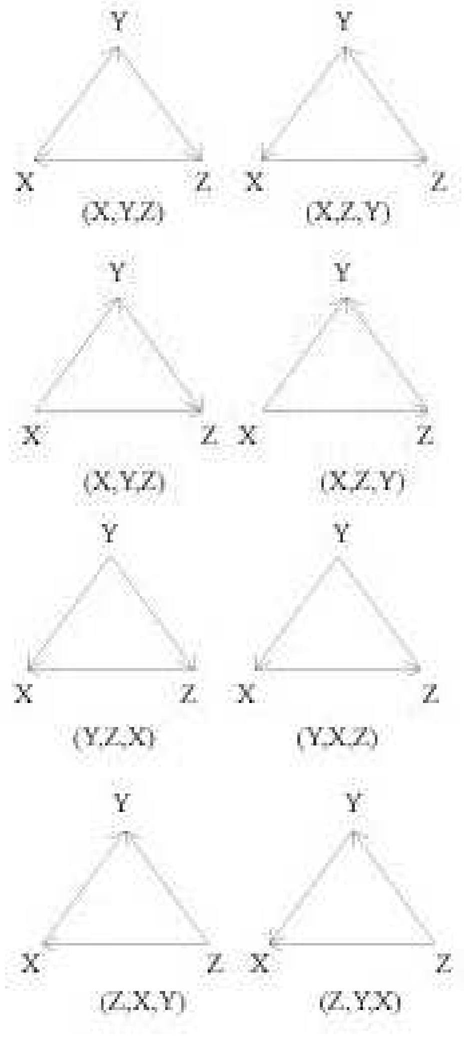
有序的三元系和它們的大集

康慶德

一. 引言

本文是“從西爾威斯特問題談起”(見本刊第十五卷第二期) 的一個續篇。在那篇中, 我們介紹了幾類區組設計 (包括無序的和有序的) 以及區組設計的大集問題。這裡我們將僅談有序設計, 特別是要介紹一下有序三元系及其大集的最近進展情況。首先, 讓我們再重溫幾類有序三元系的概念。

設 X 是一個 n 元集。X上的一個循環三元組指的是由三個有序對 (x,y), (y,z), 與 (z,x) 構成的一個組, 它被簡記爲 $\langle x,y,z\rangle$; 而 X 上的一個可遷三元組指的是由三個有序對 (x,y), (y,z) 與 (x,z) 構成的組, 它被簡記爲 (x,y,z); 這裡, x,y,z 是 X 中的不同元。注意, 由定義可見, 循環三元組 $\langle x,y,z\rangle$ 與 $\langle y,z,x\rangle$, $\langle z,x,y\rangle$ 是同樣的, 但可遷三元組 (x,y,z) 與 (y,z,x) 及 (z,x,y) 卻一定是不同的。事實上, X 中給定的三個不同元僅可組成兩個不同的循環三元組, 但卻可組成六個不同的可遷三元組。從圖的觀點看, 若將 X 中的元看作點, 兩個不同元構成的有序對 (x,y) 看作是點 x 到點 y 的一條有向邊, 那麼由 x,y,z 構成的兩個循環三元組和六個可遷三元組分別表示以下所示的一些有向三角形:



這些有向三角形中的前兩個, 通常亦被記爲 C_3, 而後六個則被記爲 TT_3 (即三點平移賽程圖)。

v 元集 X 的一些循環三元組構成的 $\mathcal{A}$ 稱作是一個指數爲 λ 的 v 階 Mendelsohn 三元系, 如果 X 中任二不同元的有序對都恰被包含在 $\mathcal{A}$ 的 λ 個循環三元組中, 它被記爲 $MTS(v,\lambda)=(X,\mathcal{A})$。$X$ 的一些可遷三元組構成的 $\mathcal{B}$ 稱作是一個指數爲 λ 的 v 階可遷三元系, 如果 X 中任二不同元的有序對都恰被包在 $\mathcal{B}$ 的 λ 個可遷三元組中, 它被記爲 $DTS(v,\lambda)=(X,\mathcal{B})$, (註: 它亦曾記作 $TTS(v,\lambda)$, 但爲避免與其它設計符號混淆, 已大多採用 DTS)。由 X 的一些循環三元組和一些可遷三元組構成的 $\mathcal{C}$ 稱作是一個指數爲 λ 的混成三元系, 如果 X 中任二不同元的有序對都恰被包含在 $\mathcal{C}$ 的 λ 個有序三元組 (即循環的或可遷的三元組) 中, 它被記爲 $HTS(v,\lambda)=(X,\mathcal{C})$, (這是上一篇文章中所介紹的 OTS 的特例。在 OTS 的定義中允許區組集僅由單一類型的有序三元組構成, 但在這裡的 HTS 意義下, 區組集 $\mathcal{C}$ 必須是“混成的”, 即其中既有循環三元組也有可遷三元組)。不難算出, 每個 $MTS(v,\lambda)$, (或 $DTS(v,\lambda)$, 或 $HTS(v,\lambda)$) 都恰好包含有 $\lambda v(v-1)/3$ 個三元組。因此這三類有序三元系存在的必要條件都是 $3|\lambda v(v-1)$。人們早已證明了:

定理1: $MTS(v,\lambda)$, $DTS(v,\lambda)$ 與 HTS (v,λ) 存在的充分必要條件是 $3|\lambda v(v-1), v\geq 3$, 除去不存在 $MTS(6,1)$ 之外。

當 $\lambda=1$ 時, $MTS(v,1)$(簡記爲 $MTS(v)$) 存在的譜是 $v\equiv 0,1(mod\ 3)$, $v\geq 3$, $v\neq 6$。而 $DTS(v)$ 與 $HTS(v)$ 存在的譜都是 $v\equiv 0,1(mod\ 3)$, $v\geq 3$。

例1. $X=\{0,1,2,3\}$, $\mathcal{B}=\{\langle 0,1,2\rangle,\langle 1,\ 0,3\rangle,\langle 2,3,0\rangle,\langle 3,2,1\rangle\}$, 則 $(X,\mathcal{B})$ 即是一個 $MTS(4)$, 而若將 $\mathcal{B}$ 中各區組的角括號“$\langle\ \rangle$”改爲圓括號“( )”, 則它將是一個 $DTS(4)$。

例2. $X=Z_5=\{0,1,2,3,4\}$, 即模 5 剩餘類環, $\mathcal{B}$=$\{(i,i+1,i+2)$,$(i,i+2,i+4)$,$(i,i+3,i+1)$,$(i,i+4,i+3)$; $i\in Z_5\}$。則 $(X,\mathcal{B})$ 是一個 $DTS(5,3)$。而若將首尾兩族區組的圓括號改爲角括號, 它將成爲一個 $HTS(5,3)$, 其中有循環三元組和可遷三元組各10個。

例3. $X=\{0,1,2,3,4,5\}$。對於 X 的每個三元子集 $\{a,b,c\}$ (不妨假定 $a<b<c$), 當 $a+b+c$ 爲偶數時令 $\langle a,b,c\rangle\in\mathcal{B}$, 而當 $a+b+c$ 爲奇數時令 $\langle a,c,b\rangle\in\mathcal{B}$, 這樣得到的 $(X,\mathcal{B})$ 將是一個 $MTS(6,2)$。

不難知道, v 元集 X 共有 $v(v-1)(v-2)/3$ 個循環三元組和 $v(v-1)(v-2)$ 個可遷三元 組。如果 X 的全部循環三元組可分拆爲若干個 $\mathcal{B}_i$, 使得每個 $(X,\mathcal{B}_i)$ 都是一個 $MTS(v,\lambda)$, 則稱它們構成一個 $LMTS(v,\lambda)$, 即指數爲 λ 的 v 階 Mendelsohn 三元系大集。類似地, 我們可以給出指數爲 λ 的 v 階可遷三元系大集 $LDTS(v,\lambda)$ 及指數爲 λ 的 v 階混成三元系大集 $LHTS(v,\lambda)$ 的概念。顯然, 每個 $LMTS(v,\lambda)$ 由 $\frac{v-2}{\lambda}$ 個兩兩無公共三元組的 $MTS(v,\lambda)$ 組成, 每個 $LDTS(v,\lambda)$ 由 $\frac{3(v-2)}{\lambda}$ 個兩兩無公共三元組的 $DTS(v,\lambda)$

組成, 而每個 $LHTS(v,\lambda)$ 由 $\frac{4(v-2)}{\lambda}$ 個兩兩無公共三元組的 $HTS(v,\lambda)$ 組成。

例4. 取例1中的 $MTS(4)=(X,\mathcal{B})$, 令 $\mathcal{B}^{-1}=\{\langle c,b,a\rangle;\langle a,b,c\rangle\in\mathcal{B}\}$, 則 $(X,\mathcal{B}^{-1})$ 也是一個 $MTS(4)$, 而且 $\mathcal{B}$ 與 $\mathcal{B}^{-1}$ 恰構成 X 的全部 (8個) 循環三元組的一個分拆。故得到 $LMTS(4)=\{(X,\mathcal{B}),(X,\mathcal{B}^{-1})\}$。

例5. 取例1中的 $DTS(4)=(X,\mathcal{B})$, 並取 X 上的置換 $\pi=(0)(123)$。令 $\mathcal{B}_i=\pi^i\mathcal{B}=\{(\pi^ia,\pi^ib,\pi^ic);(a,b,c)\in\mathcal{B}\}$, $i=0,1,2$。並令 $\mathcal{B}_{i+3}=\mathcal{B}_i^{-1}$, $i=0,1,2$。則我們可以得到一個 $LDTS(4)=\{(X,\mathcal{B}_i);\ 0\le i\le 5\}$。事實上, 我們有

$\mathcal{B}_0:$	(0,1,2)	$\mathcal{B}_1:$	(0,2,3)	$\mathcal{B}_2:$	(0,3,1)
	(1,0,3)		(2,0,1)		(3,0,2)
	(2,3,0)		(3,1,0)		(1,2,0)
	(3,2,1)		(1,3,2)		(2,1,3)
$\mathcal{B}_3:$	(2,1,0)	$\mathcal{B}_4:$	(3,2,0)	$\mathcal{B}_5:$	(1,3,0)
	(3,0,1)		(1,0,2)		(2,0,3)
	(0,3,2)		(0,1,3)		(0,2,1)
	(1,2,3)		(2,3,1)		(3,1,2)

例6. $X=Z_4=\{0,1,2,3\}$, $\mathcal{B}_0=\{\langle 1,2,3\rangle,(1,0,3),(2,0,1),(3,0,2)\}$, $\mathcal{B}_i=\mathcal{B}_0+i$, 即 $\mathcal{B}_0$ 每個區組的各個元均加 i $(mod\ 4)$, 區組類型不變, $i=1,2,3$, 並令 $\mathcal{B}_{i+3}=\mathcal{B}_i^{-1}$ $(i=0,1,2,3)$ 則 $\{(X,\mathcal{B}_i);\ 0\le i\le 7\}$ 即是一個 $LHTS(4)$。

例7. $X=\{0,1,2\}$, $\mathcal{B}_0=\{\langle 0,1,2\rangle,(1,0,2),(2,1,0),(0,2,1)\}$, $\mathcal{B}_1=\mathcal{B}_0^{-1}$, 則 $\{(X,\ \mathcal{B}_i);\ 0\le i\le 1\}$ 是一個 $LHTS(3,2)$。

例8. 取例2中的 $DTS(5,3)=(X,\mathcal{B})$, 記 $\mathcal{B}_0=\mathcal{B}$。再令 $\mathcal{B}_1=\{(i,i+1,i+3),(i,i+2,i+1),(i,i+3,i+4),(i,i+4,i+2);\ i\in Z_5\}$, $\mathcal{B}_2=\mathcal{B}_1^{-1}$, 則 $\{(X,\mathcal{B}_i);\ 0\le i\le 2\}$ 是一個 $LDTS(5,3)$。

