完美圖

張鎮華

I. Gessel 和 G.-C. Rota 在 1987 年編輯 "Classic Papers in Combinatorics" 一書, 收集了三十九篇從1930年以來影響組合數學極深遠的文章。這些文章長者達六十三頁, 短的只有一頁 (事實上只有五行證明)。本文旨在從頭闡述 L. Lovász 有關完美圖的四頁著作 (見第447至450頁)。

1. 圖論源起

圖論源自 Euler 1736年為解答克尼斯堡橋問題而寫的一篇文章, 其後的兩百年間, 在電路及化學等各領域中, 人們用相類似的概念, 但不同名稱, 來解釋各自的問題, 可謂圖論的春秋戰國時代。1936 年 Konig 寫出第一本圖論的書, 這門學問遂堂堂進入一統大業, 自此之後, 各式各樣有關圖論書籍及雜誌文章出現, 圖論成了組合數學的一大支。若干基本內容已成為大部份書籍共同的基礎, 本文所要討論的完美圖相關的著色數和點團數就是例子。且聽細說。

一個圖是一有序對$G=(V,E)$, 其中 V 是非空有限集, 其元素稱為該圖的(頂) 點, E 是一些 V 的二元素子集的集, 其元素稱為該圖的邊。為簡便我們常將邊 $\{x,y\}$ 寫成 xy 或 yx。當 xy 為一邊時, 我們稱點 x 和點 y 相鄰, 點 x 和邊 xy 相鄰, 點 y 和邊 xy 相鄰。

為了視覺上的方便, 我們常畫圖來表示上述用集合定義的圖, 我們在平面上用一點或一小圈來代表圖的一點, 用連接兩點的曲線來代表一邊。舉例來說, 圖1 就是下述圖 $G=(V,E)$ 的畫圖表示:

$$
\begin{aligned}
V &= \{a,b,c,d,e,f\},\\
E &= \{ac,ad,bc,cd,de,cf,df\}
\end{aligned}
$$

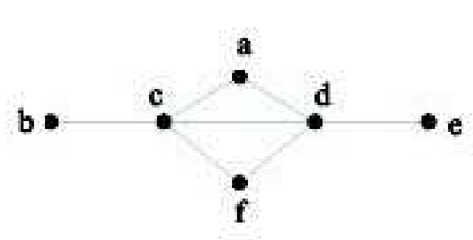


圖1: $G=(V,E)$

若 $S\subseteq V$, 由 S 誘導出來的子圖 $G_S=(S,E_s)$, 其中

$$E_S=\{xy\in E:\ x\in S \text{ 且 } y\in S\}。$$

而 $G-S$ 則是指G_{V-S}, 也就是將 S 從圖中去除, 並將與 S 的點相鄰的邊也一齊去掉。$G-\{x\}$ 常簡寫爲 $G-x$。

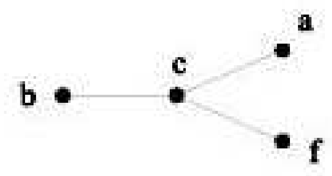


圖2: $G_{\{a,b,c,f\}}$

圖 $G=(V,E)$ 的補圖 $\overline{G}=(V,\overline{E})$, 其中

$$\overline{E}=\{xy:\ x\neq y,\ x\in V,\ y\in V,\ xy\notin E\}。$$

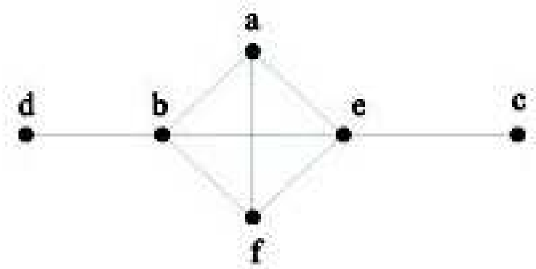


圖3: $\overline{G}=(V,\overline{E})$

2. 四個基本參數

下面這四個基本概念, 是圖論中常見且重要的, 它們是完美圖理論的源頭。

圖中的一兩兩相鄰 (不相鄰) 的點集叫做點團集(獨立集)。例如, 圖1中, $\{a,c,d\}$ 爲一點團集, 而 $\{a,b,e,f\}$ 爲一獨立集。圖的點團集是其補圖的獨立集, 而其獨立集是其補圖的點團集; 是故, 此二概念實乃同一概念。定義

