

談談 Gilbert-Pollak 猜想的證明

堵丁柱

開場白

Steiner 比率猜測是在 1968 年由貝爾研究所的 Gilbert 和 Pollak 兩人提出。由於 Pollak 曾任美國數學學會會長，經常在外訪問和演講（他是美國數學界 1978 年第一個訪問大陸代表團之一員），所以此猜測引起不少數學家的注意。現任的美國數學學會（與數學學會是兩個團體）會長 Graham 就對這個問題有不少貢獻，並出了美金五百元的賞格。這猜測歷年來獲得不少進展，一方面是證明了此猜測對任意三點、四點、五點、六點都成立，但證明所需的計算似乎是點數的一個冪數函數。另一方面是比率可證的下限在逐漸提高，但最好的一個下限（金芙蓉和 Graham 的結果）已經要動用 Macsyma 計算機的幫助，非人的大腦能核對正誤了。因此做這問題的人都有點氣餒，雖然感到可以七點、八點的證下去，但幾百頁的證明有人願意寫，還沒人願意看呢。而且即使證出了二十點、一百點，又怎樣呢！

丁柱和我在 1990 年宣佈了 Steiner 比率猜測的一般證明，最令人吃驚的是此證明中沒有計算，純粹是理論，因此引起了較多的注意。紐約時報科學版首先報導，美國其它

報紙也相繼轉載和報導。報導科學新聞的刊物如 SIAM NEWS, SCIENCE NEWS, NEN SCIENTISTS, SCIENCE, RESEARCH NEWS, SÜDDT. ZEIT(德國) 等都有專文介紹，大英百科全書 1991 年「科學與未來」年鑑在數學欄有五項專題報導，把這猜測的證明列為首項。我們並且收到 BBC 的越洋電話訪問，說要翻成 33 種語言向全球廣播。大陸的新聞媒體也做了相應報導，一直到今年猶餘波未平。今年一月由國家科委、人民日報、光明日報、科技日報、中央電視台、中央人民廣播電台聯合主辦的全國十大科技成就評選，此猜測的證明列為選出項目之一。八月堵丁柱獲頒中國科學院一等研究獎。

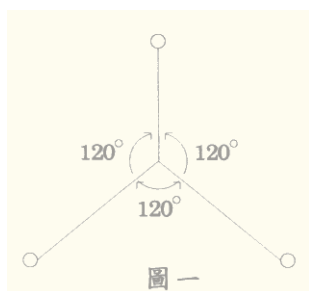
今年在台灣訪問任教的李信明教授以為這一猜測的證明也可以在台灣多報導一點，乃向正擬為數播編一期離散數學特刊的黃大原教授建議邀請我們寫一篇中文的介紹。雖然舊題重寫不如做新的研究有勁，但我們想到數播的讀者未必會看到在美國學術雜誌的原文，而且中國人寫的文章給中國人閱讀，為什麼要經過英文這一道轉折呢？因此丁柱毅然湊出一段時間，摒擋下其它的研究項目，為數播寫出了這一篇文章。雖然因為讀者背景

的關係，他沒有寫出所有細節，但證明的主要思想是表達出來了。對數播的很多讀者，也許如何應付聯考的數學才是切身關係的事。但如果沒有更有趣、更巧妙的數學提供作者前瞻的遠景，則通過了聯考，又置我們於何地呢？

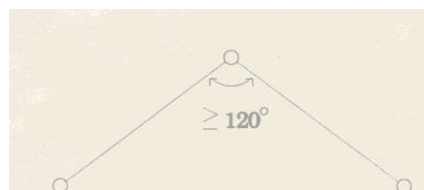
—黃光明 於美國貝爾實驗室

一. 引言

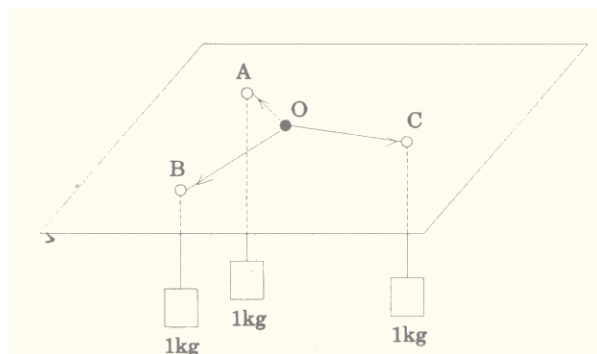
最短網路是個歷史悠久的數學課題。它的先驅研究者可以追溯到費爾馬和托里拆略。1640年，費爾馬提出了求連接三點的最短網路問題。托里拆略給出如下的解：當三點組成之三角形的內角均小於 120° 時，最短網路是由三角形內一點與給出的三點連接而形成；在那個形內點處，三個角均等於 120° （見圖一）。當給出的三點形成的三角形的三內角有不小於 120° 時，該角的兩邊組成所求的最短網路（見圖二）。托里拆略的解如今已有多種證明，其中也有利用物理原理的。下面是利用力學原理設計的一種證明。