例9. 取例3中的 $MTS(6,2)=(X,\mathcal{B})$, 則 $\{(X,\mathcal{B}),(X,\mathcal{B}^{-1})\}$ 將構成一個 $LMTS(6,\ 2)$。

從圖論的觀點看, $MTS(v)$ 是 v 階對稱完全有向圖 K_v^*(即一個 v 點有向圖, 任二點 x,y 之間都有 x 到 y 和 y 到 x 的有向邊各一條) 的全部有向邊的一個分拆 $\bigcup\mathcal{C}_3$。通常記此種分拆爲 $K_v^*\to\mathcal{C}_3$。$MTS(v,\lambda)$ 則是一個 $\lambda K_v^*\to\mathcal{C}_3$ (λK_v^* 表示 K_v^* 的每條有向邊重複 λ 次的一個多重有向圖)。而 $DTS(v,\lambda)$ 是 $\lambda K_v^*\to TT_3$, $HTS(v,\lambda)$ 是 $\lambda K_v^*\to(\mathcal{C}_3$ 與 $TT_3)$。進而, $LMTS(v,\lambda)$ 是 $\frac{v-2}{\lambda}$ 種不同的 $\lambda K_v^*\to\mathcal{C}_3$, 使得 K_v^* 的每個 $\mathcal{C}_3$ 都恰出現於一種分拆中; $LDTS(v,\lambda)$ 是 $\frac{3(v-2)}{\lambda}$ 種不同的 $\lambda K_v^*\to TT_3$, 使得 K_v^* 的每個 TT_3 都恰出現於一種分拆中; 而 $LHTS(v,\lambda)$ 是 $\frac{4(v-2)}{\lambda}$ 種不同的 $\lambda K_v^*\to(\mathcal{C}_3$ 與 $TT_3)$, 使得 K_v^* 的每個 $\mathcal{C}_3$ 與每個 TT_3 都恰出現於一種分拆中。

二. $\lambda=1$ 的有序三元系大集

1. $LMTS(v,1)$ **的存在性**

國內外對於 Mendelsohn 三元系大集的研究開始於十多年前, 當然首先是從 $\lambda=1$ 開始的。我與常彥勛、雷建國從 1987 年開始投身於它, 直到 1992 年終於完成了 $LMTS(v,1)$ 的存在譜。這裡將簡要介紹一下這一工作的過程。限於篇幅和難度, 一些構造方法被刪略了。

引理1: 對於正整數 $u\equiv\pm1 \pmod 6$, 存在對稱的 $LMTS\,(u+2,1)$。

這一引理的構造已在 [17]介紹過。這裡所說的"對稱的 $LMTS$"是 Mendelsehn 三元系大集的一種特例。一般來講, 一個 $LMTS(v,\,\lambda)=\{(X,\mathcal{B}_i)\}_i$ 被稱作是對稱的, 如果存在 X 的兩個不同元 a,b, 使得對每個 $\mathcal{B}_i$ 均滿足

$$\begin{aligned}&\langle a,b,x\rangle\in\mathcal{B}_i\Longleftrightarrow\langle b,a,x\rangle\in\mathcal{B}_i,\\&\langle a,x,y\rangle\in\mathcal{B}_i\Longleftrightarrow\langle b,y,x\rangle\in\mathcal{B}_i,\qquad(*)\end{aligned}$$

其中 $x\neq y\in X\backslash\{a,b\}$。

引理2: 若存在對稱的 $LMTS(u+2,1)$, 則存在 $LMTS(2u+2)$。

構造: 設有對稱的 $LMTS(u+2,1)=\{(\{\infty_0,\infty_1\}\cup Z_u,\mathcal{A}_i);\ i\in Z_u\}$, 其中 $\infty_0,\infty_1\notin Z_u$ (亦不屬於 Z_2 及 $Z_u\times Z_2$), 而且 ∞_0,∞_1 即是上述定義條件 $(*)$ 中的特定元 $a,b,\mathcal{A}_i$ 中包含循環三元組 $\langle\infty_0,\infty_1,i\rangle$。今在集合 $X=\{\infty_0,\infty_1\}\cup(Z_u\times Z_2)$ 上構造總共 $2u$ 個循環三元組系 $\mathcal{B}_{ij}(i\in Z_u,j\in Z_2)$, 每個 $\mathcal{B}_{ij}$ 由以下四部分組成:

(1) $\langle\infty_s,\infty_{1-s},(i,j+s)\rangle$ 與 $\langle\infty_s,(i,j+s),(i,j+s+1)\rangle$, 其中 $s\in Z_2$;

(2) $\langle\infty_0,x_s,y_{j+s}\rangle$ 與 $\langle\infty_1,y_s,x_{j+s+1}\rangle$, 其中 $x,y\in Z_u$, $s\in Z_2$, 且 $\langle\infty_0,x,y\rangle\in\mathcal{A}_i$。

(3) $\langle(x,s),(x,1-s),(y,j+s)\rangle$, 其中 $x,y\in Z_u$, $s\in Z_2$ 且 $\langle\infty_0,x,y\rangle\in\mathcal{A}_i$;

(4) $\langle(x,l),(y,m),(z,n)\rangle$, 其中 $x,y,z\in Z_u$, $l,m,n\in Z_2$, $l+m+n=j$ 且 $\langle x,y,z\rangle\in\mathcal{A}_i$。

引理3: 若存在 $LMTS(v+2)$ 及對稱的 $LMTS(u+2)$, 則當 $v\geq3$ 時存在 $LMTS(uv+2)$。

構造: 設 $(a_{ij})_0^{v-1}$ 是 Z_v 上的 v 階冪等拉丁方, $\infty_0,\infty_1\notin Z_u\times Z_v$。據已知, 有

$$\begin{aligned}LMTS(v+2)&=\{(\{\infty_0,\infty_1\}\cup Z_v,\\&\qquad\mathcal{A}_q);\ q\in Z_v\},\text{及}\\\text{對稱的 }LMTS(u+2)&=\{(\{\infty_0,\infty_1\}\cup Z_u,\\&\qquad\mathcal{B}_p);\ p\in Z_u\},\end{aligned}$$

其中 $\langle\infty_0,\infty_1,p\rangle\in\mathcal{B}_p$。今在集合 $X=\{\infty_0,\,\infty_1\}\cup(Z_u\times Z_v)$ 上構作 uv 個循環三元組系 $\mathcal{C}_{pq}(p\in Z_u,\ q\in Z_v)$。每個 $\mathcal{C}_{pq}$ 由以下四部分組成:

(1) $\langle(x,i),(y,j),(z,a_{ij}+q)\rangle$, 其中 $x,y,z\in Z_u$, $i,j\in Z_v$ 且 $\langle x,y,z\rangle\in\mathcal{B}_p$;

(2) $\langle(x,i),(x,j),(y,a_{ij}+q)\rangle$, 其中 $x,y\in Z_u$, $i\neq j\in Z_v$ 且 $\langle\infty_0,x,y\rangle\in\mathcal{B}_p$;

(3) $\langle\infty_0,(x,i),(y,i+q)\rangle$ 與 $\langle\infty_1,(y,i+q),(x,i)\rangle$; 其中 $x,y\in Z_u$, $i\in Z_v$ 且 $\langle\infty_0,x,\ y\rangle\in\mathcal{B}_p$;

(4) $\langle(p,i),(p,j),(p,k)\rangle$, 其中 $\langle i,j,k\rangle\in\mathcal{A}_q$, 當 ∞_0 或 ∞_1 作爲 i,j,k 出現時刪去其前邊的坐標 p。

這個構造中所提到的v 階拉丁方指的是 v 元集上的一個 $v\times v$ 方陣, 使得每行、每列都是這 v 個元的某種全排列。Z_v 上的 v 階拉丁方可以記爲 $(a_{ij})_0^{v-1}$, 它表示該方陣第 i 行第 j 列的元爲 a_{ij}, 其中行號 i, 列號 j 與元素 a_{ij} 均取自 Z_v。如果對於每個 $i\in Z_v$ 均有 $a_{ii}=i$, 則稱此拉丁方爲"冪等的", 比如

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&0\\2&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2&1\\2&1&0\\1&0&2\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&1&2&3\\2&3&0&1\\1&0&3&2\\3&2&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2&3&1\\3&1&0&2\\1&3&2&0\\2&0&1&3\end{pmatrix},$$

分別是 2,3,4 階拉丁方, 其中只有第 4 個和第 6 個是冪等的, 其餘都不是。人們早已證明了, 對任意正整數 n 存在 n 階拉丁方; 而當 $n\geq 3$ 時存在冪等 n 階拉丁方 (注意不存在 2 階冪等拉丁方)。

以下兩個引理的構造比較複雜, 我們只介紹它的結論。

引理4: 對任意正整數 $n\geq 3$, 存在 $LMTS\ (2^n+2,1)$。

引理5: 對於正整數 $u>1$, $u\equiv\pm 1\pmod 6$, 若存在 $LMTS(u+2,1)$ 則存在 $LMTS\ (4u+2,1)$。

根據以上這些引理, 我們即可以得到 $LMTS(v,1)$ 存在性的完全解答。

定理2: 存在 $LMTS(v,1)$ 當且僅當 $v\equiv 0,1\pmod 3$ 且 $v\geq 3$, $v\neq 6$。

證明: 因爲 $MTS(v,1)$ 的存在是 $LMTS\ (v,1)$ 存在的一個必要條件, 由定理 1 即知這裡所列的條件確是必要的, 只需再說明充分性, 滿足定理條件的整數 v 可以表爲 $v=2^nu+2$, 其中 $u\equiv\pm1\pmod 6$, $n\geq 0$, 而 $n=2$ 時 $u>1$, 則 $LMTS(v,1)$ 的存在性可如下得知:

$n=0$ 時, 根據引理1;
$n=1$ 時, 根據引理1與引理2;
$n=2$ 時, 根據引理1與引理5;
$n\geq 3$ 時, 根據引理1, 引理4與引理3。

2. $LDTS(v,1)$的存在性

這方面的研究工作是由 C. C. Lindner 和 A. P. Street 於 1983 年首先開始的。他們的成果主要是

(1) 對於 $v=3,4,6,18$, 存在 $LDTS(v,1)$;

(2) 若存在 $LDTS(v,1)$, $v\neq 6$, 則存在 $LDTS(3v,1)$;

(3) 若存在 $LDTS(v+1,1)$, $v\geq 3$, 則存在 $LDTS(3v+1,1)$;

(4) 對於 $u \equiv \pm 1 \pmod 6$ 存在 $LDTS(u+2,1)$;

(5) 若存在 $LDTS(v+2,1)$, $v \geq 3$, 則對於 $u \equiv \pm 1 \pmod 6$, 存在 $LDTS(uv+2,1)$。

(6) 對於 $u \equiv \pm 1 \pmod 6$, 存在 $LDTS(2u+2,1)$。

在這些結果之後, $LDTS(v,1)$ 存在性的關鍵將是階數 $v=2^n+2$, 我與常彥勛於 1990 年給出了以下遞歸結論:

(7) 若存在 $LDTS(n+2,1)$, $n \geq 3$, 則存在 $LDTS(16n+2,1)$。

於是, 應用 (1), (2), (3) 與 (7), 即可得到:

(8) 對任意非負整數 n 存在 $LDTS(2^n+2,1)$。

根據 (4), (5), (6) 和 (8), 類似於定理 2 的證明可得

定理3: 存在 $LDTS(v,1)$ 當且僅當 $v \equiv 0,1 \pmod 3$ 且 $v \geq 3$。

作為一個例子, 我們給出一個 $LDTS(6,\ 1)$, 它的構造簡單並與 C. C. Lindner 和 A. P. Street 文章 [1]中給出的不同構, 它的 12 個 $DTS(6,1)$ 是由兩個初始的 $\mathcal{A}$ 與 $\mathcal{B}$ 經 mod 6 平移產生的:

