八十二學年度大學暨獨立學院入學考試

數學試題

(自然組)

* 本學科共分爲兩部分。第一部分爲單一選擇題, 請將答案劃記在「答案卡」上。第二部分爲非選擇題, 請將答案寫在「非選擇題試卷」上。

第一部分: 單一選擇題(共佔20分)

說明: 本部分共有一、二兩大題, 各分成 5 小題; 答案卡上的題號係指小題題號, 自第1 題至第10題。請將你的答案劃記在「**答案卡**」上。每小題的五個備選答案中, **只有一個是對的。** 答錯了倒扣 1/4 題分; 若不答, 則得零分。

[一] 平面上有一正三角形 ABC, 其內心爲 P, 邊長爲 100公尺。今在 P 點直立一旗桿, 已知由 A 點測得桿頂 T 的仰角爲 $30°$, 則

1. $\overline{AP}$ 爲

(A) $\dfrac{100}{3}$ 公尺　(B) $100\sqrt{3}$ 公尺　(C) $\dfrac{100\sqrt{3}}{3}$ 公尺

(D) $25\sqrt{3}$ 公尺　(E) $\dfrac{50\sqrt{3}}{3}$ 公尺　(2分)

2. 旗桿高爲

(A) $\dfrac{100}{3}$ 公尺　(B) $50\sqrt{3}$ 公尺　(C) $\dfrac{100\sqrt{3}}{3}$ 公尺

(D) $\dfrac{200}{3}$ 公尺　(E) $\dfrac{50\sqrt{3}}{3}$ 公尺　(2分)

3. A 點到桿頂 T 的距離爲

(A) 50 公尺　(B) $\dfrac{200\sqrt{3}}{3}$ 公尺　(C) $100\sqrt{3}$ 公尺

(D) $\dfrac{200}{3}$ 公尺 (E) $\dfrac{100\sqrt{3}}{3}$ 公尺 (2分)

若在 $\overline{AP}$ 上一點 Q, 測得桿頂 T 的仰角爲 $60°$, 則

4. Q 到桿頂 T 的距離爲

(A) $\dfrac{100\sqrt{3}}{9}$ 公尺 (B) $\dfrac{100\sqrt{3}}{3}$ 公尺 (C) $\dfrac{200\sqrt{3}}{3}$ 公尺

(D) $50\sqrt{3}$ 公尺 (E) $\dfrac{200\sqrt{3}}{9}$ 公尺 (2分)

5. $\overline{AQ}:\overline{QP}$ 爲

(A) $2:\sqrt{3}$ (B) 2:1 (C) $\sqrt{3}:1$ (D) 3:2 (E) 1:1 (2分)

[二]設平面 $E: x+y+\sqrt{2}z=1$ 爲 x 軸, y 軸, z 軸分別交於 A,B,C三點, 試回答以下問題:

6. 平面 E 與 xz 平面之銳角交角爲

(A) $\dfrac{\pi}{6}$ (B) $\dfrac{\pi}{4}$ (C) $\dfrac{\pi}{3}$ (D) $\dfrac{\pi}{12}$ (E) $\dfrac{\pi}{8}$ (2分)

7. 直線 AB 的方程式爲

(A) $\begin{cases} x-y=1 \\ z=0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} y-x=1 \\ z=0 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x+y=-1 \\ z=0 \end{cases}$ (E) $\begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases}$ (2分)

8. 由 A,B,C 三點與原點 O 構成之四面體的體積爲

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (E) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (2分)

(提示: 四面體體積$=\dfrac{1}{3}\times$底面積 $\times$高)

9. 原點 O 到平面 E 的距離爲

(A) 1 (B) $\dfrac{1}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\dfrac{1}{3}$ (E) $\dfrac{1}{2}$ (2分)

10. $\triangle ABC$ 的面積爲

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ (D) $2\sqrt{2}$ (E) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (2分)

第二部分: 非選擇題(共佔80分)

說明: 本部分中, 第一題爲塡充題 (共50分), 第二題至第四題爲計算或證明題 (每題10分)。請都在「**非選擇題試卷**」上作答。**注意:** 請勿將無理數或無限小數寫成有限小數。例如: 不要把 $\sqrt{2}$ 寫成 1.414, 也不要把 $\frac{1}{3}$ 寫成 0.333。

一、塡充題: 本題共有十個空格, 每個空格5分, 請答在「非選擇題試卷」上的第一欄, 務必寫上格號 $(A, B, \cdots, J)$ 後, 再寫答案。(爲節省空間, 本題作答請不要寫出演算過程。)

1. 設 L 爲通過橢圓 $\Gamma_1 : \dfrac{(x-1)^2}{3}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=\dfrac{1}{4}$ 與橢圓 $\Gamma_2 : 4x^2+3y^2-18y+25=0$ 兩交點的直線, 則直線 L 的方程式爲 __(A)__, 橢圓 Γ_2 中心點到直線 L 的距離爲 __(B)__。

2. 兩多項式 $p(x)=x^{50}-2x^2-1$ 與 $q(x)=x^{48}-3x^2-4$ 的最高公因式爲 __(C)__。

3. 將 3 個球投入 3 個不同的袋子裡, 每次投一個球, 連續投 3 次。則每個袋子都有球的機率爲 __(D)__, 3 個球都在同一袋子的機率爲 __(E)__, 空袋子個數的期望值爲 __(F)__。

4. 設方陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$, 則 A^{-1} 爲 __(G)__。若方陣 $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 滿足 $AB=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$, 則 $a^2+b^2+c^2+d^2$ 爲 __(H)__。

5. 將曲線 $y=\sqrt{1+\dfrac{x^3}{100}}$, $2 \le x \le 20$, 繞 x 軸旋轉所得旋轉體的體積爲 __(I)__。以此旋轉體做成容器裝滿水, 然後再將水倒入某球體容器恰好塡滿 (容器厚度不計), 則此球體容器之半徑爲 __(J)__。

說明: 以下第二題至第四題爲計算或證明題, 每題10分。請將演算過程寫在「非選擇題試卷」上, 先標明題號 (**二**、**三**、**四**), 再作答。

二、解不等式 $\log_{1.5}(x+1) > \log_{2.25}(x^2-x-1)$。

三、拋物線 $\Gamma : y=p(x)$ 的對稱軸平行於 y 軸, 且 Γ 與 x 軸交於點 (2,0), 並在 $x=1$ 時與函數 $y=x^4+1$ 的圖形相切。試求 $p(x)$。

四、設 $a_0=1$, $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}$, 其中 $n=0,1,2,3,\cdots$。

(1) 試證 $1 \le a_n \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, 其中 $n=0,1,2,3,\cdots$。　(4分)

(2) 試證 $a_n \leq a_{n+1}$, 其中 $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$。 (3分)

(3) 當 $n \to \infty$ 時, 試說明 a_n 趨近於一定值。 (3分)