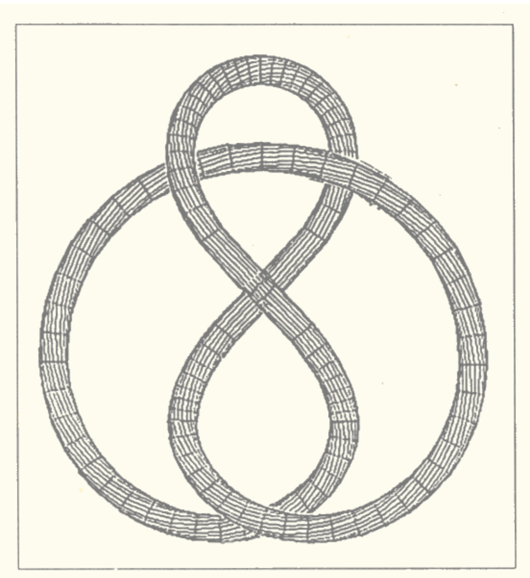
環結論

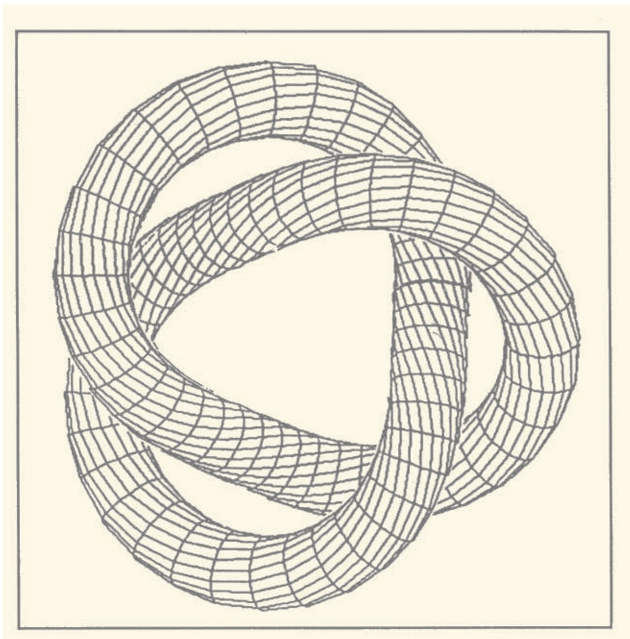
平 斯

四十年前發現遺傳基因 DNA 的雙螺旋體結構，完成這件科學上重要成就的是華生 (J. Watson) 和饋客 (F. Crick) 丑淨兩個主角。前者甚至把這段曲折離奇的經過，總結成一本暢銷書 Double Helix 深刻的描寫科學家之間爾虞我詐，勾心鬥角。比起當今華爾街資本家的血腥鬥爭，不遑多讓。由我們這些生物學的門外漢看來，華生寫這本書的貢獻，直逼和他同年獲諾貝爾獎的大文豪史坦貝克 (J. Steinbeck) 比較起來，他在實驗室裡所做啥事，實在微不足道。那書上一開始就形容他的伙伴饋客是個天縱聰明，不知謙虛為何物的人，也只有這種人才會提出別人未見的有趣問題。



圖一

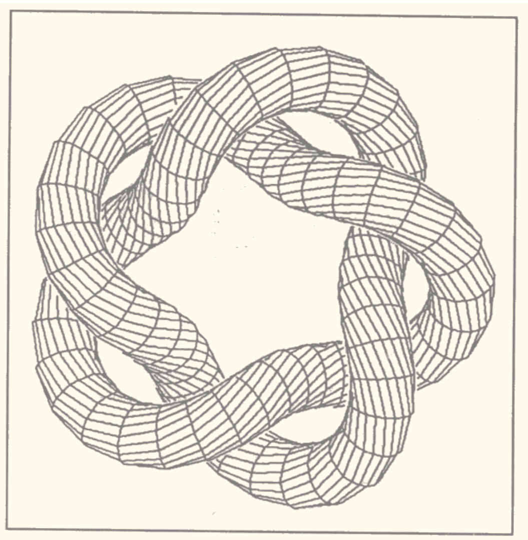
首先 DNA 的基本架構是兩股分子群扭搭成的雙螺旋體，這條又細又長的分子，會再捲曲。經過複製，截斷和重組等複雜的過程後，可想而知饋客要問：它會不會打結？什麼結？反應了什麼生物遺傳功能的特性？哈佛大學的王倬，不僅觀察到打結，還找出控制打結或解套機制的礴 topoisomerases 這個名稱的字首就是拓樸，因為其中牽涉到的數學模式，正是拓樸裡的一門學問：環結論 (Knot theory)。這也是為什麼生物遺傳學家近來忙著向數學