點團數$\mu(G)$: G 中最大點團集的點數,
獨立數$\alpha(G)$: G 中最大獨立集的點數。

對任一圖 G, 下式恆成立:

$$\mu(G)=\alpha(\overline{G}) \text{ 且 } \alpha(G)=\mu(\overline{G})。$$

圖 $G=(V,E)$ 的著色數 $\chi(G)$(點團覆蓋數 $\theta(G)$) 是使得我們可以將 V 分割成 k 個獨立集 (點團集) 的最小正整數k。著色數的另一個看法是, 我們可以用 k 種顏色塗點, 使得同色的點必不相鄰, 也就是說, 同一色的點構成一獨立集。這兩個參數從補圖的角度來看, 也是一體的兩面, 我們也有:

$$\chi(G)=\theta(\overline{G}) \text{ 且 } \theta(G)=\chi(\overline{G})。$$

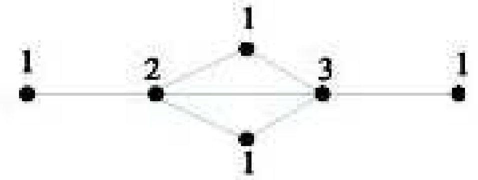


圖4: 圖1 中 G 的 3 色塗法

就因爲有上述補圖中相等的性質, 爲了節省, 我們以下只討論 μ 和 χ 這兩個參數, 配合上 G 和 $\overline{G}$, 實際上就有四種概念。

引理1: 對任何圖 G, $\chi(G)\geq\mu(G)$ 恆成立。

證:設V被分割成獨立集$S_1,S_2,\cdots,S_k$ 其中 $k=\chi(G)$, 而C是大小爲$\mu(G)$ 的點團集。由定義知每個 S_i 包括 C 中最多一點, 是故 $k\geq|C|$, 引理由此得證。

圖 5 所示的 5 圈 C_5 是一使得引理 1 的不等式眞正不等的例子, 一般而言長度大於 4 的奇圈 C_{2n+1} $(n \geq 2)$ 均有此性質。

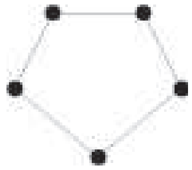


圖5: $\chi(C_5) = 3 > 2 = \mu(C_5)$

尤有甚者, 我們可以找出很多例子, 使得 $\chi(G)$ 和 $\mu(G)$ 的差很大, 例如用 n 個 C_5 聯合所成的 nC_5 其補圖 $\overline{nC_5}$ 恆有:

$$\chi(\overline{nC_5}) = 3n > 2n = \mu(\overline{nC_5})。$$

3. 完美圖源起

引理 1 一般稱爲*弱對偶不等式*, 一個相關的問題是如何刻劃等式成立時 G 該有的條件, 許多其它的經驗告訴我們, 當對偶等式成立時, 圖大多有美好的性質。但是對 χ 和 μ 而言, 光是要求 $\chi(G) = \mu(G)$, 事實上不夠。舉例來說, 假若 $G = (V, E)$ 爲任一圖 (可以是一內在很亂毫無架購的圖), 設 G 有 n 個點, 考慮有 n 個點的完全圖 K_n (圖中的點兩兩相鄰), 則對 G 和 K_n 的聯集 $G \cup K_n$ 恆有

$$\chi(G \cup K_n) = n = \mu(G \cup K_n)。$$

意思是說 χ 和 μ 值相等的圖中也可能藏有極壞的子圖。因此之故, 我們實在有要求所有誘導子圖的 χ 等於 μ 的必要。所以 C. Berge 在 1958 年定義: G 爲完美圖若對 G 的所有誘導子圖 H 恆有 $\chi(H) = \mu(H)$。事實上 Berge 原來有兩個定義: χ 完美圖就是這裡的完美圖, θ 完美圖則是指其補圖爲 χ 完美圖, 我們只用一個概念是一簡化。