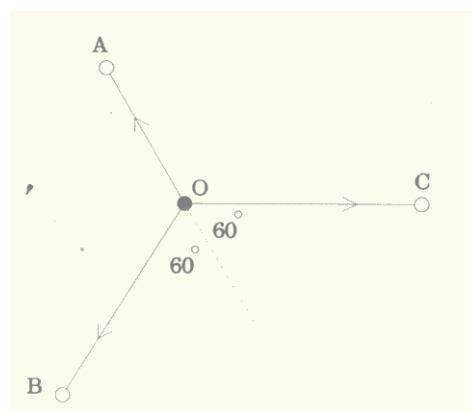
圖一



圖二



圖三



圖四

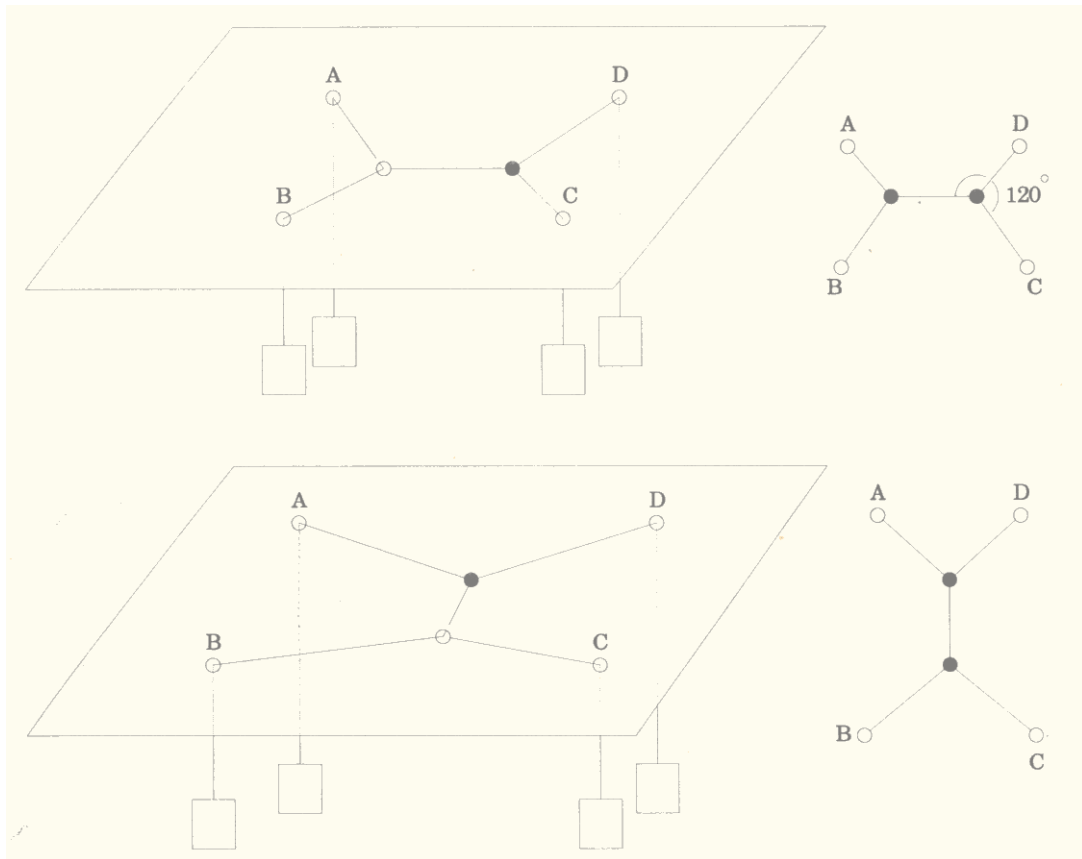
如圖三，在平面上 A, B, C 三點處各打一個洞。取三條線繩繫結於一點 O ，然後穿過洞各掛一公斤的重物。這力學系統平衡時，三重物的勢能和應達到最小，亦即在洞下面部分的繩線總長達最大。由於線繩總長是定值，故 OA, OB, OC 的長度和應達最小。現在

我們考察一下 O 處於什麼位置時，系統才能夠平衡。先設 O 與 A, B, C 均不重合。如圖四，作用於 O 點有三個力，分別沿 $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ 方向，均為一公斤，故表示這三力的矢量的長度應相等。當三力平衡時，三矢量經平行移動後應可圍成正三角形，且方向在三角形邊界上是一致的。由於正三角形的內角均為 60° ，故可知 $\angle AOB = \angle COA = 120^\circ$ 。如果 O 與 A 重合，那麼只有沿 \vec{OB} 和 \vec{OC} 方向的二力之合不大於一公斤才行。由此易導出 $\angle BAC \geq 120^\circ$ 。

由於最短網路在運輸、通訊和計算機等現代經濟與科技領域中的重要應用，近些年來，它的理論研究進展越來越快。問題的對象

早已從三點迅速擴展到任意有限點集。而且對於連結給出點集的最短網也有了專用名字，稱為最小 Steiner 樹。如同三點的情況一樣，我們也可以用力學模擬的方法來尋找一般點集的最

小 Steiner 樹。不過，對四個點，需要設計兩個力學系統（如圖五），把兩個力學系統模擬找到的樹加以比較，較短者為最小 Steiner 樹。當點數多時，需要的力學系統會越來越多，其數目是點數之指數函數。事實上，Garey, Johnson 與 Graham 於 1977 年已證明最小 Steiner 樹的計算至少有 NP 完全問題那麼難，亦即幾乎沒希望有快速的精確算法。

