關於悖論的幾個問題

吳開朗

駢俊生

簡單地說, 悖論者, 謬論也。也可以說它是一種荒誕的美談, 並且在荒誕之中給人以美的享受。那麼, 爲什麼要用“悖論” 這種晦澀古怪的名詞來取代這樣一個通俗風趣的說法呢? 按照美國柯朗數學研究所 M. 克萊茵 (Kline) 教授的說法, 那是爲了不把自相矛盾的眞相擺在桌面上, 才採用這樣一個婉轉的措辭。很顯然, 克萊茵教授的這種說法, 是針對“Paradox”一字的含義而言的。英國數學家蘭姆賽 (F. Ramesey) 認爲悖論可以分爲兩類: 一類是邏輯、數學悖論, 這此悖論可以由邏輯系統或數學系統中的概念所構成; 另一類是語義型悖論, 此類悖論是由命名、眞假等概念而構成。在二十世紀九十年代的今天, 悖論直接關係著數學基礎、數理哲學、邏輯學、語言學的進步與發展, 切不可視之爲茶餘酒後的閑談話題。現在本文簡要地談談有關悖論的幾個問題。

一. 關於悖論的古典定義

悖論並非是毫無根據的異想天開, 它起源於古希臘, 在當時, 所謂悖論, 是泛指那些推理過程, 表面上看去似乎是無懈可擊, 但是實際上卻可以導致邏輯上自相矛盾。

古希臘哲學家亞里斯多德 (Aristotle, 公元前 384—公元前 321) 在《物理學》一書中, 記載有芝諾 (Zeno, 約公元前 496—公元前 430) 的四個悖論: 飛毛腿永遠追不上烏龜、跑步人永遠不可能達到終點、飛矢不動以及遊行隊伍悖論。現在我們來分析其中的第一個悖論:

芝諾所提出的這個悖論, 即是阿基里斯 (Achilles) 永遠追不上烏龜, 阿基里斯是希臘神話中神行太保, 亦稱飛毛腿。根據芝諾的規定, 在比賽之前, 阿基里斯讓烏龜先爬一段距離。因此, 在比賽開始之後, 阿基里斯必須首先跑到烏龜的出發點。然而, 在這段時間內, 烏龜又向前爬了一段路程, 所以, 阿基里斯接著又要跑完第二段路程$\cdots$, 如此繼續進行下去, 阿基里斯只能是愈追愈近, 但卻永遠追不上烏龜。爲了說明問題, 現在作如下計算:

爲使計算簡便, 我們不妨設阿基里斯步行的速度爲每秒 10m, 烏龜爬行的速度爲每秒 0.1m, 並且在比賽之前, 阿基里斯讓烏龜

先爬999m, 在這種條件下, 阿基里斯追趕烏龜所用的時間爲:

$$999 \div 10 = 99.9\text{秒}$$
$$(99.9 \times 0.1) \div 10 = 0.999\text{秒}$$
$$(0.999 \times 0.1) \div 10 = 0.00999\text{秒}$$
$$\cdots\cdots$$

這些數字, 按其先後排列, 可以構成一個無限序列:

$$99.9,\ 0.999,\ 0.00999,\ \cdots$$

其和爲

$$S = 99.9/(1-\frac{1}{100}) = 100.\dot{9}\dot{0}\text{秒。}$$

由此可見, 按照上述假設, 阿基里斯追趕烏龜的時間, 如能達到101秒, 即可超過烏龜。而阿基里斯之所以祇能無限接近於烏龜, 乃是由於芝諾所設計的追趕方法, 限制了阿基里斯的時間。

從歷史上來看, 芝諾的這些悖論, 除了涉及到時間和空間的概念而外, 主要問題在於對無限理論缺乏研究。正如數學家波耶所說: “希臘數學家 (包括阿基里斯在內) 都是把無限排斥在他們的推理之外, 他們之所以排斥無限, 原因很明顯: 直覺這時還不能爲它提供一幅淸晰的畫面, 再則, 它也沒有一個邏輯基礎。” 然而, 芝諾悖論在數學發展史上的地位與作用, 則是不可低估的。它極大地促進了數學思想的發展和數學邏輯方法的嚴格化。著名英國數學家羅素 (B. Russell, 1872—1970) 曾明確指出: “芝諾的悖論, 引起了幾乎整個關於時間、空間和無限的理論, 這些理論從那時起到今天, 一直在發展著。”