完美圖最大的不協調者是奇洞, 也就是長度大於 4 的奇圈 C_n, 其中 n 爲 ≥ 5 的奇數, 另一則爲反奇洞, 即是奇洞的補圖 $\overline{C_n}$, 其中 n 爲 ≥ 5 的奇數。因爲當 $n \geq 5$ 爲奇數時,

$$\chi(C_n) = 3 > 2 = \mu(C_n)$$

且

$$\chi(\overline{C}_n) = (n+1)/2 > (n-1)/2 = \mu(\overline{C}_n),$$

所以有

引理2: 完美圖不含奇洞及反奇洞。

有許多經驗都顯示引理 2 的逆敍述成立, 而在這些例證中也一再的顯示, G 和 $\overline{G}$ 或者同時爲完美圖, 或者同時不爲完美圖, 基於種種經驗, Berge 在 1958 寫下兩個有關完美圖的猜測, 這一序列的理論遂展開序幕。

(C1) G 爲完美圖若且唯若 $\overline{G}$ 爲完美圖。

(C2) G 爲完美圖若且唯若 G 不含奇洞及反奇洞。

以上這兩個猜測中, (C1) 若有一方向成立, 另一方向自然成立, (C2) 的一方向就是引理 2, 故只要證明反方向。有趣的是, (C2) 可以推得 (C1), 理由是, 當 (C2) 成立時:

G 爲完全圖

$\stackrel{(C2)}{\Longleftrightarrow}$ G 不含奇洞及反奇洞

$\Longleftrightarrow$ $\overline{G}$ 不含反奇洞及奇洞

$\stackrel{(C2)}{\Longleftrightarrow}$ $\overline{G}$ 爲完全圖

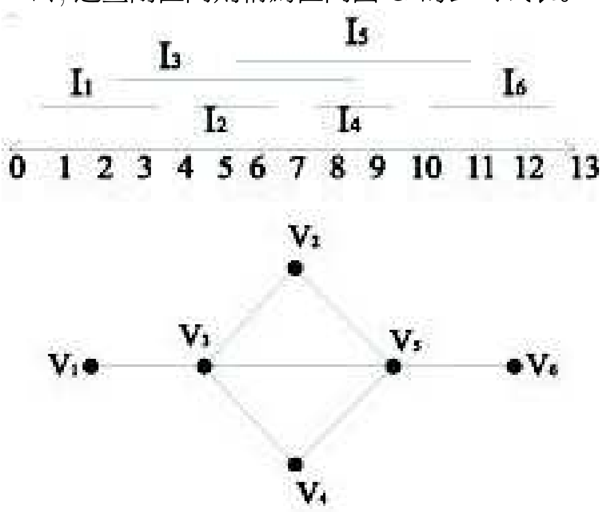
所以, 史上稱 (C1) 爲完全圖的弱猜測, 而 (C2) 爲完全圖強猜測。(C1) 已於 1971 年被 L. Lovász 證出來 [4], 本文一開頭所介紹的 Lovász 的文章, 是第二種證法, 其精神和 Fulkerson [2] 的 anti-blocking 多面體理論實爲同一物。另一方面, (C2) 則歷經三十餘年仍不得解, 許多理論及文章, 繞此打轉, 但終不得其門而入。今年元月在 DIMACS 召開的完美圖研討會, 其專精的程度已非普通圖論學者所能立即入門。