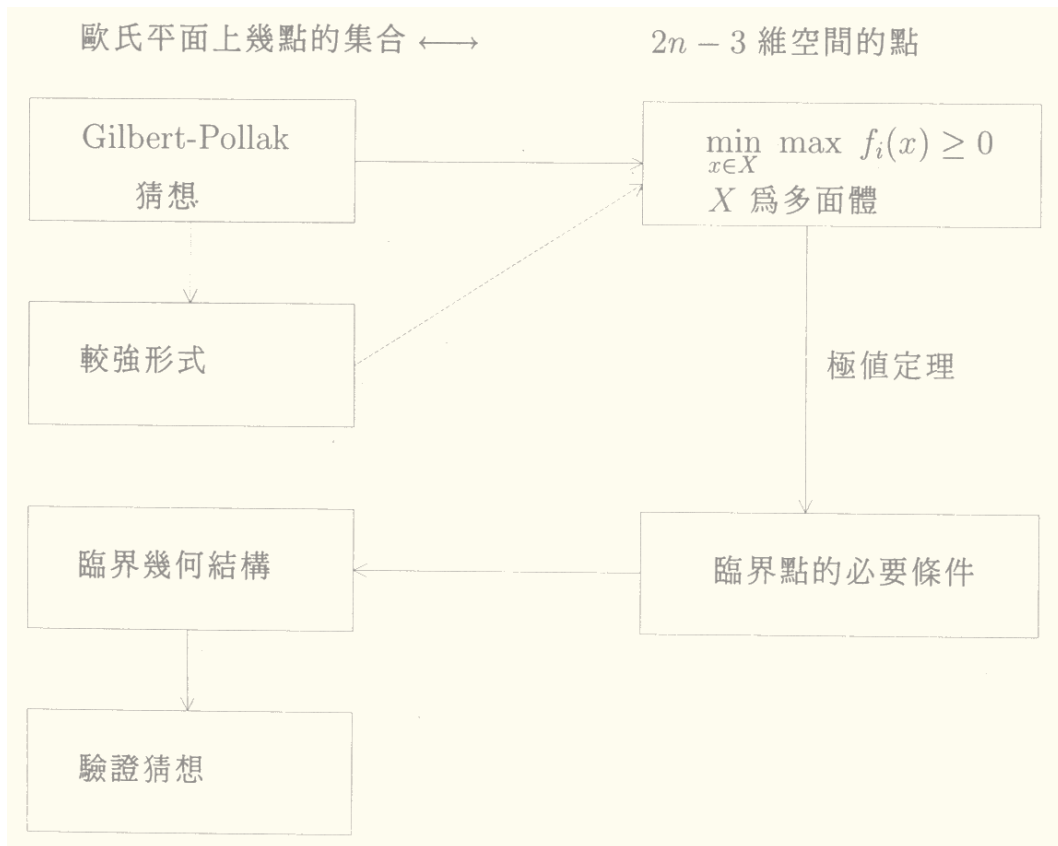


圖五

最小 Steiner 樹上不屬於給出點的頂點稱為 Steiner 點。最小 Steiner 樹的難度是由 Steiner 點引進的。如果不允許存在 Steiner 點，亦即每條邊必須在兩個給出點之間，那麼這樣的最短網路稱為最小生成樹 (minimal spanning tree)。最小生成樹可在極快的時間內算出。1968年，Gilbert 與 Pollak 提出了如下猜想：同一個點集上的最小 Steiner 樹長與最小生成樹長之比不小於 $\sqrt{3}/2$ 。對於這一猜想的有趣背景，文 [2] 有較生動的介紹，這裡不再贅述了。

Gilbert-Pollak 猜想在1990年獲得了證明。這個證明的核心是個極值定理。如圖六

所示，其主要思想是這樣的：首先，在歐氏平面上的 n 個點組成的集合與 $2n - 3$ 維空間的點之間建立一個對應關係，使得 Gilbert-Pollak 猜想可以化為 $2n - 3$ 維空間上函數的極值問題。然後，利用極值定理找出可以達到極值的臨界點應滿足的必要條件。之後，將此條件轉化為臨界點所對應的平面點集的幾何性質，並且利用這幾何性質確定出特殊的幾何結構 (圖七)。最後，對這種特殊的點集，驗證該猜想。一個重要的註釋是，為得到較易驗證的幾何結構，該猜想先被轉化為一個較強的形式，然後如上法泡製。



圖六



圖七

下面，我們對該證明做些通俗與具體的說明。

二. 極值定理

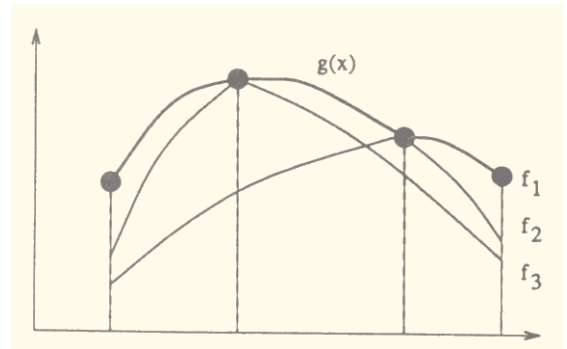
既然極值定理是證明之核心，我們就由此起談。考慮如下極值問題：

$$\min_{x \in \Omega} \max_{i \in I(x)} f_i(x)$$

其中 Ω 是 n 維空間中一凸多面體 X 的緊子集；對任何 $x \in \Omega$, $I(x)$ 是 $\{1, 2, \dots, m\}$ 的子集，且對每個 i , $f_i(x)$ 是 X 上連續的凹函數。