在 Z_6 上定義以下可遷三元組系:

$$\begin{aligned} C &= \{(0,4,5),(1,2,0),(2,3,4),(4,0,2),\\ &\qquad (5,3,0)\};\\ D &= \{(0,3,1),(1,4,3),(2,1,5),(3,5,2),\\ &\qquad (5,4,1)\};\\ E &= \{(3,1,0),(1,3,4),(1,2,5),(5,2,3),\\ &\qquad (4,5,1)\}。\end{aligned}$$

令 $\mathcal{A}_i = C \cup D$, $\mathcal{B} = C^{-1} \cup E$, 而

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A}+i,\ \mathcal{B}_i = \mathcal{B}+i,\ i \in Z_6。$$

則 $\{(Z_6,\mathcal{A}_i),(Z_6,\mathcal{B});\ \ i \in Z_6\}$ 即構成一個 $LDTS(6,1)$。事實上, 首先很容易核查 $\mathcal{A}$ 與 $\mathcal{B}$ 都是一個 $DTS(6,1)$。而若將一個可遷三元組 (x,y,z) 稱爲是屬於型 $[y-x,z-y,z-x]$ 的, 則 Z_6 中恰有 20 種不同的型, 每種型均含有 6個不同的可遷三元組, (一般來講, Z_n 上恰有 $(n-1)(n-2)$ 種可遷三元組型, 每種型均含 n 個可遷三元組, 它們可由該型中任一三元組模 n 平移得到)。不難逐個算出 C 中五個區組的型分別是 $[4,1,5]$, $[1,4,5]$, $[1,1,2]$, $[2,2,4]$, $[4,3,1]$, D 的五個型是 $[3,4,1]$, $[3,5,2]$, $[5,4,3]$, $[2,3,5]$, $[5,3,2]$,E的五個型是 $[4,5,3]$, $[2,1,3]$, $[1,3,4]$, $[3,1,4]$, $[1,2,3]$, 而 C^{-1} 的型則是 $[5,2,1]$, $[2,5,1]$, $[5,5,4]$, $[4,4,2]$, $[3,2,5]$。這些恰好取遍 Z_6 中應有的 20 個型各一次。

3. $LHTS(v,1)$ 的存在性

這類大集也是由 C. C. Lindner 與 A. P. Street 首先研究的 (1984年), 但當時並未限制每個小集的“混成”意義, 這種允許 MTS 或 DTS 作爲小集的“非混成”大集 (即 $LOTS(v,\ 1)$) 的存在譜是由常彥勛在 1990 年完成的。混成三元系 HTS 的概念是 1989 年才提出的, 而它的大集問題則由我與雷建國在 1993 年完全解決。

首先, 我們給出了 $LHTS(4,1)$, $LHTS$ $(6,1)$ 和 $LHTS(7,1)$。上一節例 6 已介紹了 $LHTS(4,1)$, 這裡我們再給出 $LHTS(6,1)$ 和 $LHTS(7,1)$ 的構造。

(1) $LHTS(6,1) = \{(Z_6, \mathcal{B}_i);\ 0 \le i \le 11\} \cup \{(Z_6, \mathcal{C}_j);\ 0 \le j \le 3\}$

令 $\mathcal{B} = \{\langle 1,4,3\rangle, (0,1,3), (0,4,5), (4,0,2), (1,2,0), (5,3,0), (5,4,1), (3,5,2), (2,1,5), (2,3,4)\}$;

$\mathcal{C} = \{\langle 1,5,3\rangle, \langle 0,2,5\rangle, \langle 2,4,1\rangle, \langle 4,0,3\rangle, \langle 0,5,1\rangle, \langle 2,1,3\rangle, \langle 4,3,5\rangle, (0,1,4), (2,3,0), (4,5,2)\}$

其中 $\mathcal{B}$ 由 1 個循環三元組和 9 個可遷三元組構成, 而 $\mathcal{C}$ 由 7 個循環三元組和3個可遷三元組構成。進一步, 令

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_i &= \mathcal{B} + i,\ 0 \le i \le 5;\ \mathcal{B}_{i+6} = \mathcal{B}_i^{-1},\\ &\qquad 0 \le i \le 5;\\ \mathcal{C}_j &= \mathcal{C} + j,\ j = 0,1;\ \mathcal{C}_{j+2} = \mathcal{C}_j^{-1},\\ &\qquad j = 0,1。\end{aligned}$$

爲了說明它的正確性, 除去核驗 $\mathcal{B}$ 與 $\mathcal{C}$ 確都是 $HTS(6,1)$ 外, 還需從“型”的角度去看, 前邊已對於 $LDTS(6,1)$ 談過它, 現在再更詳盡地談談。

Z_n 上的可遷三元組共有 $(n-1)(n-2)$ 個型 $[a,b,c]$, 其中 $a,b,c \in Z_n \backslash \{0\}$, $a+b \equiv c \pmod n$。可以通過任選 $a,b \in Z_n$, $b \ne -a$ 得到全部的型。每個型 $[a,b,c]$ 包含有形如 $(x, x+a, x+c)$, $x \in Z_n$, 的 n 個可遷三元組。

Z_n 上的循環三元組 $\langle x,y,z\rangle$ 稱作是屬於型 $[y-x, z-y, x-z]$ 的。每個型 $[a,b,c]$ 滿足 $a,b,c \in Z_n\backslash\{0\}$, $a+b+c \equiv 0$ $(mod\ n)$, 且型 $[a,b,c],[b,c,a]$ 與 $[c,a,b]$ 是一樣的。一般來講, 型 $[a,b,c]$ 包含有形如 $\langle x, x+a, x-c\rangle$, $x \in Z_n$, 的 n 個循環三元組, 但當 $a = b = c$ 時 (這只有 $3|n$ 時才可能, 此時有這樣的型兩個: $[\frac{n}{3},\frac{n}{3},\frac{n}{3}]$ 與 $[\frac{2n}{3},\frac{2n}{3},\frac{2n}{3}]$), 型 $[a,a,a]$ 僅含有 $\frac{n}{3}$ 個不同的循環三元組。因此, 當 $3|n$ 時共有 $\frac{(n-1)(n-2)}{3}$ 個不同的型; 而當 $3|n$ 時共有 $\frac{(n-1)(n-2)-2}{3} + 2 = \frac{n(n-3)}{3} + 2$ 個不同的型, 其中包括兩個特殊的型 $[\frac{n}{3},\frac{n}{3},\frac{n}{3}]$ 及 $[\frac{2n}{3},\frac{2n}{3},\frac{2n}{3}]$。

若可遷 (或循環) 三元組 $B \in$ 型 $[a,b,c]$, 則 B 的反序區組 B^{-1} 屬於型 $[-b,-a,-c]$, 稱 $[-b,-a,-c]$ 爲 $[a,b,c]$ 的反型。顯然, 不論是可遷型還是循環型, 一個型與其反型的關係是相互的, 一一對應的, 且不會有 $[a,b,c] = [-b,-a,-c]$。因此, 全部型可分拆爲這樣的型與反型的對子 (注意, 上述數字 $(n-1)(n-2)$, $\frac{(n-1)(n-2)}{3}$ 與 $\frac{n(n-3)}{3} + 2$ 都是偶數)。

現在列出 $\mathcal{B}$ 與 $\mathcal{C}$ 各區組的型及它們的反型, 所示第一列爲依序各區組的型, 而第二列爲它對應的反型。

$\mathcal{B}$				$\mathcal{C}$			
循環型		可遷型		循環型		可遷型	
354	132	123	453	444	222	134	352
		415	521	231	345	134	352
		224	442	231	345	134	352
		145	251	231	345		
		431	325	525	411		
		532	314	525	411		
		235	341	525	411		
		543	213				
		112	554				

由此表可見, 全部 20 個可遷型與 8 個循環型都已出現, $\mathcal{B}$ 與 $\mathcal{C}$ 沒有公共的型, 且 $\mathcal{B}$ 中各區組的型全不同。但 $\mathcal{C}$ 中除去特殊型 $[4,4,4]$ 出現一次外, 其餘的型皆出現三次, 然而因 $\mathcal{C}$ 只平移一次 (即 $C_0=C$, $C_1=C+1$), 這些型的區組恰被合理地分成兩族分別安排在了 C_0 與 C_1 中。

(2) $LHTS(7,1)=\{(\{\infty_1,\infty_2\}\cup Z_5,\ \mathcal{B}_i^k);\ i\in Z_5,\ k\in Z_4\}$

對於 $X=\{\infty_1,\infty_2\}\cup Z_5$ 的任一個 3-子集 A, 記 A 上的 $LMTS(3,1)$ 爲 $\sigma_0(B)$, 而 A 上的 $LDTS(3,1)$ 爲 $\{\sigma_1(B),\sigma_2(B),\sigma_3(B)\}$ (注意, 不存在 $LHTS(3,1)$ 因爲沒有 $HTS(3,1)$)。定義

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= \{\langle\infty_1,1,3\rangle,\langle\infty_1,3,4\rangle,\langle\infty_1,4,2\rangle,\\
&\qquad \langle\infty_1,2,1\rangle\};\\
\tau_1 &= \{(\infty_1,1,3),(3,4,\infty_1),(\infty_1,4,2),\\
&\qquad (2,1,\infty_1)\};\\
\tau_2 &= \{(1,\infty_1,3),(3,\infty_1,4),(4,\infty_1,2),\\
&\qquad (2,\infty_1,1)\};\\
\tau_3 &= \{(1,3,\infty_1),(\infty_1,3,4),(4,2,\infty_1),\\
&\qquad (\infty_1,2,1)\}。
\end{aligned}$$

並定義 τ_i' 由 τ_i 諸區組的反序構成 (同時將 ∞_1 換爲 ∞_2), 這裡 $i\in Z_4$。構造如下四個三元系

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0^0 &= \sigma_0(A)\cup\tau_1\cap\tau_2'\cup\sigma_3(B)\cup\sigma_3(C);\\
\mathcal{B}_0^1 &= \sigma_1(A)\cup\tau_2\cup\tau_3'\cup\sigma_0(B)\cup\sigma_0(C);\\
\mathcal{B}_0^2 &= \sigma_2(A)\cup\tau_3\cup\tau_0'\cup\sigma_1(B)\cup\sigma_1(C);\\
\mathcal{B}_0^3 &= \sigma_3(A)\cup\tau_0\cup\tau_1'\cup\sigma_2(B)\cup\sigma_2(C),
\end{aligned}$$

其中 $A=\{\infty_1,\infty_2,0\}$, $B=\{0,1,4\}$, $C=\{0,2,3\}$。最後, 令

$$\mathcal{B}_i^k=\mathcal{B}_0^k+i,\ i\in Z_5,\ k\in Z_4,$$

其中 $\infty_1+i=\infty_1$, $\infty_2+i=\infty_2$, 而 Z_5 中元加 i 模 5 取值。

Teirlinck 在 [2]中對於一種特殊的設計大集 $LS(t,(k,K),v)$ 給出了以下結論:

"當且僅當 $v\equiv 0,1\ (mod\ 3)$, $v\neq 7$ 時存在有 $LS(2,(3,\{3,4,6\}),v)$, $v\geq 3$"。