4. 完美圖的第一位證人

最早被驗證完美圖的兩個猜測成立的圖類是區間圖。在實數軸上選取 n 條閉區間 $I_i=[a_i,b_i]$, 其中 $1\le i\le n$, 造如下的圖 $G=(V,E)$:

$$
\begin{aligned}
V &= \{v_1,v_2,\ldots,v_n\},\\
E &= \{v_iv_j:\ i\neq j \text{ 且 } I_i\cap I_j\neq\phi\}。
\end{aligned}
$$

這樣的圖 G 稱爲這 n 條閉區間產生的區間圖, 這些閉區間則稱爲區間圖 G 的區間代表。



圖六: 區間圖及其區間代表

爲驗證完美圖的兩個猜測對區間圖成立, 我們必須證明, 對任一區間圖 G 恆有:

(1) G 爲完美圖;

(2) $\overline{G}$ 爲完美圖;

(3) G 不含 C_{2n+1} 及 $\overline{C}_{2n+1}$, $n\ge 2$。

因爲區間圖的任一誘導子圖也是一區間圖, 所以我們只須證明, 對任一區間圖 G 恆有:

(甲) $\chi(G)=\mu(G)$;

(乙) $\chi(\overline{G})=\mu(\overline{G})$, 亦即 $\theta(G)=\alpha(G)$;

(丙) C_{2n+1}和$\overline{C}_{2n+1}$都不是區間圖,$n\ge 2$。

我們採取下述的「演算證明法」來解釋 (甲)。在這方法裡, 我們找出一種用 k^* 色來塗點, 同時找到至少有 k^* 點的點團集 C^*, 由定義及引理 1

$$k^*\ge\chi(G)\ge\mu(G)\ge|C^*|\ge k^*。$$

所以這些不等式事實上都是等式, 而上述的塗色法是最佳的塗法, C^* 是最大點團集。

在下述的方法裡, 我們用區間代表來代替區間圖 G, 所以點就以區間表式, 塗色就是要將每個區間塗一顏色, 使相交的區間塗不同色, 點團集則相當於兩兩相交的一些區間的集。塗色及找點團的演算法如下:

(1) 將 n 個區間依右端點從小到大排序, 爲方便計假設 $b_1\le b_2\le\ldots\le b_n$;

(2) i 從 n 到 1 逐次執行 (3)

(3) 假設 k 是沒有用來塗某一與 I_i 相交區間的最小正整數, 將 I_i 塗 k;

(4) 若 k^* 是上述用過最大顏色數, 而且 I_{i^*} 被塗 k^*, 令 C^* 爲包含 b_{i^*} 的所有區間所成的點團集。

舉例來說, 圖 6 的區間圖 G 裡,

$$\begin{array}{ccccccccccc} b_1 & < & b_2 & < & b_3 & < & b_4 & < & b_5 & < & b_6 \\ \| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| \\ 3 & & 6 & & 8 & & 9 & & 11 & & 13 \end{array}$$

首先, 將 I_6 塗 1; 其次 I_5 和 I_6 相交, 所以 I_5 塗 2; 再來 I_4 和 I_5 相交, 所以塗 1; 再來 I_3 和 I_4 及 I_5 相交, 所以 1 和 2 不能用, 只能塗3; 接著 I_2 塗 1; 最後 I_1 也塗 1。當所有區間塗完顏色後, $k^* = 3$, 相對應的 $i^* = 3$, $C^* = \{I_3, I_4, I_5\}$。的確, 這是一個正確的著色法, C^* 是一點團集, 而且 $|C|^* = 3$。

