

# 數學教育目的性之轉移

黃毅英

自一九七七年起，大陸推行十年制全日制的義務教育。於一九八〇年，十三所院校、包括北京師範學院、上海師範學院、廣東師範大學等等，組成了協編組，編印了《中學數學教材教法》(即教學法)，成為數學教師的教學藍本。裡面由數學教學之目的與內容、教學能力的培養到實際的數學教學工作，分層析述。其中亦包含不少數學教育的方向性問題，其中明確地提出了三種能力(運算能力、邏輯思維能力與空間想像力)的培養，指出「中學數學教學的目的是：使學生……具有正確迅速的運算能力，一定的邏輯思維能力和一定的空間想像力，從而逐步培養學生分析問題和解決問題的能力。」

一九八四年，十三所高師院校數學系，中學數學教育教研室於西安召開了修訂討論會，並於一九八七年出版了《中學數學教材教法》的第二版。其中內容與初版有不少不同之處。據筆者比較兩版，二版中所提數學教學之方向是因應了普及教育的實施情況作出了調整。

## 對所有人有效的數學

自普及教育實施，不少教育工作者有感學生水平下降。

教授學生以事實性的知識 (factual knowledge) 之餘，已無能培養更「高一層」之能力。正如一九八五年香港教育署課程發展委員會頒布之《中學課程綱要》的前言中在列舉中學數學教學目標之後云：「上述目標(註一)，顯示出本課程的中一個重點，就是將數學作為應用工具，而並非作為一種思維方法(註二)。」

可是，真像卻可能剛剛相反。

對於大部分完成普及教育不打算(在數理科)進修的學生，肩負一大袋公式、定理和技巧，唯一的結果就是在最短的時間內拋諸腦後。假若不能從之培養學生之能力，近十年的學習就只剩回夢一場吧了。

在以往，數學教育可能只有一個目的，乃是發掘有數學潛質者(精英)而培育之。換言之，數學教師、尤以高年班而言、大可假設學生未來在數理方面的發展，提供數學能力方面的準備。

教育從精英轉向普及，所衍生的不只是水平有否下降的問題，所面對的學生龐大了，他們來自不同的背景，懷有不同目的。而在普及教育以為使未來公民具備必需之知識、技

能和素養的大前提下，中學數學教育之目的  
是有重估之必要。

早在1983年英國的《數學在乎》(Mathematics Counts) 與1989年美國的《人皆在乎》(Everybody Counts) 已開始提出要「令數學對人人有效」。在《人皆在乎》中強調每個處於高科技與資訊化社會中的公民均應具備某程度的數學知識與能力，故此學校數學之目的為令每個未來公民不至成為「數學文盲」(Mathematically Illiterate)。1989年美國數學教師議會出版的《學校教學課程與評鑑標準》(Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics) 與1991年英國頒布的《國家課程》(National Curriculum) 大抵即是承接上面的方向，具體地列出每個學習階段起碼的數學要求。

美國於1990年出版的《學校數學的重整》(Reshaping School Mathematics) 及1992年的《核心課程：令數學對人人有效》(Core Curriculum: Making Mathematics Counts for Everyone) 恐怕是與上同出一轍的。後者更詳析數學、教育與社會轉變帶來的影響。

一九八七年出版的《中學數學教材法》第二版，其著眼點比對於一九八〇年的原版亦有所不同，因應普及教育的問題而改變了。其中花了一大段篇幅分析說上述問題，如云(頁十三)：

「所以，數學教學目的雖然包括傳授知識、培養能力、德育這三個方的要求，但是，中學數學教學目的應是一個統一的整體。這三個方面的教學目的……不能有所偏廢。」

續云：「應當指出，由於中學教育具有基礎教育和普及教育的性質，因此，中學數學教學目的應符合基礎教育和普及教育的要求……因此，把中學數學教育目的片面地提高到『培養數學專家』的做法，或者認為『傳授數學知識愈多愈好，愈深愈好』、『能力要求愈高愈好』等看法都是不符普及教育性質的。」

## 把數學最怕人的一面呈現在學生眼前

自本世紀初第三次數學危機得到克服後，數學把自己交托於數理邏輯與集合論作基礎；嚴謹性與精確性於是被一再強調。新數學運動時期的教科書亦受此影響，一直延續至今。一些數學教科書的編排可以用「適合該程度數學定理依照邏輯推理系統的彙集」來形容。也可以說，數學是裝扮成最怕人的樣子呈現在學習者面前。