為明白起見，我們從簡單的特殊情形討論起。首先，我們假設 $\Omega = X$ 且 $\forall x$, $I(x) = \{1, 2, \dots, m\}$ 。假如 $m = 1$, 那麼問題化為求一個凹數在凸多面體上的最小值。此時，最小值可在多面體的頂點處達到。這是眾所周知的事實。假如 $m > 1$ 但是 $n = 1$, 如圖八所示，函數 $g(x) = \max_{i \in I(x)} f_i(x)$ 是分段凹的。因此，它的最小值可以在小線段的

邊界點處達到。直觀上看，在一般情況下， X 也可以被劃分成小區域，在每一區域中， $g(x)$ 是凹的。但是，這些區域並不一定是多面體，因此，不能簡單地斷言， $g(x)$ 的最小值可以在這些區域的頂點處達到。何況對這樣的小區域來說，“頂點”的概念尚不明確，這就使人不能做點新的探索。



圖八

首先，我們引入臨界點的概念。一個 Ω 的點 x 稱為臨界點，如果指標集 $M(x) = \{i \in I(x) | g(x) = f_i(x)\}$ 是極大的，也就是說，不存在 $y \in \Omega$ 使得 $M(x)$ 是 $M(y)$ 的真子集。注意，這裡臨界點的定義與 [1] 中不同，[1] 中邊界上臨界點的定義稍複雜，但後面不會用到。

臨界點的直觀背景就是上面提到的小區域的頂點。下面的定理指出了 $g(x)$ 的最小值可在臨界處達到的條件。

定理1. 設對任何 $x \in \Omega$ 存在 x 的鄰域使得對領域中任意點 y 有 $M(y) \subseteq M(x)$ 。如果 $g(x)$ 的最小值在 Ω 的內點處達到，那麼這一最小值一定可以在臨界點處達到。此外，

如果 x 是 $g(x)$ 在 Ω 上的最小內點且對 Ω 中某點 y 有 $M(x) \subseteq M(y)$, 那麼 y 也是 $g(x)$ 的最小點。

證: 設 x^* 是 $g(x)$ 在 Ω 中最小點且為內點。如果 $M(x^*)$ 不是極大的, 那麼 Ω 中必存在臨界點點 y 滿足 $M(x^*) \subset M(y)$ 且 $M(y)$ 是極大的。由定理的條件知, 存在 x^* 的一個鄰域 V (圖九), 使得對任何 $x \in V$, $M(x) \subseteq M(x^*)$ 。選一足夠小的正數 λ 使 $x(\lambda) = x^* + \lambda(x^* - y) \in V$ 。再選一個指標 $i \in M(x(\lambda))$ 。由 x^* 是最小點, 故

$$f_i(x^*) \leq f_i(x(\lambda)), \quad f_i(x^*) \leq f_i(y)。$$

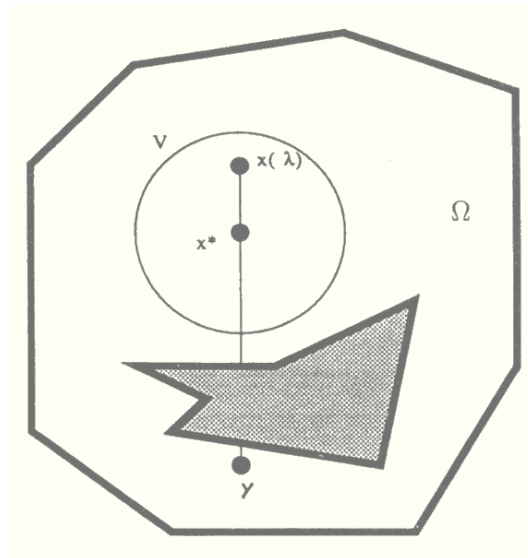
這裡注意 $i \in M(x^*)$ 和 $i \in M(y)$ 。若 y 不是最小點, 則 $f_i(x^*) < f_i(y)$ 。注意

$$x^* = \frac{\lambda}{1+\lambda}y + \frac{1}{1+\lambda}x(\lambda)$$

且 $f_i(x)$ 是凹函數。於是有

$$\begin{aligned} f_i(x^*) &\geq \frac{\lambda}{1+\lambda}f_i(y) + \frac{1}{1+\lambda}f_i(x(\lambda)) \\ &> f_i(x^*), \end{aligned}$$

這引出矛盾。因此, y 是最小點。(證畢)



圖九

有了極值定理, 下面的首要任務是要把 Gilbert-Pollak 猜想化為一個如上處理的極值問題, 亦即弄清 $x, f_i(x), I(x)$ 的相應含義。

在歐氏平面上的最小 Steiner 樹具有如下的基本性質:

- (S1) 樹葉均為所給點。
- (S2) 每個頂點處的兩邊夾角不小於 120° 。
- (S3) 每個 Steiner 點處的兩邊夾角恰為 120° 。

雖然滿足這三個性質的樹不一定是最小 Steiner 樹。在一個 Steiner 樹中, 如果全部所給點均是樹葉, 換言之, 所有不是樹者的頂點都是 Steiner 點, 那麼該 Steiner 樹稱為滿的。滿 Steiner 樹的好性質在於它的所有角度均是 120° 。因此, 只要各邊長和樹的連接方式——拓樸——確定, 樹也就確定了, 隨之, 樹葉, 亦即所給點, 之間的相互位置也就確定了。當一滿 Steiner 樹的拓樸為 t , 樹的邊長

分別為 $x_1, x_2, \dots, x_{2n-3}$ 時, 我們記該滿樹為 $t(x)$ 其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n-3})$, 並且記該樹的 n 個樹葉組成的點集為 $P(t; x)$ 。一個早已為人熟知事實是, Gilbert—Pollak 猜想等價於如下不等式: 對任何滿樹 $t(x)$,

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2n-3} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} L_M(P(t; x)) \quad (1)$$

其中 $L_M(P(t; x))$ 是點集 $P(t; x)$ 上最小生成樹的長度。

實際上, 這個事實的證明並不難。考慮一個點集 P 和連接 P 的最小 Steiner 樹 T 。如果 P 中有點不是樹葉, 那麼 T 可以在此點處被分解成二個或三個較小的樹。利用這種方法, T 可以被分解成若干小樹 T_1, T_2, \dots, T_k , 其中每個小樹 T_i 均是它的

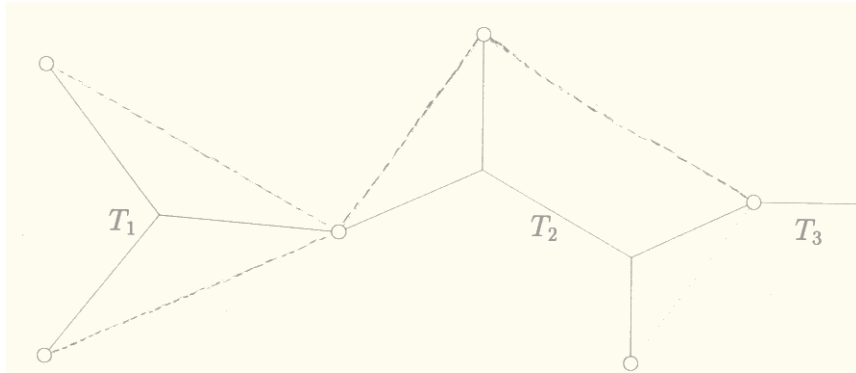
樹葉集 P_i 上的滿 Steiner 樹。(圖十) 依據 (1) 式, 我們知道

$$\ell(T_i) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} L_M(P_i),$$

其中 $\ell(T_i)$ 是樹 T_i 之長。注意, 把 P_1, P_2, \dots, P_k 上最小生成樹並到一起可以得到 P 上的一個生成樹, 於是有

$$\begin{aligned} \ell(T) &= \ell(T_1) + \dots + \ell(T_k) \\ &\geq \frac{\sqrt{3}}{2} (L_M(P_1) + \dots + L_M(P_k)) \\ &\geq \frac{\sqrt{3}}{2} L_M(P). \end{aligned}$$

這說明, 如果不等式 (1) 真, 那麼 Gilbert-Pollak 猜想真。反之, 如果 Gilbert-Pollak 猜想真, 那麼不等式 (1) 顯然真。



圖十

如果兩個滿 Steiner 樹 $t(x)$ 和 $t(y)$ 是相似的, 那麼不等式 (1) 若對其中之一成立, 則必對另一也成立。這意味著, 在相似的滿樹中, 我們只需要選出其中之一來證不等式 (1)。也就是說, 不等式 (1) 可以進一步

簡化為: 對任何長為 1 的滿 Steiner 樹 $t(x)$,

$$1 \geq \frac{\sqrt{3}}{2} L_M(P(t; x)). \quad (2)$$

現在, 我們將 $L_M(P(t; x))$ 按定義重寫為

$$L_M(P(t; x)) = \min_{S \in I} \ell(S(t; x)) \quad (3)$$

其中 $S(t; x)$ 是點集 $P(t; x)$ 上拓撲為 S 的生成樹，而 I 是 $P(t; x)$ 上所有生成樹的拓撲集。於是，(2) 等價於：對任何長為 1 的滿 Steiner 樹 $t(x)$,

$$\max_{S \in I} (1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \ell(S(t; x))) \geq 0. \quad (4)$$

記 $X = \{(x_1, \dots, x_{2n-3}) | x_1 + \dots + x_{2n-3} = 1, x_1 \geq 0, \dots, x_{2n-3} \geq 0\}$ 。則 (4) 可化為：對任何滿 Steiner 樹拓撲 t ,

$$\min_{x \in X} \max_{S \in I} (1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \ell(S(t; x))) \geq 0. \quad (5)$$