對一般的區間圖 G, 當上述演算法完成時, 首先, 因爲步驟 (3) 的著色方法, 相交的區間顯然塗不同色。其次, (4) 中選出來的集 C^* 爲點團集, 因爲 C^* 中每一區間均含 b_{i^*}。最後, 由於 (3) 的方法, 當我們執行 (2) 到 $i = i^*$ 時, 對任一 $m \in \{1, 2, \cdots, k^* - 1\}$ 均能找到某一和 I_{i^*} 相交且 $b_{i_m} \geq b_{i^*}$ 的 I_{i_m} 使得 I_{i_m} 已經塗上 m 這色, 此時 I_{i_m} 必然包含 b_{i^*} 這個實數, 是故, C^* 至少包括含 b_{i^*} 的 k^* 條區間:

$$I_{i^*}, I_{i_1}, I_{i_2}, \ldots, I_{i_{k^*-1}}。$$

亦即 $|C^*| \geq k^*$。因此我們證明了 (甲)。

和上述相仿, 但由 I_1 檢察到 I_n, 亦可證明 (乙)。爲方便起見, 對任一實數 x, 我們用 $C(x)$ 表示這 n 條區間中含 x 的所有區間所成的集合, $C(x)$ 顯然爲一點團集。爲了證明 (乙), 考慮下面的演算法:

(0) $\mathcal{C} \leftarrow \phi$; $\mathcal{S} \leftarrow \phi$;

(1) 將 n 個區間依右端點從小到大排序, 爲方便計假設 $b_1 \leq b_2 \leq \ldots b_n$;

(2) i 從 1 到 n 逐次執行 (3)

(3) 當 I_i 不和 $\mathcal{S}$ 中任一區間相交時, 將 $C(b_i)$ 加入 $\mathcal{C}$ 中, 將 I_i 加入 $\mathcal{S}$ 中。

還是用圖 6 的區間圖來說明。最初, $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{S}$ 均爲空集合; $i = 1$ 時, 將 $C(3) = \{I_1, I_3\}$ 加入 $\mathcal{C}$ 中, I_1 加入 $\mathcal{S}$ 中; $i = 2$ 時, 將 $C(6) = \{I_2, I_3\}$ 加入 $\mathcal{C}$ 中, I_2 加入 $\mathcal{S}$ 中; $i = 3$ 時, 不加東西; $i = 4$ 時, 將 $C(9)$ 加入 $\mathcal{C}$ 中, I_4 加入 $\mathcal{S}$ 中; $i = 5$ 時, 不加東西; $i = 6$ 時, 將 $C(13)$ 加入 $\mathcal{C}$ 中, I_6 加入 $\mathcal{S}$ 中。最後

$$\mathcal{C}^* = \{\{I_1, I_3\}, \{I_2, I_3\}, \{I_4, I_5\}, \{I_6\}\}$$

爲一點團覆蓋,

$$\mathcal{S}^* = \{I_1, I_2, I_4, I_6\}$$

爲一獨立集。

一般而言, 假設上述演算法結束時

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^* &= \{C(b_{i_1}), C(b_{i_2}), \ldots, C(b_{i_m})\} \\ \mathcal{S}^* &= \{I_{i_1}, I_{i_2}, \ldots, I_{i_m}\} \end{aligned}$$

由 (3) 的選法, $\mathcal{S}^*$ 顯然爲一獨立集。而 $\mathcal{C}^*$ 中的每一點團集 $C(b_{i_j})$ 均含 I_{i_j}, 同一點團集不能含 $\mathcal{S}^*$ 中兩個不同點, 所以

$$|\mathcal{C}^*| = m = |\mathcal{S}^*|$$

成立。最後我們要說明 $\mathcal{C}^*$ 是一點團覆蓋, 也就是任一區間 I_i 均在最少某一 $C(b_{i_j})$ 中。當演算法執行 (3) 時有兩種可能; 一種是 I_i 不和 $\mathcal{S}$ 中任一區間相交, 此時 $C(b_i)$ 被放入 $\mathcal{C}$ 中, 所以得證; 另一可能是 I_i 和 $\mathcal{S}$ 中某一區間 I_{i_j} 相交, 因爲 $b_i \geq b_{i_j}$, 所以 I_i 包含 b_{i_j}, 也就是 I_i 在 $C(b_{i_j})$ 中, 但 $C(b_{i_j})$ 顯然在 $\mathcal{C}$ 內, 故得證。因此我們證明了 (乙)。