利用這個結論及已給出的 $LHTS(4,1)$, $LHTS(6,1)$ 與 $LHTS(7,1)$, 採用嵌入替換的方法, 我們可以證明

定理4: 存在 $LHTS(v,1)$ 當且僅當 $v\equiv 0,1\ (mod\ 3)$ 且 $v>3$。

三. 任意λ的有序三元系大集

隨著 $\lambda=1$ 的有序三元系大集的譜的完成, 人們自然期望去進一步解決任意 λ 的有序三元系大集。最近, 我們先後完成了它們。

1. $LMTS(v,\lambda)$ 的譜

一個 $LMTS(v,\lambda)$ 含有 $\frac{v-2}{\lambda}$ 個 $MTS(v,\ \lambda)$, 而每個 $MTS(v,\lambda)$ 含有 $\frac{\lambda v(v-1)}{3}$ 個循環三元組。因此, 存在 $LMTS(v,\lambda)$ 的必要條件是 $3|\lambda v(v-1)$ 且 $\lambda|(v-2)$。如果 $3\dagger\lambda$, 這一條件成爲 $v\equiv 0,1\ (\mathrm{mod}\ 3)$ 且 $\lambda|v-2$, 此時的最小 λ 值是 1, 已在上節研究過; 如果 $3|\lambda$, 這一條件成爲 $\lambda|(v-2)$, 此時的最小 λ 值是 3, 而 $v\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$。所以主要關鍵是 $LMTS(3k+2,3)$ 的存在性。

$LMTS(3k+2,3)$ 的存在譜由以下幾步完成:

(1) 存在 $LMTS(5,3)$, $LMTS(8,3)$ 與 $LMTS(14,3)$。

(2) 對於 $u\geq 3$, 若存在 $LMTS(u+2,1)$, 則存在 $LMTS(3u+2,3)$。

(3) 對於 $w\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 6)$, $n\geq 0$, 存在 $LS(2,(3,\{3,4,3\cdot 2^n+2\}),2^nw+2)$。其中 $LS(\cdots)$ 即是上節指出的一種特殊的設計大集, 而且構成它的諸小集 $S(2,\{3,4,3\cdot 2^n+2\},2^nw+2)$ 中均恰含一個長度爲 $3\cdot 2^n+2$ 的區組。

由上述 (1) 與 (2) 以及 $LMTS(2^n+2,1)$, $n\neq 2$ 的存在性我們得知: "對於任意 $n\geq 0$, 存在 $LMTS(3\cdot 2^n+2,3)$"。進而由 (3) 及 $LMTS(3,1)$, $LMTS(4,1)$ 的存在性, 採用類似於定理 4 證明嵌入替換方法, 即可得知 (注意每個階數 $v=3k+2$ 都可表示爲 $v=2^nw+2$ 的形式, 其中 $n\geq 0$, 而 $w\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 6)$):

定理5: 存在 $LMTS(v,3)$ 當且僅當 $v\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 3)$ 且 $v\geq 5$。

根據定理2和定理5, 採用若干個小集合併的方法, 我們即可得到:

定理6: $LMTS(v,\lambda)$ 的存在譜是: $v\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ \lambda)$, $\lambda\leq v-2$, 而當 $3\dagger\lambda$ 時 $v\equiv 0,1\ (\mathrm{mod}\ 3)$, 且 $\lambda=1$ 時 $v\neq 6$。

作爲具體構造的例子, 我們介紹一下 $LMTS(8,3)$ 與 $LMTS(14,3)$ 的作法。

$LMTS(8,3)=\{(Z_8,\mathcal{B}_i);\ 0\leq i\leq 1\}$:

對 Z_8 的任意 3-子集 $\{a,b,c\}$, $a<b<c$, 若 $a+b+c$ 爲偶數, 則 $\langle a,b,c\rangle\in\mathcal{B}_0$, $\langle a,b,c\rangle\in\mathcal{B}_1$; 而若 $a+b+c$ 爲奇數, 則 $\langle a,b,c\rangle\in\mathcal{B}_1$, $\langle a,c,b\rangle\in\mathcal{B}_0$, 這種作法可以推廣到一般情況, 即構作 $LMTS(2\lambda+2,\lambda)$。

此時這種階數的大集恰含兩個小集 $\mathcal{B}_0$ 與 $\mathcal{B}_1$。設元素集爲 $Z_{2\lambda+2}=\{0,1,\cdots,2\lambda+1\}$ 它的序即爲自然順序 $0<1<\cdots<2\lambda+1$。對於它的任一個 3-子集 $\{a,b,c\}$, $a<b<c$, 均可採用上述做法, 將相應的兩個循環三元組 $\langle a,b,c\rangle$ 與 $\langle a,c,b\rangle$, 按 $a+b+c$ 爲偶或奇恰當地分派到 $\mathcal{B}_0$ 或 $\mathcal{B}_1$ 中, 現在讓我們來證明這一構造的合理性, 顯然只需說明 $Z_{2\lambda+2}$ 中任二不同元的有序對 (x,y) 恰出現在 $\mathcal{B}_0$ 的 λ 個循環三元組中。不妨假定 $x<y$ ($x>y$ 的情況類似可知)。根據作法, 含序對 (x,y) 的 $\mathcal{B}_0$ 中區組有:

$z<x<y$時,

$$\langle z,x,y\rangle\in\mathcal{B}_0\Longleftrightarrow x+y+z \text{ 爲偶};$$

$x<z<y$時,

$$\langle x,y,z\rangle\in\mathcal{B}_0\Longleftrightarrow x+y+z \text{ 爲奇};$$

$x<y<z$時,

$$\langle x,y,z\rangle\in\mathcal{B}_0\Longleftrightarrow x+y+z \text{ 爲偶。}$$

對於給定的 (x,y), $x+y$ 的奇偶性是固定的, 因此若 $x+y$ 爲偶 (奇), 我們只需說明 $[0,x)$ 與 $(y,2\lambda+1]$ 內偶 (奇) 數的個數與 (x,y) 內奇 (偶) 數的個數之和均恰爲 λ 即可, 我們有下列計數表:

x	y	$0\le z<x$		$x<z<y$		$y<z\le 2\lambda+1$	
		z偶	z奇	z偶	z奇	z偶	z奇
偶	偶	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	$\frac{y-x}{2}-1$	$\frac{y-x}{2}$	$\frac{2\lambda-y}{2}$	$\frac{2\lambda-y}{2}+1$
奇	奇	$\frac{x+1}{2}$	$\frac{x-1}{2}$	$\frac{y-x}{2}$	$\frac{y-x}{2}-1$	$\frac{2\lambda-y+1}{2}$	$\frac{2\lambda-y+1}{2}$
偶	奇	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$	$\frac{y-x-1}{2}$	$\frac{y-x-1}{2}$	$\frac{2\lambda-y+1}{2}$	$\frac{2\lambda-y+1}{2}$
奇	偶	$\frac{x+1}{2}$	$\frac{x-1}{2}$	$\frac{y-x-1}{2}$	$\frac{y-x-1}{2}$	$\frac{2\lambda-y}{2}$	$\frac{2\lambda-y}{2}+1$
		$*$	$\triangle$	$\triangle$	$*$	$*$	$\triangle$

不難算出每行畫 * 三列的數字之和等於畫 $\triangle$ 三列的數字之和, 均爲 λ, 這就完成了證明。

$LMTS(14,3)=\{(\{\infty_0,\infty_1\}\cup(Z_4\times Z_3),\mathcal{B}_i);\ i\in Z_4\}$:

每個 $\mathcal{B}_i$ 由以下七部分組成

$\langle(i+1,x),(i+2,y)(i+3,z)\rangle$ 與 $\langle(i+3,x),\ (i+2,y),(i+1,z)\rangle$, 其中 $x,y,z\in Z_3$ 且 $x+y+z=0$;

$\langle(i,x),(i+1,y),(i+2,z)\rangle$ 與 $\langle(i+3,x),(i+2,y),(i+1,z)\rangle$, 其中 $x,y,z\in Z_3$ 且 $x+y+z=1$;

$\langle(i,x),(i+2,y),(i+3,z)\rangle$ 與 $\langle(i,x),(i+3,y),(i+1,z)\rangle$, 其中 $x,y,z\in Z_3$ 且 $x+y+z=2$;

$\langle(i,x),(j,y),(j,z)\rangle$, 其中 $j\in Z_4\backslash\{i\}$, $x,y,z\in Z_3$ 且 $y\neq z$;

$\langle\infty_k,(i+1,x),(i+2,y)\rangle,\langle\infty_k,(i+2,x),\ (i+3,y)\rangle$ 與 $\langle\infty_k,(i+3,x),(i+1,y)\rangle$, 其中 $x,y\in Z_3$ 而 $k=\frac{1-(-1)^i}{2}$;

$\langle\infty_k,(i+1,x),(i+3,y)\rangle,\langle\infty_k,(i+3,x),\ (i+2,y)\rangle$ 與 $\langle\infty_k,(i+2,x),(i+1,y)\rangle$, 其中 $x,y\in Z_3$ 而 $k=\frac{1+(-1)^i}{2}$;

$\{\infty_0,\infty_1\}\ \cup\ (\{i\}\ \times\ Z_3)$ 上的 $MTS(5,3)$。

這一構造的驗證請讀者自行完成。

2. $LDTS(v,\lambda)$ **的譜**

一個 $LDTS(v,\lambda)$ 含有 $\frac{3(v-2)}{\lambda}$ 個 $DTS(v,\ \lambda)$, 而每個 $DTS(v,\lambda)$ 含有 $\frac{\lambda v(v-1)}{3}$ 個可遷三元組。因此, 存在 $LDTS(v,\lambda)$ 的必要條件是 $3|\lambda v(v-1)$ 且 $\lambda|3(v-2)$。如果 $3\dagger\lambda$ 這一條件成爲 $v\equiv 0,1 \pmod 3$ 且 $\lambda|(v-2)$, 此時的最小 λ 值是 1, 已在上節研究過; 如果 $3|\lambda$, 這一條件成爲 $\frac{\lambda}{3}|(v-2)$, 此時的最小 λ 值是 3, 而 $v\geq 3$。所以首先需解決的是 $LDTS(v,3)$, $v\geq 3$。

在引理3的構造中, 我們曾用到冪等拉丁方的概念, 同一個階數的兩個冪等拉丁方 $A=(a_{ij})_0^{v-1}$ 與 $B=(b_{ij})_0^{v-1}$, 若對任意 $i\neq j\in Z_v$, 恆有 $a_{ij}\neq b_{ij}$, 則稱它們爲不相交的。若存在 $v-2$ 個兩兩不相交的 v 階冪等拉丁方, 則稱它們構成一個 v 階冪等拉丁方大集。例如:

$$\begin{bmatrix}0&2&3&1\\3&1&0&2\\1&3&2&0\\2&0&1&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&3&1&2\\2&1&3&0\\3&0&2&1\\1&2&0&3\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}0&2&3&4&1\\2&1&4&0&3\\3&4&2&1&0\\4&0&1&3&2\\1&3&0&2&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&3&4&1&2\\4&1&3&2&0\\1&0&2&4&3\\2&4&0&3&1\\3&2&1&0&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&4&1&2&3\\3&1&0&4&2\\4&3&2&0&1\\1&2&4&3&0\\2&0&3&1&4\end{bmatrix};$$

分別是4階和5階的冪等拉丁方大集。Teirlinck 與 Lindner 在1988年證明了: "當 $v\neq 2,6,14$ 與 62 時, 存在 v 階冪等拉丁方大集"(見 [3])。設有 v 階冪等拉丁方大集 (Z_v 上的): $L_k=(a_{ij}^k)_{i,j=0}^{v-1}$, 若定義可遷三元組系 $(k=1,2,\cdots,v-2)$

$$\mathcal{B}_k=\{(i,j,a_{ij}^k);\ i,j\in Z_v,\ i\neq j\},$$

易知每個 $\mathcal{B}_k$ 恰包含 $v(v-1)$ 個可遷三元組, 且 Z_v 中的任二不同元有序對 (x,y) 均在 $\mathcal{B}_k$ 的恰好三個區組中出現 (由冪等拉丁方位的定義可知, 分別出現於形爲 $(x,y,*)$, $(x,*,y)$ 和 $(*,x,y)$ 的三個區組中)。因此, 每個 $\mathcal{B}_k$ 是一個 $DTS(v,3)$, 而這 $v-2$ 個兩兩不交的 $\mathcal{B}_k$ 恰構成一個 $LDTS(v,3)$。