由此式知，定義

$$f_{t,s}(x) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \ell(S(t; x))$$

是相當自然的。

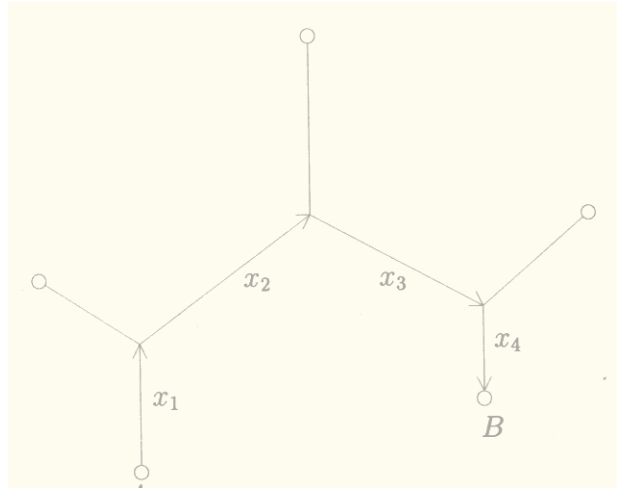
引理 1: $f_{t,s}(x)$ 是關於 x 的凹函數。

證: 我們只須證明 $\ell(S(t; x))$ 是關於 x 的凸函數。設 A 和 B 是 $P(t; x)$ 中兩點。我們先證 A 和 B 間距離 $d(A, B)$ 是 x 的凸函數。為此，在 $t(x)$ 中找出從 A 到 B 的一條路。設這條路有 k 條邊，各邊的長度分別為 x_1, x_2, \dots, x_k ，各邊的方向分別為 e_1, e_2, \dots, e_k ，其中 e_1, e_2, \dots, e_k 均為單位向量 (圖十一)。於是，

$$d(A, B) = \|x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_k e_k\|$$

其中 $\|\cdot\|$ 是歐氏範數。注意，範數是凸的，而範數內的部分是關於 x 線性的。因此，

$d(A, B)$ 是關於 x 的凸函數。由於 $\ell(s(t; x))$ 是若干個形如 $d(A, B)$ 的函數之和，因此它也是凸函數。(證畢)



圖十一

最後，需注意的是，當 x 的有些分量為零時， $t(x)$ 已不是滿樹。此時，把 $t(x)$ 看做滿樹的一種極限狀態，亦即，取一點列 $\{y_k\}$ 趨於 x 使 $t(y_k)$ 均為滿樹，而將 $t(x)$ 看做 $t(y_k)$ 的極限。這時， $P(t; x)$ 也是 $P(t; y_k)$ 的極限。這樣 $P(t; x)$ 不總是樹葉組成之集。為方便，我們稱 $P(t; x)$ 中點為正則點。

三. 四個點

儘管三個點最小 Steiner 樹在三百年前已確定得清清楚楚，可是四個點的最小 Steiner 樹如今還有些面目模糊。事實上，三個點的最小 Steiner 樹的可能拓撲只有四個：一個滿的和三個退化的。要確定到底是哪一個，只要看看三點形成的三角形內角有無不小於 120° 的，是哪個小於 120° 。但是，對

四點來說，這樣判斷最小 Steiner 樹拓撲的幾何條件到現在還沒有完備。

對 Gilbert-Pollak 猜想來說，四點情形的證明已有了好多。這裡敘述其中之一。它是用前面提到的方法設計的。它並不是簡單的，但是具有一般意義。

為證四點情形。首先來看三點情形。如上節所證，Gilbert-Pollak 猜想與 (5) 式是等價的。假如這猜想對三點不成立，那麼 (5) 式必不成立，亦即

$$\min_{x \in X} \max_{S \in I} f_{t,s}(x) < 0 \quad (6)$$

其中 $f_{t,s}(x) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\ell(S(t;x))$ 。記

$$g_t(x) = \max_{S \in I} f_{t,s}(x)$$

並設 x^* 是 $g_t(x)$ 在 X 中最小點。我們說， x^* 必為 X 的內點。事實上，若 x^* 是 X 的邊界點，則 x^* 必有分量為零。這意味著 $t(x^*)$ 將退化為一個生成樹。設此生成樹的拓撲為 s ，則 $f_{t,s}(x^*) \geq 0$ 。於是 $g_t(x^*) \geq 0$ ，與 $g_t(x^*) < 0$ 矛盾。 x^* 為內點說明 $g_t(x)$ 的最小值可以在 X 的內點處達到。此外，當 $I(x) = I$ 不隨 x 變化時， $f_{t,s}(x)$ 的連續性可導出，對任何 $x \in X$ ，存在 x 的鄰域，使對鄰域中任何點 y 有 $M(y) \subseteq M(x)$ ，其中 $M(x) = \{s \in I \mid f_{t,s}(x) = g_t(x)\}$ ，亦即 $P(t;x)$ 上的最小生成樹的拓撲集。依據極值定理， $g_t(x)$ 的最小點中有臨界點。當 \bar{x} 的各分量均等於 $\frac{1}{3}$ ，亦即 $P(t;\bar{x})$ 為正三角形時， $M(\bar{x}) = I$ ，亦即所有的生成樹都是最小的。依極值定理後半部，這點一定是最小點。但是，易驗證，在這點處， $g_t(\bar{x}) = 0$ ，又與 $g_t(\bar{x}) < 0$ 矛盾。這就證明三點情形。