二. 關於悖論的現代定義

對於悖論, 現在學術界絕大多數人都是採用弗蘭克爾 (A.A.Fraenkel) 與巴—希萊爾 (Y.Bar—Hillel) 所提出的定義: 如果某一理論的公理系統或推理原則, 看上去是合理的, 但是在這個理論中卻推出了兩個互相矛盾的命題; 或者是證明了這樣一個複合命題, 它表現爲兩個互相矛盾命題的等價形式。那麼, 就說這個理論包含了一個悖論。這個定義較爲全面合理, 其特徵有三: (1) 首先肯定, 任何悖論總是相對於某一理論系統而言的; (2) 指出悖論可以表現爲某一理論系統中兩個互相矛盾的命題形式; (3) 指出悖論也可以表現爲肯定等價於否定的複合命題。

當前學術界還流行著一些與此等價的悖論定義, 例如:

命題 p 是悖論, 當且僅當 $p \Longleftrightarrow \neg p$。

其中 p 常由另一命題 A 而引出, $\neg p$ 表示 p 的否定命題, 並且 $p \Longrightarrow \neg p$ 和 $\neg p \Longrightarrow p$ 都是根據 A 或 p 的定義以及語義邏輯而推導出來。

在公元前六世紀時期, 克里特哲學家埃皮曼尼克斯 (Epimenixes) 提出了一個撒謊者悖論: 一個克里特人說:“所有的克里特人所說的每一句話都是謊話。”現在對於這個悖論, 作如下分析推理:

假設此話爲眞, 由於此話出自於克里特之口, 根據悖論本身的推論規則: 所有的克里

特人所說的每一句話都是謊話。由此可推得此話爲謊話, 亦即是此話爲假。

反之, 假設此話爲假, 但由該悖論的推理規則, 可得此爲謊話, 亦即是此話爲假。

由此可見, 對於這個悖論, 由“此話爲眞”, 可導出“此話爲假”; 但是, 由“此話爲假”, 則不可導出“此話爲眞”。因此, 它只是一個古典悖論而已。

到了本世紀, 英國大數學家羅素又爲這個古典悖論, 補充了一個新條件: “在克里特人說這句話之前, 所有的克里特人所說的每一句話皆爲假話。” 經過這個補充之後, 即可使撒謊者悖論, 構成一個現代悖論。也就是說, 有了這個新條件, 不僅是可以由“此話爲眞”推出“此話爲假”, 而且還可以“此話爲假”推出“此話爲眞”。現在, 我們將後者的推理過程敍述如下:

假設: 所有的克里特人所說的每一句話都是謊話”爲假, 則至少有一個克里特人說過一句眞話。但是, 根據羅素所補充的這條前提條件: 在克里特人說這句話之前, 所有的克里特人所說的每一句話皆爲假話”。立即可得: 撒謊者悖論中所提出的這個克里特人, 他所說的話應爲眞話。亦即是“所有克里特人所說的每一句話都是謊話”爲眞。這樣, 我們即由“此話爲假”推出“此話爲眞”。

這條撒謊者悖論, 經過羅素的修改補充之後, 即由古典悖論變爲現代悖論。這足以說明現代悖論的定義, 與古典悖論的定義, 已有顯明的差異, 當然, 這也是數學思想發展和數學邏輯方法嚴格化的必然趨勢。美國邏輯學家 A. 塔爾斯基在分析撒謊者悖論時曾經特別指出:“無論如何, 只要發生了悖論, 我們總可以指出一個語句是眞的同時又是假的。”

