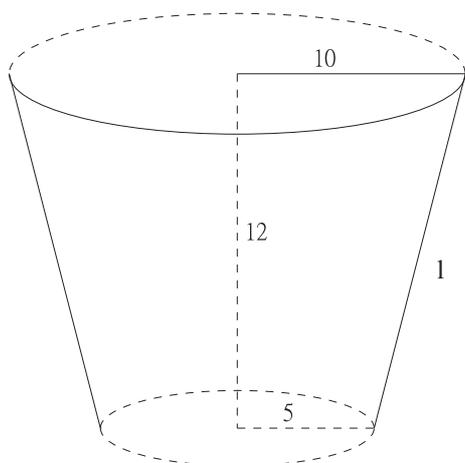


# 水桶的側面積

王湘君

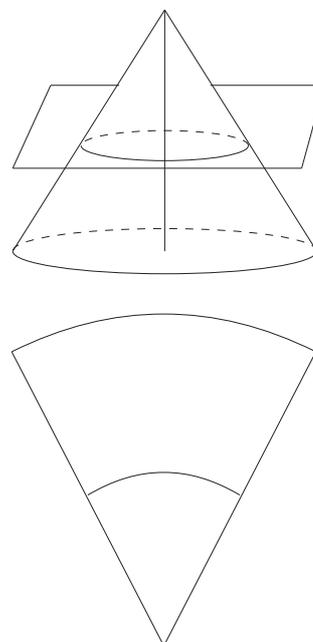
高三模擬試題裡，有一道題，在做答時，很容易發生誤解，在此特別提出討論，並做成完整的結論，以供學習者參考。

題目：如圖，無蓋鐵皮水桶，高 12，上下底圓半徑各為 10 及 5，求其斜高，又銲接成此水桶所裁剪的鐵皮，其最小面積為何？



斜高好求，只要用畢氏定理可求出  $l = 13$ 。然而水桶的側面，大部分的學生視為梯形，這是很大的錯誤。一個圓柱的側面，是矩形，沒錯，就順理成章地推想一個圓錐台的四周是梯形，這是錯的。我們知道，一個圓錐是由一面扇形圍成的，因此一個圓錐台，應該是由大小扇形的差，也就是弓形所圍成的。讀者不

妨把一個紙杯，用剪刀裁開來，看一看紙杯的四周是不是一個弓形。



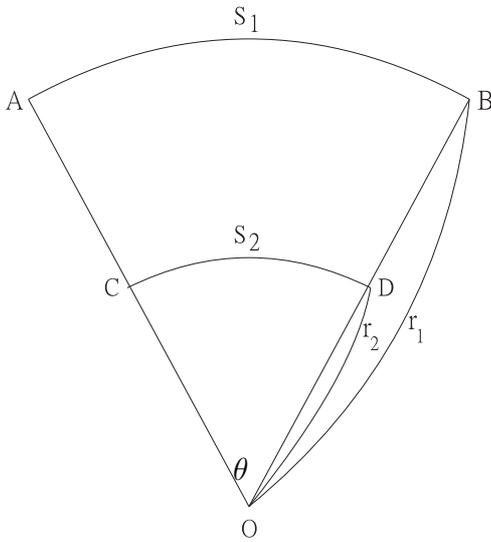
好啦，現在看一看弓形的面積怎麼算。

弓形面積 = 大扇形面積 - 小扇形面積。

$$\text{扇形面積} = \frac{1}{2} \cdot \text{弧長} \cdot \text{半徑}$$

(令  $\theta$  表角的弧度量， $S$  表弧長， $r$  表半徑)

$$\text{弧長} = \text{半徑} \cdot \text{弧度量} \quad (S = r\theta)$$



$$S_1 = r_1\theta \implies \frac{S_1}{S_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$S_2 = r_2\theta$$

令  $S_1 = 20\pi, S_2 = 10\pi, r_1 - r_2 = 13$ 。

$$\frac{20\pi}{10\pi} = \frac{13 + r_2}{r_2}, \quad \text{所以 } r_2 = 13。$$

$$\text{故弓形面積} = \frac{1}{2}(S_1 r_1 - S_2 r_2)$$

$$= \frac{1}{2}(20\pi \cdot 26 - 10\pi \cdot 13) = 195\pi。$$

本題答案應為：側面積+下底面積=  
 $195\pi + 75\pi = 220\pi$ 。

但在求解過程中，如果我們事先知道弓形面積的簡易算法，則解答過程可簡化。

現在我們來看弓形面積的算法。

$$\begin{aligned} \text{弓形面積} &= \text{大扇形面積} - \text{小扇形面積} \\ &= \frac{1}{2}(S_1 r_1 - S_2 r_2) \\ &= \frac{1}{2}(S_1 r_1 - S_1 r_2 + S_2 r_1 - S_2 r_2) \\ &\quad \text{因為 } \frac{S_1}{S_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad (\text{前面證過}) \\ &= \frac{1}{2}[S_1(r_1 - r_2) + S_2(r_1 - r_2)] \\ &= \frac{1}{2}(S_1 + S_2)(r_1 - r_2) \\ &= \frac{1}{2}(\text{上底} + \text{下底}) \cdot \text{斜高} \end{aligned}$$

類似梯形面積，(可幫助記憶)。

因此本題可簡答如下：

$$\text{水桶側面積} = \frac{1}{2}(10\pi + 20\pi) \times 13 = 195\pi$$

—本文作者任教於師大附中—