在現時，不少的數學教授，仍過份強調數學的嚴謹性、表達的精確性、其簡潔的特質、數學的高度抽象化和符號化。

例如簡單的一這數學題：解二次不等式

$$x^2 - 3x + 2 > 0,$$

我們首先將左邊因式分解，得出

$$(x - 1)(x - 2) > 0.$$

於此，左邊為兩數之積。既然其積為正數，兩因式必須同為正數或同為負數，故有

$$(x - 1 > 0 \text{ 及 } x - 2 > 0)$$

$$\text{或 } (x - 1 < 0 \text{ 及 } x - 2 < 0),$$

換言之，

$$(x > 1 \text{ 及 } x > 2)$$

或  $(x < 1 \text{ 及 } x < 2),$

即

$$(x > 2 \text{ 或 } x < 1),$$

做畢。

然而，爲了高度符號化和要納入邏輯推理系統，上面的算式常寫作

$$x^2 - 3x + 2 > 0$$

$$\iff (x - 1)(x - 2) > 0$$

$$\iff (x - 1 > 0 \quad \wedge \quad x - 2 > 0)$$

$$\quad \vee (x - 1 < 0 \quad \wedge \quad x - 2 < 0)$$

$$\iff x > 2 \quad \wedge \quad x < 1.$$

不少學生見到後者，可謂丈二金剛、摸不著頭腦。最重要的，解題的思路沒有了，學生完全明白從第一步到第二步是正確無誤的，但問題是，從第一步如何得出第二步來呢？

香港大學數學系蕭文強博士曾指出，學習者所需的是「製作過程中之數學」而非「作爲製成品的數學」。現時學生在課堂上接觸到的往往是經過連串修飾的數學，教科書不少仍拘於「定義 — 定理 — 證明 — 例題 — 習作」的刻板格式，學生實難洞悉來龍去脈於其中。

邏輯表達固然重要，但大可留待掌握了原理之後。筆者相信，若能把數學原理從這些符號釋放出來，數學的學習會平易近人一些。

## 數學教育與一般能力之培養

《人皆在乎》更指出，在以往學校的功能是爲了使學生在進入社會前之準備，學生學會了相當足夠之知識在社會上的各行各業裡得以應用。但在此瞬息萬變的社會中，此構思已無可能，新的知識領域不斷湧現，故此，學校應集中使學生有應付、學習未來不可知事物之能力。這恐怕即布魯姆所說的「學習如何學習」。

隨著計算機與電腦等高科技的發展，現時學校數學內大部份用計算機即能做到的技能之訓練已變得重要性大減。有人便提出減低技巧之比重 (de-emphasis of skill)，並應著重概念。

事實上，布魯姆大力提倡了自我發現法。不少人曾質疑，假如學生經過一小時的數學發現而未能發現出預期數學的結果來，這一小時是否算是白費呢？這便涉及我們在乎於「結果」(數學結果與技能的獲得) 還是「過程」(解難、探索、原創等能力) 的問題。

從上分析，解難等能力的提高在普及教育裡有特殊意義。使學生有解決未來問題之能力，而不只是一籃子的解難策略。這亦是八十年代美國提出的學校數學的焦點。然而解難等能力的提高恐亦不能抽離數學內容而進行的，故《九十年代的學校數學》(Mathematics in the 1990s) 便提出「結果」與「過程」並重的路向。

大陸新近出版之《中學教學教材教法》第二版中，與原版比對，特別指出當前，在數學教學法理論方面和實踐方面提出許多需要研究解決的重大課題。例如：

「在數學教學傳授知識的同時,如何培養能力、發展智力的問題」;

「中學數學教學內容以及體系如何適應我國現代化建設的需要問題」;

「中學數學教學如何照顧差別,既能提高教學質量,又能培養拔尖人才的問題」;

「如何運用現代的教學手段,去提高數學教學的效率問題等等。」

至於能力培養,自初版起,已提出了運算、邏輯與空間等三種能力。第二版中特別強調數學學習除能發展上述三個數學能力外,亦可同時培養一些一般能力,並列舉了觀察力、記憶力、注意力作逐點討論。(頁廿三)其他文獻中所提的一般能力仍多。如頁廿九(初版同頁)提出了「數學教學過程還有利於培養敏捷、迅速、嚴謹、縝密、有條不紊的工作作風,培養刻苦鑽研的堅強毅力等。」

至於如何選擇中學數學教學內容的依據與標準,亦能反映出數學教學焦點之所在。

第二版與初版不同者,乃特別羅列社會作用標準、後繼作用標準、適應科學技術發展的標準,中學生可以接受的標準與可行性標準的(頁三十)評論。

## 核心課程

在大陸,數學的課程與教科書一向是統一的,在《中學數學教材教法》第二版中(頁五)特別提出:「由於我國幅員廣大,人口衆多,全國實行義務教育,廣大的學生中數學基礎知識、能力發展水平存在著地區、學校之間的差別,這種差別,就是在同一班級也會出現。