三. 悖論在數學基礎研究中所產生的深遠影響

在人類文明史上, 悖論由來已久, 直至悖論在集合論中出現, 才引起數學家的警覺, 其中最引人注目的乃是羅素悖論。

對於集合可以分爲兩類, 一類爲本身分子集, 另一類爲非本身分子集。例如: 由全體圖書館所構成的集合 M, 仍然是一個圖書館, 即 $M \in M$; 由全體自然數所構成的集合 N, 則 N 不是一個自然數, 即 $N \bar{\in} N$。由此可見, 圖書館爲本身分子集, 而自然數爲非本身分子集。現在我們來介紹羅素悖論:

令 $U = \{A | A \bar{\in} A\}$(即 U 爲非本身分子集), 由此出發可以立即推出兩個互相矛盾的命題:

a) 假設 $U \in U$, 但因 U 爲非本身分子集, 所以有 $U \bar{\in} U$。即 $U \in U \Longrightarrow U \bar{\in} U$。

b) 假設 $U \bar{\in} U$, 由於 U 爲非本身分子集, 所以有 $U \in U$。即 $U \bar{\in} U \Longrightarrow U \in U$。

由於羅素悖論直接涉及到集合概念的定義問題, 並且集合論又是現代數學的基礎, 因而, 羅素悖論不僅動搖了數學的礎基, 而且震撼著整個邏輯界和哲學界。

這個悖論是羅素於1902年發現的, 及至1919年, 他又加以通俗化, 將其改寫爲理髮師悖論*, 即:

李家村上所有有刮鬍子習慣的人可以分

∗ 下述內容與克萊因的說法基本雷同, 參見《古今數學思想》1984年上海科技出版社出版第四冊, p.290。

爲兩類: 一類是自己給自己刮鬍子; 另一類是自己不給自己刮鬍子。李家村上有一個有刮鬍子習慣的理髮師, 他自己規定: “給而且只給村上自己不給自己刮鬍子的人刮鬍子。”問這個理髮師自己屬於哪一類?

a) 假設理髮師屬於自己給自己刮鬍子這一類; 那麼, 根據理髮師的規定, 他應該不給這類人刮鬍子, 因此, 理髮師應屬於自己不給自己刮鬍子這一類。

b) 假設理髮師屬於自己不給自己刮鬍子這一類人; 那麼, 根據理髮師的規定, 他應該給這類人刮鬍子, 這就是說理髮師自己給自己刮鬍子; 因此, 理髮師應屬於自己給自己刮鬍子這一類人。

羅素悖論等相繼發現, 使整個經典數學猶如建築在裂縫甚多的牆基之上的高樓大廈, 怎能令人安心! 數理邏輯學專家弗雷格 (G. Frege, 1848-1925) 在《論數學基礎》一書第二卷的尾聲中這樣寫道: “對於一個科學家來說, 沒有哪一件事比下列事實更令人掃興: 當他的工作剛剛完成的時候, 突然它的一塊奠基石崩塌下來了。當這本書的印刷快要完

成的時候, 羅素先生寫給我的一封信, 就使我陷入於這樣的境地。” 弗雷格在這一段話中, 所說的這一封信, 即是羅素在1902年發現集合論悖論之後, 所寫給他的一封信。弗雷格接到這封信, 猶如一盆冷水潑到自己頭上。爲了排除集合論中的悖論, 數學家們曾經提出幾種解決方案, 其中之一就對於集合論實行公理化。

在這個研究方向上, 數學家們提出一個期望: 能否爲集合論建立一種公理系統, 並且進一步證明凡是超出公理所允許的限度而構造出來的集合, 例如, 由一切集合而組成的集合等等, 在該系統中一概不承認其爲集合。這樣, 利用集合論的公理化, 即可以把羅素悖論、康托悖論等一切已經發現數學悖論和邏輯悖論, 從集合論中予以排除。

經過一段時間的努力, 在這個研究方向上取得了突破性進展。德國數學家 E. 策墨略在 1908 年首先提出了一種集合論公理系統, 後來弗蘭克爾 (Fraenkel)、馮·諾伊曼 (Von Neumann) 和斯科倫 (Skolen) 又作了一些改進, 從此便形成了舉世公認的 ZF 公理系統。如果在這個系統中再加入選擇公理, 即是 ZFC 系統。對於這種排除悖論的辦法, H·龐卡萊評論說:“爲了防備狼, 羊群已用籬笆圈起來了, 但卻不知道圈內有沒有狼。”*

