了一個曲折的發展過程。事實上，如果就整體的情況進行分析，關於“問題解決”的研究在整個五、六十年代應當說處於低谷之中。例如，在對這一發展過程進行回顧時，有不少在現今的研究中發揮領導作用的學者都曾很有感觸地提及，在五、六十年代要想以解決問題過程的分析作為學位論文是很難獲得導師認可的；而且，如果堅持這樣做了，這一論文也決不會引起普遍的注意。

這種發展的停滯性是由數學教育的總的發展趨勢所決定的。具體地說，在六十年代，在數學教育中佔據中心地位的是席卷全球的“新數運動”，而其主要特徵則是對於抽象分析、以及數學知識內在的邏輯結構的片面強調。由於“新數運動”違背了基本的認識規律，從而造成了數學教育質量的明顯下降，因此這一運動最終就未能逃脫失敗的命運。其後，在七十年代，作為對於新的改革的一種“反動”，“回到基礎”又成了美國數學教育界的主要口號，而其基本特徵則是對於基本知識、基本技能的強調，並認為只需通過反復的講授和大量的、“機械的”練習就可使學生

較好地掌握所說的基本知識和基本技能（因此，七十年代有時就被形容為“機械練習的十年 [The decade of drill and practice]”）。但是，近十年的實踐卻又證明這一運動並沒有能達到真正提高數學教育質量的目標，而且即使就所說的基本知識與基本技能的掌握而言，反復的講授與大量的練習也並未能實現預期的目標。從而，在經歷了上述的曲折發展以後，人們的注意力又重新回到了“問題解決”之上。

正是在這樣的意義上，在論及現今對於“問題解決”的研究時，人們採用了“對波利亞的重新發現”這樣的說法，而這也的確並非言過其實。例如，正如上面所已提及的，美國數學教師全國委員會（NCTM）1980年出版的指導性著作《學校數學中的問題解決》即就重印了在波利亞的一篇短文“論中學裡的數學解題”作為全書的第一篇文章，而這一篇文章卻是波利亞在1949年發表的。

然而，應當強調的是，與波利亞的時代相比，自八十年代開始的關於“問題解決”的新的研究無論在理論或實踐上都已經取得了重要的進展，對其特點可以大致總結如下：

### 1) “問題解決”已經成為美國數學教育的中心環節

儘管波利亞已曾明確強調了數學教師應致力於發展學生解決問題的能力，但只是從八十年代開始，“問題解決”才真正成為了美國數學教育的中心環節。

具體地說，正如上面所已提及的，如果說“新數運動”和“回到基礎”分別是美國數

學教育界在六十年代和七十年代的主要口號，那麼，八十年代的主要口號就是“問題解決”。例如，美國數學教師全國委員會1980年出版的用以指導八十年代學校數學教育的綱領性文件《行動的議程》(《An Agenda for Action》)就明確地提出了應當以“問題解決作為學校數學教育的中心”(第2頁)。

另外，與先前的運動相比，“問題解決”又表現出了理論研究與教學實踐密切結合的重要特點。這就是說，與前兩次的運動不同，我們在此看到的已不再是理論研究與學校中的數學教育實踐嚴重脫節的情況，更不是如同“新數運動”那樣的在很大程度上僅有來自理論研究者的積極性，而學校中的大部分數學教師則對此採取漠然、甚至是抵觸的態度。事實上，正如基爾帕特里克(J. Kil Patrick)教授所指出的：“在整個教育史中很少有這樣的課題能同時引起研究者和實踐者如此的關注”，而“問題解決”卻正是這樣一個例外。

進而，與前兩個運動的又一重要區別在於，儘管自1980年起又有十幾年頭過去了，“問題解決”作為一個運動並沒有表現出任何失敗或衰退的跡象；恰恰相反，“以‘問題解決’作為學校數學教育的中心”已經取得了越來越廣泛的支持。例如，這一主張在關於美國新的教育改革運動的各個綱領性文件中都得到了明確的肯定(對此可見另文“時代的挑戰”，《數學教育學報》)；另外，這一主張在美國也已在各種形式、各種層次和各種規模下得到了實踐；有關的論著和教材更是不計其數。如在各個出版社的新書廣告中，“問題解決”已經成為與“幾何”、“代數”、“數學教育基