最後來證明 (丙)。我們其實可以證明更一般的結果:

(丙1) C_n 不是區間圖, $n \geq 4$。

(丙2) $\overline{C}_n$ 不是區間圖, $n \geq 5$。

假設 C_n 是 $x_1x_2\ldots x_nx_1$, 其中 x_i 和 x_{i+1} 相鄰 (x_{n+1} 視爲 x_1), 其他不相鄰。假若 C_n ($n \geq 4$) 是區間區, x_i 所對應的區間 $I_i = [a_i, b_i]$, $1 \leq i \leq n$。爲方便計, 假設 $b_2 \leq$ 其他任何 b_i, 因爲 I_1 和 I_3 均與 I_2 相交, 且 $b_2 \leq b_1$, $b_2 \leq b_3$, I_1 和 I_3 均含 b_2, 也就是 x_2 和 x_3 相鄰, 和假設矛盾。假設 $\overline{C}_n$ ($n \geq 5$) 是區間圖, x_i 所對應的區間 $I_i = [a_i, b_i]$, $1 \leq i \leq n$, 也假設 $b_2 \leq$ 其他任何 b_i, 因爲 I_4 和 I_5 均和 I_2 相交, 因此都含 b_2, 所以 x_4 和 x_5 相鄰, 矛盾。(丙) 證明完證。

上述的證明方法其實與原始證明很不同, 卻是對偶理論的極佳例子。

事實上, 由於對 (丙1) 及 (丙2) 等相關的研究, 弦圖(chordal graph 或 triangulated graph) 及比較圖(comparability graph) 等也逐漸爲人研究, 參見 [3]。到目前爲止, 爲人熟知的完美圖已有許多種類。

5. 本題

現在回歸到本文開始所說的四頁證明, 也就是要證明完美圖弱猜測: G 爲完美圖若且唯若 $\overline{G}$ 爲完美圖。假設用 $|G|$ 表示 G 的頂點個數, Lovász 其實證明下述定理, 從而完美圖弱猜測立即得證。

定理3: G 爲完美圖若且唯若對 G 的任一誘導子圖 G' 恆有 $\mu(G')\mu(\overline{G}') \geq |G'|$。

證: ($\Longrightarrow$) 假設 G 是完美圖, 對任一誘導子圖 G', $\chi(G') = \mu(G')$, 所以可以將 G' 的頂點分割成 $\mu(G')$ 個獨立集, 每個獨立集最多只含 $\mu(\overline{G}')$ 點, 所以不等式 $\mu(G')\mu(\overline{G}') \geq |G'|$ 成立。

($\Longleftarrow$) 反之, 我們將用數學歸納法證明 G 爲完美圖, 因此我們可以假設比 G 小的 G 的誘導子圖及其補圖均爲完美圖。

將一頂點 x 複製 h 遍 ($h \geq 0$) 的意思是將 x 換成 h 個獨立頂點, 他們都和原來 x 相鄰的點相鄰。這個概念和 D.R. Fulkerson 所提出來的「多完美」概念類似。首先我們證明

($*$) 如果 G_0 是由 G 複製一些頂點所成, 則

$$\mu(G_0)\mu(\overline{G}_0) \geq |G_0|。$$

假設 ($*$) 不成立, 而 G_0 是最小的反例, 則 G 有一頂點 y 被複製 $h \geq 2$ 次; 假如 $y_1, y_2, \ldots, y_h$ 是 G_0 中對應的點, 則

$$\mu(G_0 - y_1)\mu(\overline{G}_0 - y_1) \geq |G_0| - 1,$$

由於 G_0 的選法,

$$\mu(G_0)\mu(\overline{G}_0) \leq |G_0| - 1,$$

因此

$$\begin{aligned}\mu(G_0) &= \mu(G_0-y)=p,\\ \mu(\overline{G}_0) &= \mu(\overline{G}_0-y)=r,\\ |G_0| &= pr+1。\end{aligned}$$