對四點，我們也採用反證法。假設 Gilbert-Pollak 猜對四點不成立，於是 (6) 式。設 x^* 是 X 中最小點。首先證， x^* 為 X 的內點。假若 x^* 為 X 的邊界點，那麼 x^* 必有零分量。如果 x^* 的零分量相應的邊與正則點相連，那麼 $t(x^*)$ 可以在此正則點處分解。分解所得各小樹連接的正則點數均小於 4。故對這些小樹，(1) 式成立。將所有這些不等式加起來，可知對 $t(x^*)$ ，(1) 式也成立，亦即 $g_t(x^*) \geq 0$ ，產生矛盾。如果 x^* 的分量相應的邊只與 Steiner 點相連，那麼 $t(x^*)$ 的兩個 Steiner 點重合。在此重合點處有四條邊，因此 $t(x^*)$ 不是 $P(t,x^*)$ 的最小 Steiner 樹。設 T 是 $P(t,x^*)$ 的最小 Steiner 樹。由於

$$\ell(T) < \ell(t(x^*)) = 1 < \frac{\sqrt{3}}{2}L_M(P(t;x^*)), \quad (7)$$

T 一定是滿的。(否則 T 可分解，依上面方法可證 (7) 不成立。) 取 $x' \in X$ ，使 $t(x')$ 與 T 兩樹相似。則有

$$\begin{aligned} g_t(x') &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}L_M(P(t;x')) \\ &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}L_M(P(t;x^*))/\ell(T) \\ &< 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}L_M(P(t;x^*)) = g_t(x^*), \end{aligned}$$

與 x^* 為最小點矛盾。

依極值定理， $g_t(x)$ 的最小點必有為臨界點者。設 x^* 的最小點並且是臨界點。依前所證， x^* 一定是兩點，亦即 $t(x^*)$ 是滿 Steiner 樹。按臨界點的定義， $M(x^*)$ 在 X 中是極大的。何時 $M(x^*)$ 可以達到極大呢？

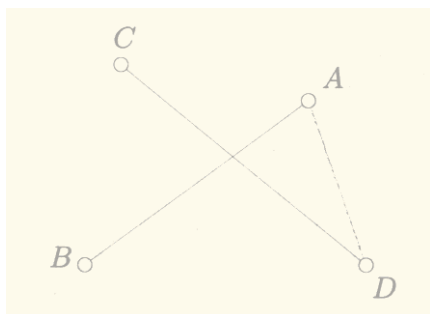
為解決這問題，我們來研究最小生成樹的並集。

引理2: 兩個最小生成樹的邊是不是會交叉的。

證: 設 AB 和 CD 分別是最小生成樹 T 與 T' 的邊。假設 AB 和 CD 相交叉, E 是它們的交點。如圖十二, 不妨設 EA 是 E 處四邊中最短的。在 T' 中去掉 CD 之後會餘下兩個子樹。不妨設 A 與 C 同一子樹。連接 AD 。由於

$$d(A, D) < d(A, E) + d(E, D) \leq d(C, D)$$

這樣會得到比 T' 短的生成樹, 與 T' 的最小性矛盾。(證畢)



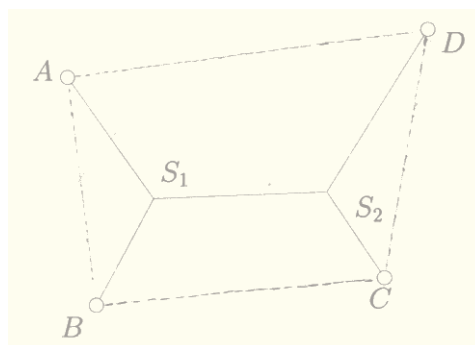
圖十二

記 $\Gamma(t, x)$ 為 $P(t; x)$ 的最小生成樹的並集。由引理2知, $\Gamma(t; x)$ 是平面圖。

引理3: $\Gamma(t; x)$ 的任何圈上至少有兩條等長的最長邊。

證: 假設 $\Gamma(t; x)$ 有一圈 Q 有唯一最長邊 e 。設 T 為含 e 的最小生成樹。對 Q 的任何一條不在 T 的邊 e' , T 中一定有一條路

$p_{e'}$ 連接 e' 的兩個端點。若 $p_{e'}$ 含有邊 e , 則於 T 中去掉 e 而加入 e' 可使樹變短, 與 T 的最小性矛盾。因此, $p_{e'}$ 不含 e 。於是, 所有 $p_{e'}$ 與 $T \cap (Q \setminus e)$ 的邊一起構成了連接 e 的端點且不含 e 的路。這意味著 T 含有圈, 與 T 為樹矛盾。(證畢)



圖十三

如圖十三, 設 $t(x^*)$ 的四個正則點為 A, B, C 與 D , 兩個 Steiner 點為 S_1 與 S_2 。可知 $\angle BAS_1 < 60^\circ$, $\angle S_1AD < 120^\circ$ 。故 $\angle A = \angle BAS_1 + \angle S_1AD < 180^\circ$ 。同理, $\angle B < 180^\circ$, $\angle C < 180^\circ$, $\angle D < 180^\circ$ 。這意味著四邊形 $ABCD$ 是凸的。記這個凸四邊形圍成的區域為 $C(t; c^*)$ 。