四. 由悖論而引發的三次數學危機

在數學發展史上曾經發生過三次重大危機, 每次危機都是由悖論而引起的。然而, 對於悖論問題的深入研究, 同時又推動著數學理論的進一步發展與繁榮。例如, 貝克萊悖論的提出, 最終促成了嚴格的極限理論的建立; 羅素悖論的發現, 直接促進了公理化集合論與數學基礎研究的深入發展。邏輯學家塔爾斯基曾經指出: “必須強調的 是, 悖論在現代演繹科學基礎的建立中, 佔有重要地位。”

∗ M. 克萊因著《古今數學思想》上海科技出版社出版, 1984年第四册 p.294。

1.希伯索斯悖論與數學發展史上的第一次危機

數學發展史上的第一次危機發生於古希臘時期。當時畢達哥拉斯學派所倡導的是一種 “唯數論”的哲學觀, 他們認爲宇宙的本質就是數的和諧, 一切事物和現象都可以歸結爲整數或整數與整數之比。後來, 該學派的一個成員希伯索斯 (Hippasus) 意外地發現: 等腰直角三角形任一腰與其斜邊不可公度。** 例如, 設等腰直角三角形的一腰爲 a, 斜邊爲 b, 則有

$$2a^2 = b^2, \qquad \frac{b}{a} = \sqrt{2}。$$

由於 $\sqrt{2}$ 這類無理數的發現, 打破了畢達哥拉斯學派的信條, 致使數學界產生了思想混亂, 從而爆發了第一次數學危機。因爲希伯索斯悖論發現之後, 不能不使人們驟然感到以前所積累的一切數學知識, 似乎是都從根本上被推翻了。由此可見, 說它是一次數學危機, 也並非是言過其實。

經過這次數學危機的沖擊, 古希臘的數學家們, 不得不承認直觀和經驗並非絕對可靠, 希望對過去由經驗而直接得到的幾何知識, 都能夠由嚴格的邏輯推理來加以證明。從而, 在克服這次危機的過程中, 有力地促進了歐氏幾何和非歐幾何的誕生!

2.貝克萊悖論與數學發展史上的第二次危機

數學發展史上的第二次危機, 所涉及的主要對象是微積分理論。在當時, 由牛頓和萊布尼茲所發明的微積分, 存在明顯的邏輯矛盾。例如, 對於 $y = x^2$ 而言, 根據牛頓的流數計算法有:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 \tag{1}$$
$$x^2 + \Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \tag{2}$$
$$\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \tag{3}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x \tag{4}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x \tag{5}$$

在上述推理中, 從 (3) 推得 (4), 要求 Δx 不等於零; 而從 (4) 推得 (5), 又要求 Δx等於零。在這種運算中, 無論是把無窮小量看作是零還是非零, 都不能自圓其說。早在 1694 年, 荷蘭數學家紐文蒂就曾經對無窮小量的應用, 提出過指責。及至 1734 年, 英國大主教 J·貝克萊在其所著《分析學家》一書中, 譏諷 Δx 是“逝去量的鬼魂,” 其指責的言詞則達到了高潮。由於貝克萊悖論在當時數學界引起了混亂, 從而導致了第二次數學危機的爆發。

爲了解決這次數學危機, 在十九世紀時期, 經過柯西 (A.L. Cauchy, 1789-1857) 和威爾斯特拉斯 (K. Weierstrass, 1815-1897) 等人的研究, 才創造出現行數學分析教科書中所採用的那種 “ε—δ” 推理形式, 即