令 $G_1 = G_0 - \{y_1,\ldots,y_h\}$, 則 G_1 是由 $G-y$ 複製一些頂點所成, 由 [1] 的定理 1, $\overline{G}_1$ 爲完美圖, 所以 $\overline{G}_1$ 能被 $\mu(\overline{G}_1) \le \mu(\overline{G}_0) = r$ 個不相交的點團集 $C_1, C_2, \ldots, C_r$ 覆蓋, 設 $|C_1| \ge |C_2| \ge \ldots \ge |C_r|$。

顯然 $h \le r$。由於 $|G_1| = |G_0| - h = pr - 1 - h$, 所以

$$|C_1| = \ldots = |C_{r-h+1}| = p。$$

令 G_2 是用 $C_1 \cup \ldots \cup C_{r-h+1} \cup \{y_1\}$ 所誘導出來 G_0 的子圖, 則

$$|G_2| = (r-h+1)p+1 < |G_0|;$$

所以, 由 G_0 的選法,

$$\mu(G_2)\mu(\overline{G}_2) \ge |G_2|。$$

又因爲 $\mu(G_2) \le \mu(G_0) = p$, 所以

$$\mu(\overline{G}_2) \ge r-h+2。$$

令 F 是 G_2 中含 $r-h+2$ 點的獨立集, 則 $|F \cap C_i| \le 1$ $(1 \le i \le r-h+1)$, 所以 $y_1 \in F$。因此可以知道 $F \cup \{y_2,\ldots,y_h\}$ 是 G_0 中的獨立集。但另一方面

$$|F \cup \{y_2,\ldots,y_h\}| = r+1 > \mu(\overline{G}_0)$$

是一矛盾。所以 $(*)$ 得證。

接下來我們要證明 $\chi(G) = \mu(G)$。爲證此, 我們事實上只須找到一獨立集 F 使得 $\mu(G-F) < \mu(G)$ 成立就可以; 這個道理是因爲由歸納法假設, $G-F$ 可以用 $\mu(G)-1$ 色塗完, 加上 F, G 可以用 $\mu(G)$ 色塗完。

假設對 G 的任一獨立集 F, $G-F$ 恆包含一大小爲 $\mu(G)$ 的點團集 C_F, 對任何 $x \in G$, 用 $h(x)$ 表示含 x 的 C_F 的個數, G_0 是將 G 的每個點 x 複製 $h(x)$ 次所得到的圖, 由 $(*)$ 可知

$$\mu(G_0)\mu(\overline{G}_0) \ge |G_0|$$

另一方面, 顯然

$$|G_0| = \sum_x h(x) = \sum_F |C_F| = pf,$$

其中 f 表示 G_0 所有獨立集的個數。再者

$$\mu(G_0) \le \mu(G) = p,$$

$$\begin{aligned}\mu(\overline{G}_0) &= \max_F \sum_{x\in F} h(x)\\ &= \max_F \sum_{F'} |F \cap C_{F'}|\\ &\le \max_F \sum_{F' \ne F} 1 = f-1。\end{aligned}$$

得到矛盾。 證畢。

6. 參考資料

1. C. Berge, Farbung von Graphen, deren sämtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind, *Wiss. Z. Martin-Lurther-Univ., Halle-Wittenberg Math.-Natur, Reihe* (1961), 114-115.
2. D. R. Fulkerson, Blocking and antiblocking pair of polyhedra, *Math. Programming* 1 (1971), 168-194.

3. M. C. Golumbic,*Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, 1980.

4. L. Lovász. Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, *Discrete Math.* 2 (1972), 253-267.

—本文作者任教於交通大學應數系—