圖二

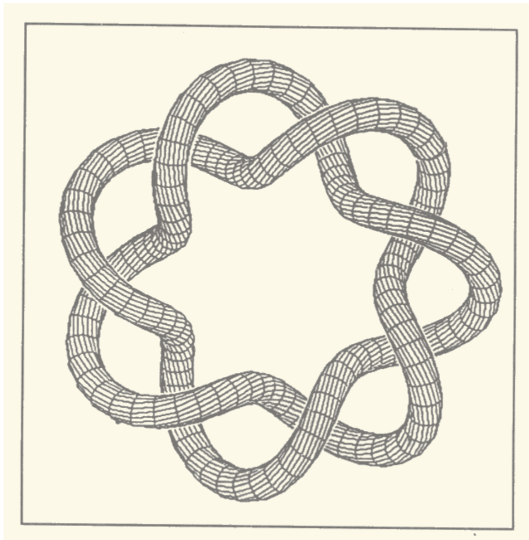
家取經的緣故。其實環結論之所以成爲今日的顯學, 卻有格外的原因, 那又是另外一段擦槍走火, 誤中老虎的故事。

從早些年, 美蘇超強交惡冷戰時, 彼此刺探軍情, 摸對方海底的兩個方法是間諜滲透和空中探照。1989年項武義在台大登壇授法, 推衍李群時, 曾經比方說要瞭解一個群的底細, 用的也是這兩個方法。所謂滲透的間諜, 就是單維子群, 而空中探照就是在某些個熟悉的群上所做的表現。例如用圓周群來表現交換群是古典富氏分析 Fourier 的主要內容。1896年浮必尼 Frobenius 爲了克服不可交換, 改用方陣所構成的線性代數, 完成了有限群的表現, 這套理論在結晶學裡十分管用。等到1930年代, 拓樸理論臻於成熟, 各式各樣的緊緻觀點逐漸取代了有限或離散, 方陣代數自然就不夠用了。同時物理方面從古典力學演進到量子力學, 群的表現格外重要, 終於在迫切需要的環境下, 產生了馮諾曼 (Von Neumann) 代數。