引理4: $\Gamma(t; x^*)$ 將 $C(t; x^*)$ 分割成兩個正三角形。

證: 首先將 $\Gamma(t; x^*)$ 嵌入 $C(t; x^*)$ 的一個三角剖分。如果引理不真, 那麼至少有下列兩種情況之一發生:

- (a) 三角剖分的邊不全在 $\Gamma(t; x^*)$ 中。
- (b) 剖分得到的不是正三角形。

首先設 (a) 發生。以 ℓ_0 記三角剖分中不屬於 $\Gamma(t; x^*)$ 的最長邊長。保持其它的邊長不變，將這些最長邊逐漸縮短，直至 $\Gamma(t; x^*)$ 增加新邊，亦即 $M(x^*)$ 增加新拓樸為止。在這個變化過程中，我們總以 ℓ 記變化的最長邊長，以 $P(\ell)$ 記該最大邊長變到 ℓ 時的正則點集。 ℓ 的最後值記為 ℓ_1 。考慮集合

$$L = \{\ell \in [\ell_0, \ell_1] | P(t; y) = P(\ell) \text{ 且 } y \text{ 是 } g_t(x) \text{ 在 } X \text{ 中最小點}\}.$$

由於 $g_t(x)$ 在 X 中最小點集合是個緊集，因此 L 是緊集。它有最小元素。如果這最小元素是 ℓ_1 ，那麼與 x^* 為臨界點矛盾（因為 $M(x^*) \subsetneq M(y)$ ）。於是，這最小元素 $\ell' < \ell_1$ 。設 $P(\ell') = P(t; x')$ 且 x' 是 $g_t(x)$ 在 X 中最小點。依前面所證， x' 必為 X 的內點。因此，在 $\varepsilon > 0$ 充分小時，存在 X 中 y ，使 $P(\ell' - \varepsilon) = P(t; hy)$ 其中 h 是一正常數。由於 $M(x') \subseteq M(hy) = M(y)$ ，依極值定理， y 也是 $g_t(x)$ 在 X 中小點，故有

$$\begin{aligned} g_t(x') &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} L_M(P(\ell')) \\ &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} L_M(P(\ell' - \varepsilon)) \\ &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} L_M(P(t; hy)) \\ &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} L_M(P(t; y)) \cdot h \\ &= 1 - h + hg_t(y) \\ &= 1 - h + hg_t(x') \end{aligned}$$

於是 $h = 1$ 。這說明 $\ell' - \varepsilon \in L$ ，與 ℓ' 為 L 的最小元素矛盾。

現在設 (a) 不發生但是 (b) 發生。以 $r(x)$ 記 $\Gamma(t; x^*)$ 的最短邊與最長邊的比值。考慮集合

$$R = \{r(y) | M(x^*) \subseteq M(y) \text{ 且 } y \text{ 是 } g_t(x) \text{ 在 } X \text{ 中最小點}\}$$

由於 $g_t(x)$ 在 X 中最小點的集合是個緊集，因此 R 是緊集。它有最大元素。如果這最大元素是 1，那麼與 x^* 是臨界點矛盾。於是這最大元素 $r' < 1$ 。設 $r' = r(x')$ 且 $M(x^*) \subseteq M(x')$ ， x' 是 $g_t(x)$ 在 X 中最小點。依前面所證， x' 是 X 的內點。這樣，我們可將 $\Gamma(t; x')$ 的最短邊都增加少許並且保持其它邊長不變，使得所得正則點集上仍有拓樸為 t 的滿 Steiner 樹。這意味著存在 X 中點 y 和 $h > 0$ ，使得 $M(x') \subseteq M(hy)$ ， $r(hy) > r(x')$ 。但是 $M(hy) = M(y)$ 且 $r(hy) = r(y)$ 。因此， y 是最小點。於是 $r(y) \in R$ ，與 $r(x')$ 為 R 最大元素矛盾。（證畢）

當 $\Gamma(t; x^*)$ 將 $C(t; x^*)$ 分割為兩個正三角形時，容易算出 $L_M(P(t; x^*)) = \frac{3}{\sqrt{7}} < \frac{2}{\sqrt{3}}$ 。於是， $g_t(x^*) > 0$ ，與假設矛盾。這就完成了對四點情形的證明。

四. 一般情形

一般情形下 Gilbert-Pollak 猜想的證明與上述四點情形類似。只是要較為複雜些。首先，最後得到的臨界幾何結構將由多個正三角形組成，需要點工作在其上驗證 Gilbert-Pollak 猜想。其次，對多於 5 個點的滿 Steiner 樹來說，正則點並不一定都落在

它們的凸包的邊界上，這會給證明造成許多麻煩。為克服這一困難，有必要引入特徵區域和內生成樹的概念，以最小內生成樹代替最小生成樹來加強不等式 (1)。對細節有興趣的讀者可以參閱 [1]。

參考文獻

- [1] D. -Z. Du and F. K. Hwang, The state of art on Steiner ratio prob-

lems, in Computing in Euclidean Geometry, D. -Z. Du and F. K. Hwang (eds.), (World Scientific, Singapore, 1992) pp 163-192.

- [2] 黃光明, 旗落帆升, 數學傳播, 14卷2期 (79年6月), pp 5-7。

—本文作者任教於美國明尼蘇達大學計算機科學系—