本理論”等相“平等”的一個大類，其中更包括了按年級逐年編寫的系列著作。另據初略統計，在美國關於數學教育的一些主要刊物於1991年發表的論文中，儘管涉及到了代數、幾何、學習障礙、教法組織、計算器和計算機、錯誤診斷及糾正、性別差異、考試分析等近二十個課題，“問題解決”卻在其中佔據了首要的位置，約占全部論文的五分之一。

最後，“問題解決”事實上也已成為一個世界性的潮流。例如，美國關於“問題解決”的主要代表人物之一舍費爾德(A. Schoenfeld)就曾提及，在國際數學教育會議於1980年召開的第四次會議(ICME-4)上，只是由於他的建議，才把“問題解決”列入了會議議程，但只是作為一個很小的課題被列到了“關於課程的非常規方面”這一項目之下，以致舍費爾德不得不把大會議程流覽了三遍才找到了這一題目。然而，在事隔四年之後的第五次國際數學教育會議(ICME-5)上，情況就發生了很大的變化：“問題解決”已經成了大會最主要的議題之一。

## 2) 與波利亞的啟發法研究相比，關於“問題解決”的新的研究在理論上已經取得了重要進展。

新的理論進展的重要表現之一，即是關於“問題解決”的研究已經由對於啟發法的具體論述發展到了對於解決問題全部過程的系統分析。事實上，如果就八十年代初期的情況進行分析的話，當時的關於“問題解決”的研究在很大程度上仍然停留在波利亞的數學啟發法的水平上，以致“數學啟發法在今天幾乎

已經成爲‘問題解決’的同義詞”。然而，從八十年代下半葉起，情況已發生了很大的變化。特別是，通過多年的實踐與總結，人們已認識到啓發法不應被看成影響問題解決能力的唯一要素，或者說，爲了提高解決問題的能力，我們還應注意到更多的環節，即如所謂的“調節”和“觀念”等因素。一般地說，正是通過對於解決問題全過程的系統分析，我們現已獲得了關於“問題解決”的一個新的理論框架。例如，在這方面應當特別提及的即是舍費爾德的一部專著《數學解題》(《Mathematical Problem Solving》，1985年，這是關於“問題解決”的少數幾部專著之一)。正如作者本人在前言中所指出的：“這一著作的主要目標就是要爲分析複雜的解題行爲提供一個框架。這一框架……描述了複雜的智力活動的四個不同性質的方面：認識的資源，即解題者所已掌握的事實和算法；啓發法，即在困難的情況下借以取得進展的‘常識性的法則’；調節，它所涉及的是解題者運用已有知識的有效性；觀念系統，即解題者對於學科的性質和應當如何從事工作的看法。”

值得強調的是，除去不斷的實踐與總結這一基本環節以外，導致新的理論進展的又一重要原因即是來自外部的促進：在現代關於“問題解決”的研究中，人們廣泛地吸取了認知科學、人工智能及社會-文化研究等方面的研究成果。事實上，如果把“問題解決”看成是一種常規的數學活動，相應的認知科學研究和社會-文化研究則就分別是從微觀和宏觀的角度揭示了這種活動的內在機制和外部條件(可參見“時代的挑戰”)，從而也就直接促進了對於“問題解決”的深入研究。

最後，上述的分析事實上也就表明了新的研究在方法論上的一個重要特點，即是研究的開放性。顯然，如果從這樣的角度去進行分析，新的理論進展的取得就是有其必然性的，即是科學在整體上突飛猛進的必然產物。

### 3) 從總體上說，“問題解決”現正處於深入發展的關鍵時刻。

所謂“深入發展”，在此是指現今的實踐活動已經由主要是對於素樸直覺的理論總結過渡到了理論指導下的新的實踐，從而也就預示著理論的不斷完善和實踐的不斷提高。

事實上，就現今可以看到的大部份著作而言，都並非十分成熟的專作，而主要是一些會議論文集：在這些關於“問題解決”的專門會議中，與會者對有關的進展進行了充分的交流和分析，並對一些有待深入研究的問題進行了初步的探討，進而，通過論文集的組織與出版，事實上就較好地發揮了“總結-指導”的作用。例如，分別由雪爾弗(E. Silver)和由查爾斯(R. Charles)與雪爾弗聯合主編的《數學解題的教和學》(《Teaching and Learning of Mathematical Problem Solving》，1985年)與《數學解題的教學與評估》(《The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving》，1989年)即是兩部較有影響的論文集，它們分別是1983年和1987年召開的兩次關於“問題解決”的專門會議的最終產物。