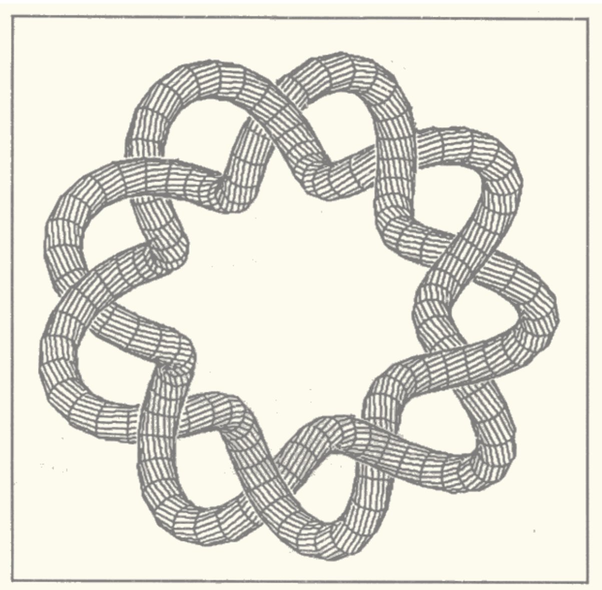
圖三

這種代數有五大類因子 I_n, I_∞, II_1, II_∞ 和 III。其中 I_n 就是前面所提到的 n 維線性代數, 將維數驅至無窮就是 I_∞, 剩下的三類, 當時只有少許特殊的個別例子, 至於是否還有其他例子, 這始終是個非常有趣的題目。關於因子 III 的分類在法國人康亞倫 (A. Connes) 的手裡完成, 他不因此滿足, 進而利用在指數定理和覆葉論 Foliation。開拓了幾何新的視野, 可以說是成就輝煌, 在1982年獲得菲爾滋獎 (Fields Medal)。在日內瓦覆葉論的專家 A. Haefliger 收了一個澳紐來的徒弟瓊斯 (V. Jones) 自然的就從馮諾曼代數下手。只是他做的對象是 II_∞因子, 好不容易得到一組有限的建元。當他拎著到柏克萊的時候, 還不知道這些建元有什麼奧妙用途, 幸虧當地不乏飽學之士, 能提供具體有用的建議, 於是他像個推銷員似的, 又拎著來到紐約, 找哥倫比亞的帛棉 (J. Birman)。



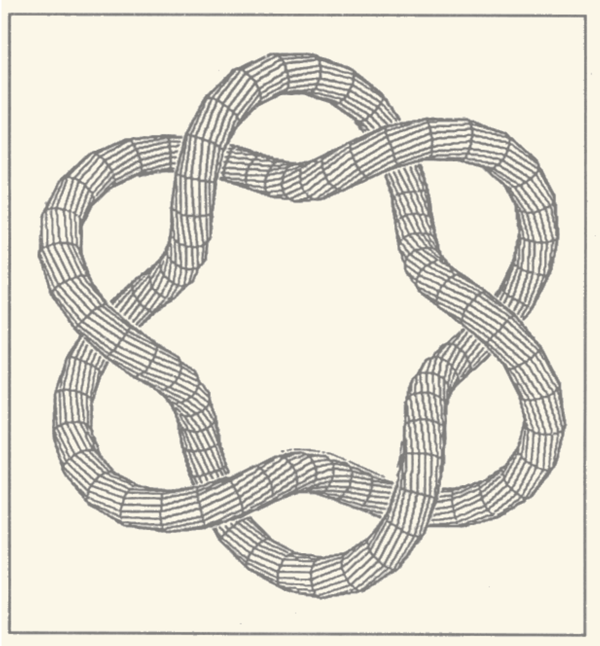
圖四

她是個紮辮子的專家, 形形色色的辮子後面, 有個抽象的理論—辮論 (Braid theory), 是阿丁 (Emil Artin) 在1925年首創的一門學問, 多年來它只像深古幽蘭那樣, 靜靜的孤芳自賞, 一直到1984瓊帛的紐約之會。在一星期內, 他們發現辮群透過建元, 能在 II_1 的次因子黑克 (Hecke) 代數上表現, 一方面每個環結對應一個辮子, 令一方面黑克代數上可以定義帶有變數的跡, 兩者結合起來, 輕描淡寫的就得到一個瓊斯多項式, 用來標示環結, 妙用無窮。這一來不得了, 全世界做環結論的人都從睡夢中驚醒, 興奮得個個磨拳擦掌, 來搶奪後續發展。競爭得非常激烈, 緊張的情況到有四路人馬所發現的結果, 合併在一齊發表, 互稱先馳得點 (參考一), 即使如此, 還是漏了另外一組, 只好飲恨遺珠。