** 希伯索斯遠在公元前四、五百年, 先證明: 正五邊形的邊長與對角線長不可公度, 後又證明: 正方形的邊長與對角線長也不可公度。參見項武義等著《古典幾何學》, 1986年復旦大學出版社出版, p. 35-37。

建立了嚴格的極限理論, 借助於極限理論, 從形式邏輯上論證了無窮小量的演算, 這樣就基本上解除了第二次數學危機。

3.羅素悖論與數學發展史上的第三次危機

在十九世紀初, 法國著名數學家柯西在極限理論的研究中, 提出一個基本定理: "若數列 X_n 單調上升, 並有上界 M, 則 X_n 必有極限。" 他在證明該定理時由於借助於幾何直觀, 不能令人滿意。後來德國數學家戴德金 (J.W.R. Dedekind, 1831-1916) 經過深入研究, 發現這個問題牽涉到實數的性質, 不久, 他又建立了嚴格的實數理論。接著, 德國的大數學家康托 (G. Cantor, 1845-1918) 把研究的對象加以擴大, 抽象成爲集合論, 並且利用集合論來解決整個數學的基礎問題。當時, 數學界對於集合論的評價很高。1900年, 在巴黎召開的第二屆國際數學家大會上, 法國數學家 H. 龐卡萊 (Poincaré, 1854-1912) 公開宣稱: "數學的嚴格性, 看來直到今天才可以說是實現了。" 然而, 事隔兩年, 1902年突然傳出了一個驚人的消息: 集合論的概念本身出現了矛盾, 這就是著名的羅素悖論, 從此爆發了第三次數學危機。

從表面上來看, 由於嚴格的實數理論和極限理論的建立, 前兩次數學危機已經得到解決。但是, 殊不知實數理論 和極限理論都是以集合論爲基礎的。因而, 在一定的意義上來說, 由集合論悖論所導致的第三次危機, 乃是前兩次危機的繼續與發展, 它所涉及的問題更加廣泛, 因而, 危機感也更爲深刻。

爲了排除已經發現的一些集合論悖論, 數學家策墨略和弗倫克爾構造了一個名爲"ZF" 的集合論公理系統。1940年, 數理邏輯學家哥德爾 (K. Gödel, 1906-1976) 又證明了 ZF 公理系統與選擇公理彼此相容。因此, 現在實際上存在著兩套集合論公理, 其一包含有選擇公理, 稱爲選擇型集合論, 另一又稱爲非選擇型集合論。然而, 不管你承認選擇公理或不承認選擇公理, 都會引出一些新的悖論, 因此, 必須淸楚地看到: 數學理論體系至今尙未實現最終的和諧與完美, 亦即是第三次數學危機至今尙未獲得圓滿地解決。

五. 由悖論而導致的三大數學哲學學派的激烈爭辯

在集合論悖論的刺激下, 三大數學哲學學派: 邏輯主義、直覺主義和形式主義逐步發展起來。他們首先以解決悖論爲己任, 各自做了大量的工作。爲此, 在本世紀初掀起一場大論戰, 在論戰中, 他們各抒己見, 相互攻擊。克萊因在《古今數學思想》一書中說: "邏輯主義、直覺主義或形式主義都沒有達到目的, 沒有爲數學提供一個可以普遍接受的途徑。" 事態發展到今天, 這三個學派各取所長, 逐步形成一個統一的數學分支—數學基礎。當今對於數學基礎的根本問題所提出的解答, 乃是集合論的公理化。現在分別介紹一下這三大學派的學術觀點:

1.邏輯主義學派認為優美的數學表現為一首邏輯概念的詩篇

邏輯主義學派的根本目的, 即在於把純粹數學變成一首邏輯概念的詩篇。這個學派的代表人物是英國數學家兼哲學家羅素 (B. Russell, 1872-1970) 和懷特海 (A.N.

Whitehead, 1861-1947), 他們合著的一部世界名著《數學原理》, 爲了排除悖論, 企圖實現全部數學邏輯化, 並在該書中滿懷信心地預計未來: “原先佔統治地的混亂和躊躇, 將爲次序和確定性所代替。”

羅素曾經十分自豪地說:“從邏輯中展開純數學的工作, 已經由懷特海和我在《數學原理》一書中詳細地做出來了。”但是絕大多數數學家都是不承認的, 他們提出在羅素的推導過程中, 使用了無限公理和選擇公理, 而這兩條公理都是數學公理。然而, 總的來說, 羅素和懷特海的工作, 對於數理邏輯的發展以及電子計算機和人工智能的研究, 都具有深遠的理論意義。