於是, $LDTS(v,3)$, $v\ \geq\ 3$ 的存在性只剩下了 $v=6$, 14 和 62 這三個階數了。$LDTS\ (6,3)$ 可由 $LDTS(6,1)$ 的 12 個小集 $DTS\ (6,1)$ 每三個併爲一個 $DTS(6,3)$, 從而得到組成 $LDTS(6,3)$ 的四個小集。$LDTS(14,3)$ 的構造爲:

設 $A=(a_{xy})_0^3$ 是 Z_4 上的4階冪等拉丁方。令 $LDTS(6,1)=\{(\{\infty_1,\infty_2\}\cup Z_4,\ \mathcal{B}_{ij});\ i\in Z_3,\ j\in Z_4\}$。今在集合 $X=\{\infty_1,\infty_2\}\cup(Z_3\times Z_4)$ 上構作以下 12 個可遷三元組系 $\mathcal{T}_{ij}$ $(i\in Z_3,\ j\in Z_4)$, 每個 $\mathcal{T}_{ij}$ 由四部分組成:

(1) $((k,x),(k,y),(k,z))$, 其中 $k\in Z_3$, $(x,y,z)\in\mathcal{B}_{ij}$, 當 x,y,z 處出現 ∞_1 或 ∞_2 時, 刪去前邊第一坐標 k;

(2) $((i,x),(i+1,y),(i+2,a_{xy}+j))$ 與其反序組, 其中 $x,y\in Z_4$;

(3)

$$\begin{cases} (M,N,P) \text{ 與 } (P,N,M), & \\ & \text{當 } i=0 \text{ 時} \\ (M,P,N) \text{ 與 } (N,Q,M), & \\ & \text{當 } i=1 \text{ 時} \\ (Q,M,N) \text{ 與 } (N,M,Q), & \\ & \text{當 } i=2 \text{ 時} \end{cases}$$

其中 $M=(k,x)$, $N=(k,y)$, $P=(k+1,a_{xy}+j)$, $Q=(k-1,a_{xy}+j)$, 而 $k\in Z_3$, $x\neq y\in Z_4$;

(4)

$$\begin{cases} (\infty_1,U,V),(V,U,\infty_1),(\infty_2,U,V), & \\ \quad (V,U,\infty_2), & \text{當 } i=0 \text{ 時} \\ (U,\infty_1,V),(V,\infty_1,U),(U,\infty_2,W), & \\ \quad (W,\infty_2,U), & \text{當 } i=1 \text{ 時} \\ (\infty_1,U,W),(W,U,\infty_1),(\infty_2,U,W), & \\ \quad (W,U,\infty_2), & \text{當 } i=2 \text{ 時} \end{cases}$$

其中 $U=(k,x)$, $V=(k+1,x+j)$, $W=(k-1,x+j)$, 而 $k\in Z_3$, $x\in Z_4$。

則 $\{(X,\mathcal{T}_{ij});\ i\in Z_3,\ j\in Z_4\}$ 即是一個 $LDTS(14,3)$。證明也請讀者自己給出。$LDTS(62,3)$ 是利用遞歸構造

"$LDTS(m+2,3), n\equiv\pm1 \pmod 6 \longrightarrow LDTS(mn+2,3)$"

給出的, 取 $m=12$, $n=5$。這樣我們就可得到

定理7: $v\geq 3$ 時存在 $LDTS(v,3)$。

根據定理3和定理7, 仍採用小集分別集組合併的方法, 得知

定理8: $LDTS(v,\lambda)$ 存在的譜是: $v\geq 3$, $\lambda|3(v-2)$, 而當 $3\nmid\lambda$ 時 $v\not\equiv 2 \pmod 3$。

3. $LHTS(v,\lambda)$ 的譜

一個 $LHTS(v,\lambda)$ 含有 $\frac{4(v-2)}{\lambda}$ 個 $HTS(v,\ \lambda)$, 而每個 $HTS(v,\lambda)$ 含有 $\frac{\lambda v(v-1)}{3}$ 個循環或可遷三元組 (且兩者均需含有)。因此, 存在 $LHTS(v,\lambda)$ 的必要條件是 $3|\lambda v(v-1)$ 且 $\lambda|4(v-2)$。如果 $3\nmid\lambda$, 這一條件成爲 $v\equiv 0,1 \pmod 3$ 且 $\lambda|4(v-2)$, 此時的最小 λ 值是 1, 已由定理4給出; 如果 $3|\lambda$, 這一條件成爲 $\lambda|4(v-2)$, 此時的最小 λ 值是 3, 而 $v\equiv 2 \pmod 3$, 以下首先研究這一情形。

(1) $LHTS(5,3)=\{(\{\infty\}\cup Z_4,\mathcal{B}_i);\ i\in Z_4\}$, 每個 $\mathcal{B}_i$ 由以下四部分區組構成 (共有5個循環三元組, 15 個可遷三元組):

集合 $Z_4\backslash\{i\}$ 上的 $MTS(3,1)$;

$\langle\infty,i,j\rangle$ 與 (j,i,∞), 其中 $j\in Z_4\backslash\{i\}$; $(i+1,\infty,i+2),(i+2,\infty,i+1),(i+3,\infty,i+1),(\infty,i+1,i+3),(\infty,i+2,i+3),(\infty,i+3,i+2)$;

$(i,i+1,i+2),(i+3,i,i+2),(i+1,i+3,i),(i,i+3,i+1),(i+2,i,i+3),(i+2,i+1,i)$。

(2) $LHTS(8,3)=\{(\{\infty_0,\infty_1\}\cup(Z_2\times Z_3),\mathcal{B}_r);\ 1\leq r\leq 8\}$, 其中 $\mathcal{B}_r=C_r\cup D_r\cup E_r\cup F_r$, 而

$C_r=\cup\{C_r(x);\ x\in Z_3\}$, 其中

$\{(\{\infty_0,\infty_1\}\cup(Z_2\times\{x\}),C_r(x));\ 1\le r\le 8\}$ 是一個 $LHTS(4,1)$;

$$\begin{aligned}
D_r &= \cup\{D_r(x,y);\ x\ne y\in Z_3\},\ \text{其中}\\
&\quad \{(Z_2\times\{x,y\},D_r(x,y));1\le r\le 8\}\\
&\quad \text{是一個 } LHTS(4,1);\\
E_{1+4t} &= \cup\{M(i,j,k);\ i,j,k\in Z_2,\\
&\quad i+j+k=t\},\ t\in Z_2,\ \text{其中}\\
&\quad \{(\{(i,0),(j,1),(k,2)\},\ M(i,j,k))\}\\
&\quad \text{是一個 } LMTS(3,1);\\
E_{s+4t} &= \cup\{N_s(i,j,k);\ i,j,k\in Z_2,\\
&\quad i+j+k=t\},\ t\in Z_2,\ 2\le s\le 4,\\
&\quad \text{其中 } \{(\{(i,0),(j,1),(k,2)\},\\
&\quad N_s(i,j,k));\ 2\le s\le 4\}\ \text{是一個}\\
&\quad LDTS(3,1);\\
F_y &= \cup\{F_r(x,y);\ x,y\in Z_3\ \text{且}\ x<y\},\\
&\quad \text{其中(以下 } t\in Z_2)\\
&\quad F_{1+4t}(x,y)=\{\langle\infty_t,(i,x),(i,y)\rangle,\\
&\qquad\qquad \langle\infty_{1-t},(i,x),(1-i,y)\rangle\\
&\qquad\qquad \text{及其反序};\ i\in Z_2\}\\
&\quad F_{2+4t}(x,y)=\{(\infty_t,(i,x),(i,y)),\\
&\qquad\qquad (\infty_{1-t},(i,x),(1-i,y))\\
&\qquad\qquad \text{及其反序};\ i\in Z_2\}\\
&\quad F_{3+4t}(x,y)=\{((i,x),\infty_t,(i,y)),\\
&\qquad\qquad ((i,x),\infty_{1-t},(1-i,y))\\
&\qquad\qquad \text{及其反序};\ i\in Z_2\}\\
&\quad F_{4+4t}(x,y)=\{((i,x),(i,y),\infty_t),\\
&\qquad\qquad ((i,x),(1-i,y),\infty_t)\\
&\qquad\qquad \text{及其反序};\ i\in Z_2\}
\end{aligned}$$

(3) 一個遞歸構造: “對於 $u\ge 3$, 若存在 $LHTS(u+2,1)$, 則存在 $LHTS(3u+2,3)$”。根據它和 (1), (2) 以及定理4, 即可知道: “對任意的 $u\not\equiv 0 \pmod 3$, 存在 $LHTS(3u+2,3)$”, 這就可得到推論: “對任意 $n\ge 0$, 存在 $LHTS(3\cdot 2^n+2,3)$”。

(4) 仿照定理5的嵌入替換做法, 根據定理5前邊的 (3) 以及 $LHTS(4,1)$, $LHTS(3\cdot 2^n+2,3)$ 和 $LMTS(3,1)$, $LDTS(3,1)$ 的存在性即可得到

定理9: 存在 $LHTS(v,3)$ 當且僅當 $v\equiv 2 \pmod 3$ 且 $v\ge 5$。

和前邊兩類三元系大集的最後一步一樣, 利用定理4和定理9, 通過合併小集即可得到最終結論。這裡, 讓我們來具體寫出這一合併過程。

定理10: $LHTS(v,\lambda)$ 的存在譜是: $v\ge 3$, $\lambda|4(v-2)$, 而當 $3\nmid\lambda$ 時, $v\equiv 2 \pmod 3$ 且 $\lambda=1$ 時 $v\ne 3$。

證明: 條件的必要性前邊已談過。

當 $3|\lambda$ 時, 令 $\lambda=3t$, X 是一個 $v(\ge 3)$ 元集, 且 $\lambda|4(v-2)$, 此時必有 $v\equiv 2 \pmod 3$, 由定 理9, 存在 $LHTS(v,3)=\{(X,\mathcal{B}_i);\ 1\le i\le \frac{4(v-2)}{3}\}$。定義

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_k &= \cup\{\mathcal{B}_i;\ kt+1\le i\le (k+1)t\},\\
&\qquad 0\le k\le \frac{4(v-2)}{3t}-1,
\end{aligned}$$

則 $\{(X,\mathcal{A}_k);\ 0\le k\le \frac{4(v-2)}{\lambda}-1\}$ 是一個 $LHTS(v,\lambda)$。

當 $3\nmid\lambda$ 時, 令 X 是一個 v 元集, $v>3$, $v\equiv 0,1 \pmod 3$ 且 $\lambda|4(v-2)$。由定理4, 存在 $LHTS(v,1)=\{(X,\mathcal{B}_i);\ 1\le i\le$

$4(v-2)\}$。定義

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_k &= \cup\{\mathcal{B}_i;\ k\lambda+1\le i\le (k+1)\lambda\},\\ &\quad 0\le k\le \frac{4(v-2)}{\lambda}-1,\end{aligned}$$

則 $\{(X,\mathcal{A}_k);\ 0\le k\le \frac{4(v-2)}{\lambda}-1\}$ 是一個 $LHTS(v,\lambda)$。這種情況還遺留下 $v=3$, $\lambda\ne 1$ 需處理。由條件 $\lambda|4(3-2)$, 只能 $\lambda=2$ 與 $\lambda=4$。$LHTS(3,2)=\{(I_3,\mathcal{B}_i);\ i=0,1\}$ 的構造已在例7中給出過, 而 $LHTS(3,4)=\{(I_3,\mathcal{B}_0\cup\mathcal{B}_1)\}$ 僅含有一個小集。

四. 自反的有序三元系

在前邊一些大集的構造例子中我們已經幾次用到下述事實:

(1) 若 $(Z_v,\mathcal{B})$ 是一個 v 階有序三元系 (不論 λ 是幾, 也不論它是哪種類型—MTS, DTS 或 HTS), 則 $(Z_v,\mathcal{B}+i)$ 也是同一階數同一類型和同一 λ 值的一個有序三元系, 其中 $\mathcal{B}+i=\{B+i;\ B\in\mathcal{B}\}$, 而當 $B=\langle a,b,c\rangle$ (或 (a,b,c)) 時, $B+i=\langle a+i,b+i,c+i\rangle$ (或 $(a+i,b+i,c+i)$), 這裡的加法結果都是在 Z_v 中的, 即加法模 v 取值。

(2) 若 $(X,\mathcal{B})$ 是一個 v 階有序三元系, 則 $(X,\mathcal{B}^{-1})$ 也是一個(階數, 類型及 λ 值相同的) 有序三元系。其中 $\mathcal{B}^{-1}=\{B^{-1};\ B\in\mathcal{B}\}$, 而當 $B=\langle a,b,c\rangle$ (或 (a,b,c)) 時, $B^{-1}=\langle c,b,a\rangle$ (或 (c,b,a))。

這裡的第一個事實可以推廣到更一般的情況, 即若 $(X,\mathcal{B})$ 是一個序三元系, 而 f 是集合 X 的元的一個一一變換 (在代數學中稱 f 爲 X 上的一個置換), 則 $(X,f(\mathcal{B}))$ 也是一個 (階數、類型及 λ 值相同的) 有序三元系。這裡的 $f(\mathcal{B})=\{f(B);\ B\in\mathcal{B}\}$, 而當 $B=\langle a,b,c\rangle$ (或 (a,b,c)) 時, $f(B)=\langle f(a),f(b),f(c)\rangle$ (或 $(f(a),f(b),f(c))$)。這一事實和事實 (2) 都很容易根據有序三元系的定義來說明。

兩個 (λ 值相同的, 且同一類型的) 有序三元系 $(X,\mathcal{B})$ 與 $(X',\mathcal{B}')$, 若存在 $X\to X'$ 的一個 1-1 映射 f, 使得 $\mathcal{B}'=f(\mathcal{B})$, 則稱這兩個有序三元系是同構的, 而 f 稱爲是它們的一個同構 (映射)。如果 X 上的一個置換 f 使得某個有序三元系 $(X,\mathcal{B})$ 滿足 $f(\mathcal{B})=\mathcal{B}$ (即 f 對區組集 $\mathcal{B}$ 的作用僅是諸區組的一個重新排列), 則稱此 f 爲這個 $(X,\mathcal{B})$ 的一個自同構。如果 X 上的一個置換 f 使得有序三元系 $(X,\mathcal{B})$ 滿足 $f(\mathcal{B})=\mathcal{B}^{-1}$, 則稱此 f 爲這個 $(X,\mathcal{B})$ 的一個反自同構, 而此 $(X,\mathcal{B})$ 稱作是自反的 (self-converse)。

顯然, 恆等映射 (即 $f(x)=x$, $\forall x\in X$) 是任一個設計 $(X,\mathcal{B})$ 的自同構。這說明, 每個有序三元系都存在自同構, 而且可以證明, 一個設計的全部自同構恰構成一個群 (它的運算是“映射的合成”)。但並非每個有序三元系都存在反自同構。例如:

存在有三個 (彼此不同構的) $DTS(4)$, 若分別記它們爲 $(Z_4,\mathcal{B}_i)$, $i=1,2,3$, 它們是

$\mathcal{B}_1$:	(1,2,3)	$\mathcal{B}_2$:	(1,2,3)	$\mathcal{B}_3$	(1,2,3)
	(0,3,2)		(0,3,2)		(0,3,1)
	(3,0,1)		(2,0,1)		(3,0,2)
	(2,1,0)		(3,1,0)		(2,1,0)

可以驗證, $\mathcal{B}_1$ 恰有四個反自同構 $f_j(j = 1, 2, 3, 4)$, 用置換的循環之積形式表達即是:

$$f_1 = (0)(2)(1,3), \quad f_2 = (1)(3)(0,2),$$
$$f_3 = (0,1,2,3), \quad f_4 = (0,3,2,1)。$$

而 $\mathcal{B}_2$ 與 $\mathcal{B}_3$ 都不存在任何反自同構。因此, 我們稱 $(Z_4, \mathcal{B}_1)$ 是一個自反的 $DTS(4)$, 而 $(Z_4, \mathcal{B})$ 與 $(Z_4, \mathcal{B}_3)$ 都不是自反的。讓我們再來舉幾個例子:

$DTS(3)$ 是唯一的, 即 $\{(0, 1, 2), (2, 1, 0)\}$, 由 Z_3 上的兩個可遷三元組構成。它是自反的, 它的反自同構僅有 $(0)(1)(2)$ 與 $(1)(0,2)$ 兩個, 它們構成一個二階群 (但一般來講一個有序三元系的全部反自同構不一定構成群, 比如上例中的 $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ 就不是一個群)。

$MTS(3)$ 也是唯一的, 即 $\{\langle 0,1,2\rangle, \langle 2,1,0\rangle\}$, 它也是自反的, 它的全部反自同構恰是 Z_3 上的全部 6 個置換, 它們也構成一個群 (通常稱爲三次對稱群, 記爲 S_3)。

$MTS(4)$ 亦是唯一的, 即 $\{\langle 0,1,2\rangle, \langle 1,0,3\rangle, \langle 2,3,0\rangle, \langle 3,2,1\rangle\}$, 它也是自反的, 它共有 12 個反自同構, 即 Z_4 上全部形爲 $(*)(*)(*,*)$ 與 $(*,*,*,*)$ 的置換。但它們不構成群, 若用代數學上的記法, 這 12 個置換恰是 $S_4 \backslash A_4$, 即 4 次對稱群 S_4 去掉其中的 4 次交代群 A_4。

C. J. Colbourn 和 A. Rosa 在 1992 年的一篇綜述 [4]中提出了這樣的公開問題: "對什麼樣的階數存在自反的 DTS?" 以及 "對什麼樣的階數存在自反的 MTS?" 我們將在這節介紹我們對這問題的回答。

1.自反的$DTS(v,1)$的存在譜

全部工作分以下八步進行。

(1) 當 $v \equiv 1,3 \pmod 6$ 時, 存在自反的 $DTS(v)$。這只需由 Steiner 三元系 $STS(v) = (X, \mathcal{B})$ (它的存在譜恰是 $v \equiv 1,3 \pmod 6$) 出發, 將 $\mathcal{B}$ 中每個無序三元組 $\{x,y,z\}$ 換爲兩個可遷三元組 (x,y,z) 與 (z,y,x) 即可。它的反自同構可取爲恆等映射。

(2) 當 $v \equiv 4 \pmod 6$ 時, 存在自反的 $DTS(v)$。令 $v = 6t+4$, 取 $X = \{\infty\} \cup (Z_{2t+1} \times Z_3)$, 其中 $Z_{2t+1} = \{0, 1, \cdots, 2t\}$, $Z_3 = \{0,1,2\}$。在 X 上構作如下的 $\mathcal{B}$:

$((x+y,i),(x,i+1),(x-y,i))$, 其中 $x \in Z_{2t+1}$, $1 \le y \le t$, $i \in Z_3$;

$((x-y,i),(x,i-1),(x+y,i))$, 其中 $x \in Z_{2t+1}$, $1 \le y \le t$, $i \in Z_3$;

$((x,1),(x,0),(x,2))$, $(\infty,(x,2),(x,0))$, $((x,2),\infty,(x,1))$ 及 $((x,0),(x,1),\infty)$, 其中 $x \in Z_{2t+1}$。

定義映射 f 爲: $f(\infty) = \infty$, $f(x,0) = (x,0)$, $f(x,1) = (x,2)$, $f(x,2) = (x,1)$ 其中 $x \in Z_{2t+1}$ 。則 $(X, \mathcal{B}, f)$ 即構成一個自反的 DTS $(6t+4)$。這裡的記號 $(X, \mathcal{B}, f)$ 是專用來記自反的有序三元系的, 其中 X 爲元素集, $\mathcal{B}$ 爲區組集, 而 f 爲給

定的反自同構映射。注意這裡的最後一組四個區組與前邊提到的 $DTS(4)=(Z_4,\mathcal{B}_1)$ 是同構的, 而映射 f 即是那裡指出的四個映射的第一個, f_1。

(3) 對於 $n\equiv 1,3 \pmod 6$, 若有自反的 $DTS(m)$, 則存在自反的 $DTS(mn)$, 根據這一結論, 取 $n=3$ 可知"若存在自反的 $DTS(m)$, 則存在自反的 $DTS(3m)$"。

(4) 直接構造自反的$DTS(18)$與$DTS(24)$。

(5) 若存在自反的 $DTS(v)$, 則存在自反的 $DTS(4v)$。

首先, 構作自反的 $MTS(4)=(I_4,\mathcal{B}_c,g)$ 與 $DTS(4)=(I_4,\mathcal{B}_t,g)$:

$$\mathcal{B}_c=\{\langle 0,1,2\rangle,\langle 1,0,3\rangle,\langle 2,3,0\rangle,\langle 3,2,1\rangle\};$$
$$\mathcal{B}_t=\{(0,2,1),(1,3,0),(2,0,3),(3,1,2)\}。$$

它們具有同樣的反自同構 $g:g(0)=0, g(1)=1,\ g(2)=3,\ g(3)=2$。設已知自反的 $DTS(v)=(I_v,\mathcal{A},f)$。在 $I_4\times I_v$ 上構作如下的可遷三元組系 $\mathcal{T}$:

$((x,i),(x,j),(x,k))$, 其中 $x\in I_v$, $(i,j,k)\in\mathcal{B}_t$;

$((x,i),(y,i),(z,i))$, 其中 $(x,y,z)\in\mathcal{A}$, $i\in I_4$;

$((x,i),(y,j),(z,k))$, 其中 $(x,y,z)\in\mathcal{A}$, $\langle i,j,k\rangle\in\mathcal{B}_c$。

並定義映射 $F(x,i)=(f(x),g(i))$, 則 $(I_v\times I_4,\mathcal{T},F)$ 即爲自反的 $DTS(4v)$。

根據這一構造及 (3) 的推論可知: "若存在自反的 $DTS(v)$, 則存在自反的 $DTS(4^kv)$ 及 $DTS(12v)$。

(6) 根據以上 (1)—(5), 可證明: "對於 $v\equiv 0 \pmod{18}$, 存在自反的 $DTS(v)$"。

(7) 通過幾個遞歸構造得到具有某種特殊性質的自反 $DTS(6k+4)$, 從而再利用一個遞歸構造得到自反 $DTS(18k+6)$, $k\geq 1$。

(8) 不存在自反的 $DTS(6)$。

根據以上 (1)—(8) 的結論, 我們可以得到

定理11: 存在自反的 $DTS(v)$ 當且僅當 $v\equiv 0,1 \pmod 3$ 且 $v\neq 6$。

證明: 由定理1及上述 (8) 知所述條件是必要的, 所有可能的階數 v 可分爲四類: $v\equiv 0,1,3,4 \pmod 6$, 後三類已分別在 (1) 與 (2) 中解決, 而 $v\equiv 0 \pmod 6$ 這一類又可分爲三個子類: $v\equiv 0,6,12 \pmod{18}$。其中前兩個子類由 (6) 與 (7) 可知, 而當 $v=18k+12=3(6k+4)$ 時, 可由 (2) 與 (3) 解決。

2.自反的$MTS(v,1)$的存在譜

尋求自反 $MTS(v,1)$ 的存在譜的過程如下。

(1) 當 $v\equiv 1,3 \pmod 6$ 時存在自反的 $MTS(v)$。這一步與自反 $DTS(v)$ 的第 (1) 步類似。

(2) 當$v\equiv 4 \pmod 6$ 時存在自反的 $MTS(v)$。它與自反 $DTS(v)$ 的第 (2) 步也是類似的。

(3) 若存在自反的 $MTS(m)$ 與 $MTS(n)$, 則存在自反的 $MTS(mn)$。這一結論優於$DTS(v)$ 的第 (3) 步 (那裡要限定 $n \equiv 1, 3 \pmod 6$)。它的構造是:

令 X, Y 分別爲 m, n 元集, 設已知有自反的 $MTS(m) = (X, \mathcal{A}, f)$ 與自反的 $MTS(n) = (Y, \mathcal{B}, g)$。在集合 $X \times Y$ 上構作如下循環三元系 $\mathcal{T}$

$\langle (x,u),(y,v),(z,w)\rangle$, 其中 $\langle x,y,z\rangle \in \mathcal{A}$, $\langle u,v,w\rangle \in \mathcal{B}$;

$\langle (x,u),(x,v),(x,w)\rangle$, 其中 $x \in X$, $\langle u,v,w\rangle \in \mathcal{B}$;

$\langle (x,u),(y,u),(z,u)\rangle$, 其中 $\langle x,y,z\rangle \in \mathcal{A}$, $u \in Y$。

定義映射 $F(x,u) = (f(x), g(u))$, 對於任意 $(x,u) \in X \times Y$。則 $(X \times Y, \mathcal{T}, F)$ 即是一個自反的 $MTS(mn)$。

根據以上三款, 我們有以下推論:“若存在自反的 $MTS(v)$, 則存在自反的 $MTS(3v)$, $MTS(4v)$ 和 $MTS(12v)$”。

(4) 直接構造自反的 $MTS(18)$。

(5) 根據以上 (1)—(4), 可證明: “對於 $v \equiv 0 \pmod{18}$, 存在自反的 $MTS(v)$”。

(6) 通過幾個遞歸構造得到具有某種特殊性質的自反的 $MTS(6k+4)$, 從而再利用一個遞歸構造得到自反的 $MTS(18k+6)$, $k \geq 1$。根據以上 (1)—(6) 的結論, 仿照定理11的證明, 我們即可得到

定理12: 存在自反的 $MTS(v)$ 當且僅當 $v \equiv 0, 1 \pmod 3$ 且 $v \neq 6$。

通過本節的 1 與 2, 我們完成了自反 $DTS\ (v,1)$ 與自反 $HTS(v,1)$ 的存在譜。那麼, 對什麼樣的階數存在有自反的 $HTS(v,1)$ 呢? 申言之, 如果對某個階數 v 存在有自反的 $HTS(v,1)$, 那麼對於不同的 c, $1 \leq c \leq \frac{v(v-1)}{3} - 2$, 是否都有自反的 $c - HTS(v,1)$ 呢? 這裡的 $c - HTS(v,1)$ 表示該混成三元系中恰含 c 個循環三元組 (從而所含可遷三元組的個數是 $\frac{v(v-1)}{3} - c$), 已經知道, 對任意的 $1 \leq c \leq \frac{v(v-1)}{3} - 2$, 存在 $c - HTS(v,1)$。

例如, 以下的 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ 都是 Z_4 上的 $HTS(4,1)$。若給出映射 $f = (0)(2)(1,3)$, 則它們都是自反的

$\mathcal{B}_1$:	$\langle 1,2,3\rangle$	$\mathcal{B}_2$:	$\langle 0,1,3\rangle$	$\mathcal{B}_3$	$\langle 0,1,2\rangle$
	(1,0,3)		(2,0,3)		$\langle 0,2,3\rangle$
	(2,0,1)		(3,2,1)		(1,0,3)
	(3,0,2)		(1,0,2)		(3,2,1)

注意這裡的 $\mathcal{B}_1$ 與 $\mathcal{B}_2$ 都是 $1 - HTS(4,1)$, 但它們不同構; 而 $\mathcal{B}_3$ 是 $2 - HTS(4,1)$。

進而, 對任意的 λ, 自反的 $DTS(v,\lambda)$, $MTS(v,\lambda)$ 以及 $HTS(v,\lambda)$ 的存在性問題也都還未被完全解決。

五. 一些其它問題

1.可分解性與幾乎可分解性

v 元集 X 上的一些循環 (可遷) 三元組, 若它們恰構成 X 的一個分析, 則稱這些三元組構成一個平行類, 顯然它應恰由 $\frac{v}{3}$ 個循環 (可遷) 三元組構成, 因此只有當 $3|\ |X|$ 時, 才有 X 上的平行類。當 $v \equiv 0 \pmod 3$ 時, 若

一個 $MTS(v,1)$ (或 $DTS(v,1)$) 的全部區組可分拆爲若干個平行類, 則稱它爲可分解的, 記爲 $RMTS(v,1)$ (或 $RDTS(v,1)$)。

例10. $RMTS(12,1)$

取 Z_4 上的有序三元組集 $\mathcal{B} = \{(0,1,2), (1,0,3), (2,3,0), (3,2,1)\}$ 及置換 $\sigma=(0)\ (123)$。連續進行 i 次置換 σ 記爲 σ^i, 易見 $\sigma^1=(0)(123)$, $\sigma^2=(0)(132)$, $\sigma^3=(0)(1)(2)(3)$。今在集合 $I_3\times Z_4$ 上構作如下 11 個平行系 ($I_3=\{1,2,3\}$):

(1) $\forall (x,y,z)\in\mathcal{B}$, 令 $t=Z_4\backslash\{x,y,z\}$。

$$\begin{cases}\{\langle (i,x),(i,y),(i,z)\rangle;\ i\in I_3\},\\ \langle (1,t),(2,t),(3,t)\rangle。\end{cases}$$

(2) 對於 $k=1,2,3,$

$$\{\langle (1,\sigma^k(x)),(2,\sigma^k(y)),(3,\sigma^k(z))\rangle;\ (x,y,z)\in\mathcal{B}\}。$$

(3) 對於 $k=1,2,3,$

$$\{\langle (1,\sigma^k(x)),(3,\sigma^k(y)),(2,\sigma^k(z))\rangle;\ (x,y,z)\in\mathcal{B}\}。$$

(4) $\{\langle (1,t),(3,t),(2,t)\rangle;\ t\in Z_4\}$。

其中 (1) 含 4 個平行類, (2) 與 (3) 各含 3 個平行類, (4) 僅含 1 個平行類。每個平行類含4個循環三元組, 總共44個區組恰構成一個 $MTS(12,1)$, 這不難說明。而可分解性是顯然的。

例11. $RDTS(18,1)$

集合取爲 $\{\infty\}\cup Z_{17}$。對於每個 $i\in Z_{17}$, 可遷三元組集 $\mathcal{B}_i=\{(i,\infty,11+i),(1+i,9+i,14+i),(7+i,2+i,5+i),(4+i,3+i,10+i),(6+i,15+i,8+i),(12+i,16+i,13+i)\}$ 恰是一個平行類。它的後五個區組所屬的可遷型依次是 $[8,5,13],[12,3,15],[16,7,6],[9,10,2]$ 與 $[4,14,1]$, 第一個區組所含的有序對差是 11, 它與這五個型中的 15 個有序對差恰取到 1∼16 各一次。因此, 17個平行類 $\mathcal{B}_i$ 中全部 $6\times 17=102$ 個可遷三元組恰好將 Z_{17} 中全部有序對及形爲 (∞,x), (x,∞), $x\in Z_{17}$ 的有序對全都各取一次。

當 $v\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$ 時, 不存在平行類, 也就談不上 $RMTS(v)$ 與 $RDTS(v)$。但當 $v\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$ 時, 有一種“幾乎可分解”的說法。若 $v=3k+1$ 元集 X 上的 k 個循環 (可遷) 三元組恰構成 X 中某 $3k$ 個元的一個分拆, 則稱它們爲一個“幾乎平行類”。當 $v\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$ 時, 若一個 $MTS(v,1)$ (或 $DTS(v,1)$) 的全部區組可分拆爲若干個“幾乎平行類”。則稱它是幾乎可分解的, 記爲 $ARMTS(v,1)$ (或 $ARDTS(v,1)$)。

例11. $ARMTS(7,1)$

元素集合取爲 Z_7。對於每個 $i\in Z_7$, 循環三元組集 $\alpha_i=\{\langle 1+i,2+i,4+i\rangle,\langle 6+i,5+i,3+i\rangle\}$ 顯然是一個幾乎平行類。α_i 中兩個區組分別屬於循環型 $[1,2,4]$ 與 $[6,5,3]$, 恰好涉及了全部有序差。因此, 七個幾乎平行類 α_i 中全部 14 個循環三元組恰好將 Z_7 中全部有序對各取一次。

例12. $ARDTS(10,1)$

它由 Z_{10} 上的以下 10 個"幾乎平行類" α_i 構成:

(1,2,3)	(0,6,2)	(9,7,1)	(5,1,6)	(1,7,5)
(8,7,4)	(7,8,3)	(3,5,8)	(7,2,0)	(2,8,6)
(9,6,5)	(5,9,4)	(6,4,0)	(4,9,8)	(0,3,9)
α_0	α_1	α_2	α_3	α_4
(6,1,8)	(4,3,1)	(0,8,1)	(1,9,0)	(2,1,4)
(2,7,9)	(8,9,2)	(4,2,5)	(5,3,2)	(3,7,6)
(3,0,4)	(5,0,7)	(6,9,3)	(4,6,7)	(8,0,5)
α_5	α_6	α_7	α_8	α_9

每個平行類α_i 所缺少的一個元恰是 i。

有序三元系的可分解性與幾乎可分解性的研究 (對於 $\lambda = 1$) 已經完成。J. C. Bermond, A. Germa 與 D. Sotteau 在1979年證明了:"存在 $RMTS(v)$ 與 $RDTS(v)$ 當且僅當 $v \equiv 0 \pmod 3$ 且 $v \neq 6$"。而 F. E. Bennett 與 D. Sotteau 在 1981 年證明了:"存在 $ARMTS\ (v)$ 與 $ARDTS(v)$ 當且僅當 $v \equiv 1 \pmod 3$"。(見 [5],[6])

進一步需要考慮的是$RMTS\,(v)$, $RDTS(v)$ 與 $ARMTS(v)$, $ARDTS(v)$ 的大集問題。亦即以下問題:

(1) 對於每個 $v \equiv 0 \pmod 3$, $v \neq 6$, 是否可將 v 元集上全部循環三元組分拆爲 $(v-2)$ 個族, 使得每一族都是一個 $RMTS(v)$?

(2) 對於每個 $v \equiv 0 \pmod 3$, $v \neq 6$, 是否可將 v 元集上全部可遷三元組分拆爲 $3(v-2)$ 個族, 使得每一族都是一個 $RDTS(v)$?

(3) 對於每個 $v \equiv 1 \pmod 3$, 是否可將 v 元集上全部循環三元組分拆爲 $(v-2)$ 個族, 使得每一族都是一個 $ARMTS(v)$?

(4) 對於每個 $v \equiv 1 \pmod 3$, 是否可將 v 元集上全部可遷三元組分拆爲 $3(v-2)$ 個族, 使得每一族都是一個 $ARDTS(v)$?