圖五

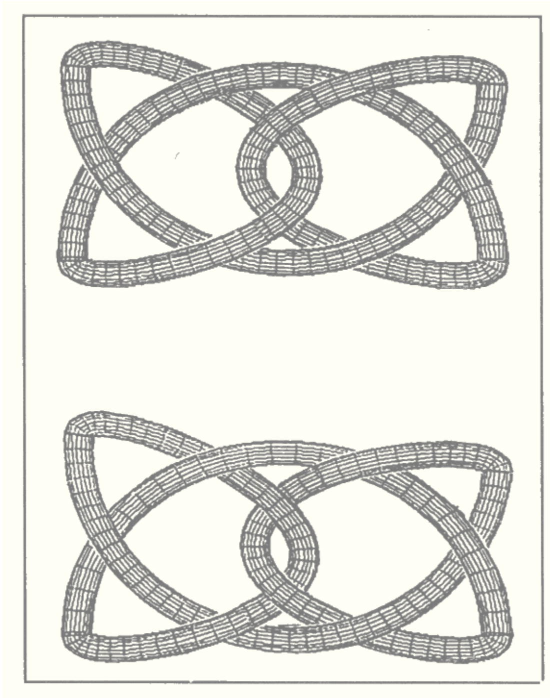
令人迷惑的是瓊斯多項式何以儻來之易? 有什麼拓樸上的根據? 因為目前導出的方法是代數或組合的。那不能算數, 幾何問題應該用幾何的手段, 才叫高明, 因此1990費爾滋獎給了瓊斯, 問題還在, 令人若有憾焉。



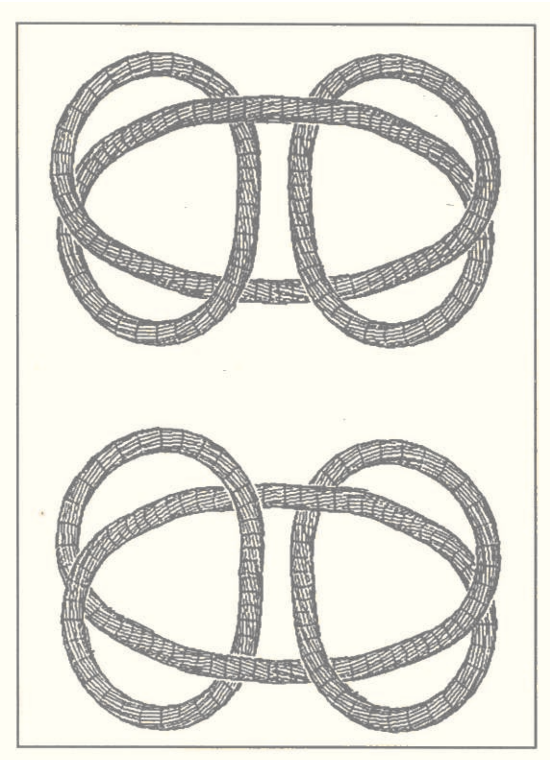
圖六

環結論有今天的風光, 在歷史上可不是這樣看的。最先研究的人, 據說是高斯 (C. Gauss) 手下的一個學生李思亭 (Listing) 目前有個常用的 ∞ 字結還掛他的名 (圖一)。後來物理盛行波動說, 凡是波都需要載體, 例如聲波在空氣中進行, 在眞空中阻絕。一般相信電磁波的載體是以太海 ether。那個大英帝國時代的權威科學家喀爾文 (Kelvin) 認為原子會干擾波, 所以是以太海裡的小渦流, 看起來就是環結, 不同的原子必有不同的渦流, 所以原子周期表對應了一個環結表。他的長期同夥 P. G. Tait 如響斯應, 果然致力去編這個表。當然以太海的觀點早就成了昨日黃花, 但是環結表卻留了下來。經過多年來不斷