當邏輯主義者意識到爲數學奠定一個永恆的基礎無法實現時, 不禁哀嘆道: “我所一直尋找的數學的光輝的確定性, 在令人困惑的迷宮中喪失了。”[2]

羅素爲了追求數學理論的完美, 在《數學原理》一書中, 將純粹數學的基礎成功地歸結爲少數基本邏輯概念和幾條基本邏輯原理。邱奇曾經客觀地評論說:“如果說···數學的原始基礎的歸納, 確實是可以通過不同的方法來實現, 那麼無論如何, 這種歸納的第一個範例是由邏輯主義完成的。”[3]

2.直覺主義學派認為數學的美在於構造性程序清晰

近代直覺主義學派的代表人物是荷蘭數學家布勞威爾 (L.E.J. Brouwer, 1881-1967), 他們把數學思維理解爲是一種構造性程序, 有點像是自由設計。這個學派認爲數學理論的眞僞, 只能用人的直覺去判斷, 而最基本的直覺是按時間順序而出現的感覺, 永遠達不到無限 (即實無限)。所謂“一切集合的集合”等概念, 是不能用直覺來理解的, 因此不能承認它的合理性, 這樣悖論也就可以避免了。

這個學派的另一個代表人物黑丁在《直覺主義導論》一書中曾經提出: 數學直覺能夠使“概念和推理十分淸楚地呈現在我們的面前。”他認爲這樣辦 “對於思想來說, 如此直接; 對於結果來說, 又是如此的淸楚。以致不再需要任何別的什麼基礎了。”

3.形式主義學派認為數學的美在於形式上的簡單與相容

形式主義學派的代表人物是德國數學家希爾伯特 (D. Hilbert, 1862-1943), 他們認爲無論是數學的公理系統, 或者是邏輯的公理系統, 只要是相容的, 就不會含有悖論, 因而便可得到承認。

美國數學家克萊因曾經評論說:“數學不成爲關於 什麼東西的一門學科, 而是一堆形式系統。在每一個系統中, 形式表達式都是用形式變換從另一些表達式得到的。在希爾伯特的方案中, 關於數學的本質部分, 就是這些。”[4] 不管形式主義的計劃成功與否, 對於直覺主義者來說, 都是不能接受的。荷蘭數學家布勞威爾 (L.E.J. Bronwer, 1881-1966) 1925年在攻擊形式主義者時曾經這樣說過:“公理化的辦法, 形式主義的辦法, 當然都會避免矛盾, 但是用這種辦法不會得到有數學價値的東西。一個錯誤的理論, 即使沒有一點兒矛盾, 也仍然是錯誤的。正如一種罪行, 不論法律上是否禁止, 都是有罪的”[5] 直覺主義的另一位代表人物德國數學家外爾

(C.H.H. Weyl, 1885-1955) 也極力地諷刺形式主義學派, 他說:“希爾伯特的數學, 或許是一種美妙的書寫遊戲, 甚至比下棋更好玩, 但是它與認識毫無關係。”[6]

當然, 希爾伯特也反過來攻擊直覺主義學派, 說他們想要扔掉自己所不喜歡的每一件東西, 並且專橫地宣布一道禁令: 不承認排中律, 不准使用反證法。希爾伯特在反駁這種觀點時曾說:“禁止數學家使用排中律, 就像禁止天文學家使用望遠鏡或拳師使用拳頭一樣。”[7]

其實, 布勞威爾的這種主張是指: 你沒有構造出來, 就不能說是“存在”, 否定“無窮多個元素都具有某種性質”; 並不能直覺地告訴我們哪一個元素具有此種性質, 因而, 反證法不能亂用。布勞威爾的這種構造性觀點, 現在已爲絕大多數數學家們所接受。