在上一篇文章中提到柯克曼三元系大集 (即 $LKTS(v)$) 時曾談到可分解性要求給大集構造帶來的難度。這意味著, 上述四個問題的解決恐怕也不是容易的。在問題 1 與問題 2 中, 對於其中一半的階數 $v \equiv 3 \pmod 6$, 如果存在有 $LKTS(v)$, 則將其每個 (無序的) 平行類換爲正、反加序的兩個平行類, 即可給出 $LRMTS(v)$ (或 $LRDTS(v)$)。但問題是, 至今 $LKTS(v)$ 的存在性還遠未解決, 人們知道的僅是 $v = 3^k m$ 這樣的階數, 其中 $m \in \{1, 5, 11, 17, 25, 35, 43\}$, k 爲任意數。

2.不同構有序三元系的計數

有序三元系的同構概念前邊已經談過。同階的兩個有序三元系, 若不存在它們間的同構映射, 則稱它們是不同構的。比如上節開始我們曾列出過三個 $DTS(4)$: $(Z_4, \mathcal{B}_i)$, $i = 1, 2, 3$, 我們並指出它們是彼此不同構的。事實上, 可以用 Z_4 上的全部 24 個置換逐一檢查證實這一說法 (即對任一置換 π, 不會有 $\pi\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_j$, $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$)。再比如下邊三個 $\mathcal{A}_i$ 都是 Z_7 上的 $MTS(7)$:

$$\underbrace{\begin{array}{cc} 013 & 310 \\ 124 & 421 \\ 235 & 532 \\ 346 & 643 \\ 450 & 054 \\ 561 & 165 \\ 602 & 206 \end{array}}_{\mathcal{A}_1} \quad \underbrace{\begin{array}{cc} 034 & 430 \\ 135 & 531 \\ 236 & 632 \\ 012 & 465 \\ 025 & 416 \\ 056 & 421 \\ 061 & 452 \end{array}}_{\mathcal{A}_2} \quad \underbrace{\begin{array}{cc} 013 & 254 \\ 026 & 143 \\ 032 & 156 \\ 045 & 162 \\ 051 & 346 \\ 064 & 235 \\ 124 & 365 \end{array}}_{\mathcal{A}_3}$$

但它們彼此是不同構的, 這點可從以下觀察得知 (兩條中的任一條都可以區分出它們):

(1) 所含“3階子設計”的個數不同: $\mathcal{A}_1$ 的每行兩個區組是互爲反序的, 因此每行都是一個 $MTS(3)$。於是 $\mathcal{A}_1$ 中有 7 個子 $MTS(3)$。($\mathcal{A}_1$ 的一半若改爲無序三元組, 恰是 Steiner 三元系 $STS(7)$)。$\mathcal{A}_2$ 中只含有3個子 $MTS(3)$, 即前三行。而 $\mathcal{A}_3$ 中不含任何子 $MTS(3)$。

(2) 所含“幾乎平行類”的個數不同: $\mathcal{A}_3$ 的每個行都是一個幾乎平行類, 因此 $\mathcal{A}_3$ 實際上是一個 $ARMTS(7)$。$\mathcal{A}_2$ 的後四行, 每行是一個幾乎平行類, 而且它不再含其它幾乎平行類, 因此它恰有4個幾乎平行類。$\mathcal{A}_1$ 中不含任何幾乎平行類。

以上兩款所比較的量 (“3階子設計個數” 及 “幾乎平行類個數”) 很容易說明都是在同構映 射下的不度量。在判定兩個設計是否同構時 (特別當階數比較大時), 往往需要通過計算它的同構不變量來說明。對指定的一類設計, 找出它的同構不變量(特別是那些比較深刻的) 也不是很容易的。

通常, 在談及某種設計 (參數給定) 的個數時往往有兩種意義。一種是所謂不相交的計數, 即兩兩“不相交”(或“無公共區組”) 的最大個數, 大集問題所談的實際即是這種意義下的計數。當然, 有的階數的設計不能構成大集, 此時也同樣有不相交計數問題 (比如 $v \equiv 0,1 \pmod 3$ 時不存在 $LMTS(v,3)$ 與 $LDTS(v,3)$, 但仍可考慮兩兩不相交的 $MTS(v,3)$ 或 $DTS(v,3)$ 的最大個數; 再比如不存在 $LSTS(7)$, 但已經知道兩兩不相交的 $STS(7)$ 的最大個數是 2)。不相交計數 (及實際構作) 在碼論中很有用處。另一種計數問題則是上邊談的不同構計數了, 這種問題難度很大, 因爲當階數較大時。按給定設計要求的組態數量極多, 如果沒有好的方法, 即使用高速計算機, 也難於窮盡全部組態。一般的做法是——逐步擴展考察範圍, 通過與已知設計的 (用同構不變量的) 比較, 不斷提高不同構個數的下界。

對於 $MTS(v,1)$ 與 $DTS(v,1)$, 現今已得知的確切的不同構個數有

$MTS(3,1)$	1	$DTS(3,1)$	1
$MTS(4,1)$	1	$DTS(4,1)$	3
$MTS(7,1)$	3	$DTS(6,1)$	32
$MTS(9,1)$	18	$DTS(7,1)$	2368
$MTS(10,1)$	144		

有興趣的讀者可以試著去求其它階數。

作爲本文的結尾想附帶提一下剛剛見到的本刊十七卷第二期上黃克華君的一篇題爲“區組設計的迴響”文章。該文起名爲“迴響”, 很解人意。本人與各位作者撰文刊載之宗旨

即在於介紹一些數學知識與進展, 以期引起讀者的興趣與迴響, 從而吸引更多的人投入到有關分支的研究中。我想這也正是《數學傳播》刊物“傳播”二字的含意所在。希望本刊今後能有更多這樣的迴響與交流。鑒於該文涉及到了我前一篇文章 [17]所提的 $LKTS(15)$, 而此刻文章的這一節正在談設計的計數, 因此想順便指出以下兩點:

(1) 該文第五節 (80-83 頁) 所給出的 $LKTS(15)$ 並不是新的, 它與 Denniston 1974 年已得到的 $LKTS(15)$ 是同構的。後者的元素集 $X=\{a,b\}\cup Z_{13}$, 其中 $Z_{13}=\{0,1,\cdots,12\}$; 而黃文的元素集 $Y=\{1,2,\cdots,15\}$。如果令映射 $f:X\to Y$ 是

$$f(a)=14,\ f(b)=15,$$
$$f(j)=\begin{cases} j+7 & (0\le j\le 6)\\ j-6 & (7\le j\le 12)\end{cases}$$

則 f 是一個 1-1 映射, 而且它將 Denniston 構造中的頭一周 (即我的上一篇文章 32 頁尾部到 33 頁開始所列的諸區組 $i=0$ 情形) 之諸平行類, 即星期日、一、二、三、四、五、六, 依次映射到黃文的第一個小集 H_0 之第 (3), (4), (2), (7), (5), (6), (1) 行各平行類。進而, 因大集中其它小集都是從初始小集模 13 平移得來的 (14 與 15 及 a 與 b 都是作爲不動元出現的), 所以黃文所得與 Denniston 所得是同構的。

至於所用方法, 實質都是: 列舉 Z_{13} 中的無序三子集的“對子差”型 (仿前所述可知, 無序三元組 $\{x,y,z\}$, $x<y<z$ 所屬的型可記爲 $[y-x,z-y,x-z]$, 它包容了該三元組的 6 個差 $\pm(y-x)$, $\pm(z-y)$ 與 $\pm(x-z)$。注意: 型 $[a,b,c]=[b,c,a]=[c,a,b]$。在 Z_{13} 中, 共有 22 個這種型—[1,2,10], [1,10,2], [1,3,9], [1,9,3], [1,4,8], [1,8,4], [1,5,7], [1,7,5], [2,3,8], [2,8,3], [2,4,7], [2,7,4], [2,5,6], [2,6,5], [3,4,6], [3,6,4], [1,1,11], [2,2,9], [3,3,7], [4,4,5], [5,5, 3], [6,6,1]), 合理選取每個型各一個區組, 再選出 $Z_{13}\backslash\{0\}$ 的兩種 2-子集分拆 (使每種分拆 $\{x_i,y_i\}$, $1\le i\le 6$ 都滿足條件 $\{\pm(x_i-y_i);\ 1\le i\le 6\}=Z_{13}\backslash\{0\}$。一種分拆的 6 個 2-子集分別與 a 構成三元組, 另一種分拆的 6 個 2-子集則分別與 b 構成三元組, 總共得到 12 個分別含 a 或 b 的區組), 最後使得上述選出的 $22+12=34$ 個區組與 $\{a,b,0\}$ 一起可以構成一個 $KTS(15)$。當然, 關鍵在於前邊畫黑點“·”的動作, 這需要對總數爲 $13^{22}(3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11)^2$ 種可能的搭配進行核查。顯然, 如果沒有進一步的處理辦法, 僅靠這種過程是難以幸運地“碰上”正確選擇的。

(2) 我在上一篇文章中用有限域方法給出的那個 15 階大集 (見該文36頁), 並不是 $LKTS(15)$ 而僅是 $LSTS(15)$。因爲它的區組集不存在平行類分拆 (儘管它也含有平行類)。事實上, $\mathcal{B}_0$ 的全部區組列出來是:

a	b	0	a	1	6	b	6	10	0	1	12	1	10	2	7	5	1
1	3	9	a	10	8	b	8	9	0	6	7	2	7	4	8	2	3
2	6	7	a	9	2	b	2	12	0	3	10	3	4	6	9	12	5
4	12	10	a	12	7	b	7	3	0	5	8	4	1	8	10	9	7
7	8	11	a	3	5	b	5	4	0	4	9	5	11	10	11	6	9
			a	4	11	b	11	1	0	2	11	6	8	12	12	3	11

我們只需核查 $\{a,1,6\}$ 可否在一個平行類中即可 (這並不煩)。核查結果是: 包括它在內的兩兩無公共元區組集最多只能含 4 個區組, 差一個區組達不到平行類。因此這個設計不是可分解的, 從而整個大集也就 (從 STS 的意義上) 不能與已知的 $LKTS(15)$ 同構。

參考文獻

[1] C. C. Lindner and A. P. Street, Construction of large sets of pairwise disjoint transitive triple systems, Euro- pean J. Combin. 4(1983), 335-346.

[2] Luc Teirlinck, Large sets with holes, preprint.

[3] Luc Teirlinck and C.C. Lindner, The construction of large sets of idempotent quasigroups, European J. Combin. 9(1988), 83-89.

[4] C.J. Colbourn and A. Rosa, Directed and Mendelsohn triple systems, in Chapter 4 of Contemporary Design Theory, A Wiley Interscience Publication (1992), 97-136.

[5] J.C. Bermond, A. Germa and D. Sotteau, Resolvable decomposition of K_n^*, J. Combin. Theory A, 26(1979), 179-185.

[6] F.E. Bennett and D. Sotteau, Almost resolvable decomposition of K_n^*, J. Combin. Theory B, 30(1981), 228-232.

[7] Q.D. Kang and Y.X. Chang, Symmetric Mendelsohn triple systems and large sets of disjoint Mendelsohn triple systems, in Combinatorial designs and applications (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 126), 69-78, Marcel Dekker Inc. 1990.

[8] Q.D. Kang, The construction of large sets of disjoint Mendelsohn triple systems of order 2^n+2, Discrete Math., 90(1991), 199-205.

[9] Q.D. Kang and J.G. Lei, A completion of the spectrum for large sets of disjoint Mendelsohn triple systems, Bulletin of the ICA, 9 (1993), 14-26.

[10] Q.D. Kang and Y.X. Chang, A completion of the spectrum for large sets of disjoint transitive triple system, J. Combin. Theory (A), 60(1992), 287-294.

[11] Q.D. Kang, J.G. Lei and Y.X. Chang, The spectrum for large sets of disjoint Mendelsohn triple systems with any index, preprint.

[12] Y.X. Chang, On large sets of directed triple systems, preprint.

[13] Y.X. Chang, On large sets of ordered triple systems, preprint.

[14] Q.D. Kang and J.G. Lei, On large sets of hybrid triple systems, preprint.

[15] Q. D. Kang, Y. X. Chang and G. H. Yang, The spectrum of self-converse DTS, preprint.

[16] Y. X. Chang, G. H. Yang and Q. D. Kang, The spectrum of self-converse MTS, preprint.

[17] 康慶德, 從西爾威斯特問題談起, 數學傳播, 15卷2期 (80年6月), pp 32-42。

—本文作者任教於中國河北師範學院數學研究所—