學生在理解和掌握數學知識上存在不同程度的困難,在接受能力、心理特徵上也有種種差異,這些差異也給數學教學工作帶來複雜性和艱難性。」事實上大陸即將推行「一綱多本」的措施。即全國有一個統一的教學大綱,但不同地區可以用不同的課本、依據不同的進度。大陸還探討「多綱多本」的構思(註三)。

英美國的情況恰恰相反。英國的《國家課程》與美國《學校教學課程與評核標準》乃為異中所求的「一」。《九十年代數學教育》還提出「核心加選收」(core + elective)的想法。

香港在普及教育實施後,存在嚴重的混能班問題。龐大與擠迫的課堂環境與個別化學習的想法可謂背道而弛、個別差異極難照顧到。本來透過目標為本評估(target-related assessment),教師可將進度不同的同學分野開來作不同處理;又或如通達教學學法(mastery learning)的在「形成測驗」(formative test)後把學生分成兩組。可是現時課堂的擠迫程度與教師工作量均使這些幾近不可能,而這些恐正是香港教育所急須改善者。

## 考試文化與競賽考試化

有人提出,中國文化是屬於一種「考試文化」。無論如何,中國及亞裔(「儒家體系」)的學生極善於應付常規性考核。但亦有指出他們是不善於非常規性測試的。

長久以來,考試一直為香港教育的最大原動力。可是隨著各個程度學位的增加,考試的篩選作用已開始減退;而隨著社會結構的

轉變，學生亦不必經過這個篩選機具方能在社會階梯上爬升。

問題不在考試的帶動地位，而在此消滅之同時，我們怎樣代以另一股原動力；亦即學生來到學校不是像以前的如何在群輩中勝出，而真是來要學點東西。

《九十年代數學教育》中指出，不少廣為人信賴的公開試（如會考）的及格分數往往低至三四十分，所以對於一個會考數學科及格的學生，我們絕對不能確定他究竟具備何等數學知識，這時極不可取者。評核之重點應轉向評估每個學習者本身的進度非與同齡學生比較。現時香港正推行目標為本評估，卻又與他人比較作分流之用，這又是否與標準參照測試的原意有所出入呢？

有人說，在大陸的書店，高考的書籍最多。除此，關於數學競賽的亦不遑多讓。只不過因為數學競賽乃進入大學之另一途徑、一種捷徑吧了。

由此，也許吸引了不少機會主義者，形成了數學競賽考試化。導致如此利用數學競賽拔尖的造法有待進一步商榷的必要。

有人認為數學競賽式的題目能提供一種非常規性的測試。問題卻是，當我們欲建立一些非常規性的考核，經過幾年後，考試者又會否很快地適應了這些「非常規性」的模式而把之變成常規化呢？大批數學競賽樣板書的湧現好像就欲反證此點。

## 期待更多具反思能力數學教師

如上所述，以往的數學教育旨在發掘與培養數學人才，故此數學教師必須具備相當的數學能力。數學工作者亦順理成章地對學校數學有較大的影響力。在布爾巴基學派製訂《數學原理》(Element de Mathématique) 已如是。

隨著本世紀初學習心理學興起與其在五六十年代間之急遽發展，研究者開始探索跨學科性的學習行為。他們著重一般學習與資訊處理能力的提高。上已看到這種整體能力的提高在普及教育中有特別意義。由此之故，教育學的指導作用有凌駕學科之勢。

縱使有人認為學習電腦與文學不同，學習行為則一；但在普偏中自然有各科的特殊性（既有普偏亦有特殊）。在一方面，數學有獨特的本質與思維方法；在另一方面，數學為必修又非每個人自感有能力者。這帶給這一代教師新的挑戰。

數學教育包含了數學與教育兩者。數學教師一方面要具有一定的數學素養，另一方面亦得在教學法、學習與動機理論及社群心理學等各方面充實自己。社會上實期待著更多具有反思能力 (Reflective) 及有學養的教師 (Scholar-teacher)。

註一：原文英文版用“Objective”，中文版用「目的」。

註二：原文中文版作「... 而並非僅作為一種思維方法」，即在思維方法之上還有工具之角色；但參照英文版，則沒有「僅作」之含意，即不把數學看待成思維方

法，只看成爲應用工具，今從英文原文理解。

註三：一九九二年大陸出版了新修的小學及中學數學教學大綱，對運算能力、空間能力、解題能力與良好的個性品質作了

更詳細的闡述。

—本文作者任教於香港中文大學教育學院課程與教學學系—