另外，所謂“問題解決”的發展到了一個“關鍵時刻”則是指，隨著大量人力、物力、財力的投入與時間的消逝，人們對“問題解

決”的研究和實踐提出了新的要求，即是希望能看到這一運動確實達到了提高數學教育質量的目標。顯然，這是一個十分合理、但又是相當艱巨的目標。

正是就這一根本目標的實現而言，筆者以為，我們在此即可清楚地看到美國社會的特殊性和嚴重弊病。

如眾所知，美國社會的一個重要特點就是其高度的“自治性”。就教育而言，這即是指美國各個州、市和教區在教育大綱的制定、教材的選擇等方面具有很大的自主權。這種高度的“自治性”有其一定的優越性，特別是有利於多種不同的改革方案的實施；然而，從另一角度看，這也就為大力推行某種業已被證明成功的方案帶來了很大的困難。例如，一個“嚴酷”的事實是，在相當數量的美國學校中，前述各個運動，包括“新數運動”和“回到基礎”，都未曾產生很大的影響——在那裡，數學教育始終是以傳統的方式進行著。

最後，美國社會的固有弊病也對教育改革的深入發展構成了嚴重的障礙，特別是，貧困、落後地區的教育，少數民族的教育，吸毒、暴力等現象對青少年的毒害，等等。例如，1992年美國的一個駭人聽聞是：由於紐約市的學校屢次發生槍殺事件，當地市政府不得不通過法令，在所有學校入口處安裝金屬探測器，以防止學生攜帶槍支到校。另外，也就是出於這樣的考慮，戴維斯教授在列舉“數學教育研究和發展所面臨的最為重要的挑戰”時，就把“努力改變貧困地區教育水平底下的情況”作為最為首要的任務之一。

綜上所述，美國關於“問題解決”的研究已經取得了重要的進展，並在理論和實踐兩

個方面都已積累了豐富的經驗，從而就為加速發展中國的數學教育事業提供了很好的借鑒；另外，美國社會固有的弊病則又顯然是為我們超越世界先進水平提供了良好的機遇。（最後，還應提及的是，以波利亞的啓發法研究為基礎，中國學者也在“問題解決”——在此並引入了“數學方法論”這樣一個“專有名詞”——的深入研究上作出了一些有意義的工作。對此可參見 [15], [16], [17]。）

## 參考文獻

- [1] Benacerraf, P. and Putnam, H. (ed.), 1983, 《Philosophy of Mathematics》, Second edition, Cambridge Univer. Press.
- [2] 夏基松、鄭毓信, 1986年, 《西方數學哲學》, 人民出版社。
- [3] Kitcher, P., 1984, 《The Nature of Mathematical Knowledge》, Oxford Univer. Press.
- [4] Wilder R., 1980, 《Mathematics as a Culture》, Pergamon Press.
- [5] 鄭毓信, 1990年, 《數學哲學新論》, 江蘇教育出版社。
- [6] Davis, R. and Maher, C. and Noddings, N., 1990, 《Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics》, Monograph 4, Journal for Research in Mathematics Education.
- [7] NCTM, 1989, 《Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics》.

- [8] NRC, 1989, 《Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education》, National Academy Press.
- [9] 波利亞, 1982年, 《怎樣解題》, 科學出版社。
- [10] 波利亞, 1980年, 《數學的發現》, 內蒙古人民出版社。
- [11] 波利亞, 1984年, 《數學與猜想》, 科學出版社。
- [12] Schoenfeld, A., 1985, 《Mathematical Problem Solving》, Academic Press Inc.
- [13] Silver, E., 1985, 《Teaching and Learning of Mathematical Problem Solving》, Lawrence Erlbaum Associates.
- [14] Charles, R., and Silver, E., 1987, 《The Teaching and Assesing of Mathematical Problem Solving》, Lawrence Erlbaum Associates.
- [15] 鄭毓信 (Zheng. Y.), 1991, “China’s Study of Methodology of Mathematics”, 載《Proceedings of ICMI China Regional Coference on Mathematics Education》.
- [16] 徐利治, 1983年, 《數學方法論選講》, 華中工學院出版社。
- [17] 鄭毓信, 1991年, 《數學方法論》, 廣西教育出版社。
- [18] 鄭毓信 (Y. Zheng), 1991, “Philosophy of Mathematics in China”, 載《Phi- losophia Mathematica》, Vol. 6, No. 2.

—本文作者任教於中國南京大學哲學系—