六. 悖論破釋在數學教學以及企業管理和社會生活中的效用

1.悖論破釋在數學教學中的效用

有些數學悖論也可改寫爲數學悖論題, 這種數學悖論題雖然不符合於由弗蘭克爾等人所提出的關於悖論的現代定義; 但卻符合於悖論的古典定義, 並且具有實際應用價值。這種題型幽默風趣, 妙不可言, 往往可以引人入勝。並且, 每破釋一個悖論, 都可從正反兩個方面來加深學生對於數學基本概念和基本方法的理解。如能在教學中有計劃地設計一些數學悖論題, 並且默默地引導學子進行破釋, 還可進一步啓迪學生學習數學的興致。現在舉例如下:

在 $\triangle ABC$ 中, 設 A爲鈍角, B爲銳角, 且 A, B 的對邊分別爲 a, b。然而, 鈍角的正弦値有時比銳角的正弦値小, 即可能有 $\sin A < \sin B$, 由 $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$, 可得 $a < b$。因而, 可以設計一個數學悖論題如下:

在同一個三角形中大角也可能對小邊。

悖論破釋: 由於三角形中三個內角之和爲 $180°$, 因而有 $\angle A + \angle B < 180°$, 在該兩角中鈍角之正弦必定大於另一銳角之正弦, 即 $\sin A > \sin B$, 因而有 $a > b$。由此可得結論: 在同一個三角形中大角所對的邊也大。

2.悖論破釋在企業管理和社會生活中的效用

悖論有時也棲身於企業管理的經濟問題之中, 或社會生活的繁鎖小事之中, 但是, 經過破釋, 可以產生經濟效益。現在舉例如下:

某市工人文化宮舉辦元宵燈謎活動, 備有一定數量的獎品。爲了減少獎品發放的數量, 主辦單位規定猜對燈謎者還要抽簽, 中簽者方可領獎。

這個活動共設兩座猜謎大廳, 其中各有紅白簽兩種。東大廳有紅簽25根, 其中中獎簽12根; 有白簽75根, 其中中獎簽33根。西大廳有紅簽75根, 其中中獎簽24根; 有白簽25根, 其中中獎簽7根。請問在這兩個大廳裡各抽哪種簽較爲有利?

通過計算得知: 在東大廳裡, 紅簽中獎的機會是 48%, 白簽中獎的機會是 44%, 抽紅簽中獎機會較大。在西大廳裡, 紅簽中獎的機會是32%, 白簽中獎的機會是28%, 仍是抽紅簽中獎的機會較大。

後來, 由於某種原因, 主辦單位決定: 把全部紅白簽分別集中起來, 將兩大廳的抽簽

活動合併舉行。在這種情況下, 應該抽哪種簽呢? 大概百分之九十九的人都認爲, 當然是抽紅簽。然而, 紅簽的中獎率爲 $\frac{24+12}{75+25}=36\%$, 而白簽的中獎率爲 $\frac{33+7}{25+75}=40\%$, 即是說, 在這種條件下, 抽白簽爲宜。欲深究其奧秘, 且看悖論破釋:

從數學理論而言:

假設 $\frac{a'}{a}>\frac{b'}{b}$, $\frac{c'}{c}>\frac{d'}{d}$,

則 $\frac{a'}{a}+\frac{c'}{c}>\frac{b'}{b}+\frac{d'}{d}$ 一定成立,

而 $\frac{a'+c'}{a+c}>\frac{b'+d'}{b+d}$ 不一定成立。

總之, 對於悖論的認識, 就是對於認識的歷史局限性的再認識。邏輯學家赫茲貝格曾經說過:"悖論之所以具有重大意義, 是由於它能使我們看到對於某些根本概念的理解存在有多大的局限性, $\cdots$ 事實證明, 它是產生邏輯和語言的新觀念的重要源泉"。

注釋

[1] Scientifie American, 6, 1969, p.66。

[2] 羅素著《我的哲學的發展》商務印書館翻譯出版, p.195。

[3] 邱奇:《數學與邏輯》《自然科學哲學問題叢刊》, 1983年4月。

[4] 克萊因:《古今數學思想》第四册, p.318, 上海科學技術出版社, 1981 年出版。

[5] 書名同 [4], p.322。

[6] 書名同 [4], p.322。

[7] 書名同 [4], 第三册 p.317。

—本文作者任教於安徽省阜陽師範學院—