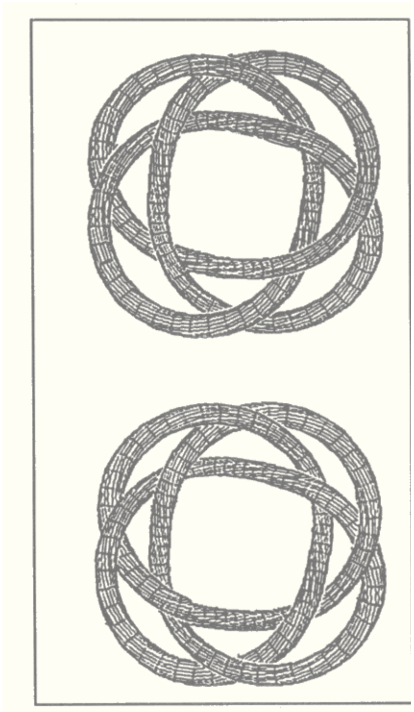
擴張, 目前可以列出交點數目不超過13的環結有12965個。普通書上只列質結, 交點在10之內的約有250個 (參考二)。重點不是要把它們全部列出來, 而是要找個不變量來標示, 正如瓊斯多項式的做法。其實若要檢驗一個環是否打結, 在大學程度的幾何學 (參考三) 可用全曲率是否超過4π來判斷。這是繆勒 (J. Milnor) 利用最粗糙的摩斯 (Morse) 理論在大學生時代初試啼聲所做的成果, 難怪後來果成大器, 列為微分拓樸的開山祖師。類似的幾何量還有全撓率, 那是懷特 (J. White) 最常被生物學家拿來用的一個不變量。



圖八

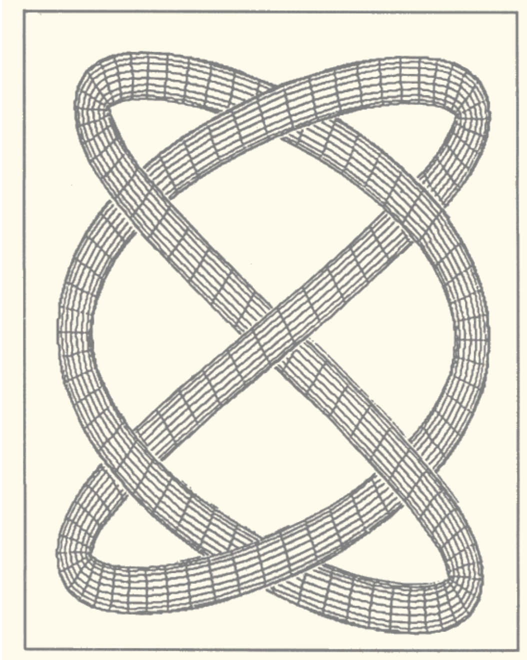


圖七



圖九

各種環結有特別的名稱 (參考四), 童軍手册或航海備要之類的書還詳細的解釋這些來源和用途。我們列舉一些簡單的結, 本來應是細細一道線的結, 爲了做圖方便, 故意膨脹變粗了。最簡單的要數單結 (圖二) 又叫三葉結 trefoil。這個結可以嵌在環面上, 所以是一種環面結 Torus Knot 用$T_{3,2}$代表。接下來的三個 (圖三、四、五) 也都是環面結, 代號分別是 $T_{5,2}$, $T_{7,2}$, $T_{9,2}$ 其中圖三又叫所羅門封(Solomon seal), 呼應以色列國旗上六角形的大衛之星 (David Star), 這個猶太人的象徵是個鏈 (Link) 而不是結 (圖六) 嫌它稜角殺氣太重, 才畫成圓弧形。打死結時用的是方結 (Square Knot)(圖七上) 又叫水手結 (Sailor's Knot) 不小心打錯成 (下), 這樣的死結不牢靠, 會滑動, 所以叫祖母結 (Granny Knot), 爲避免冒瀆阿媽, 又叫 Lubber's Knot。複雜一點時有兩個情人結 (圖八), 上是眞情 (True Lover's Knot), 下是假意 (False Lover's Knot)。最複雜的是兩個裝飾用的結 (圖九), 上是蝴蝶結 (Bowline Knot), 下是淸眞纏頭結 (Turk's head knot), 船上的桅桿折斷時, 緊急中水手就用這個結, 這也是個環面結, 代號是$T_{4,3}$。以上都是由兩個單結衍生出來的一系列變化。最後 (圖十) 是蜜蜂採到花蜜之後, 在空中所跳的舞步, 由平面上看是一條 Lissajou 曲線, 格外可人 。



圖十

參考資料

1. Homfly, AMS Bulletin (1985), 183-312.
2. D.Rofson, Knots and Links (1976).
3. 熊全智, A first course in Differential geometry (1981).
4. R. Crowell and R. Fox, Introduction to Knot theory.