清代著名數學家汪萊及其數學成就
—— 紀念汪萊逝世180周年

李 迪

汪萊是我國清代中期著名數學家, 他在數學方面的工作是在暗中摸索著進行的, 但卻反映出他出衆的數學才華。遺憾的是至今還沒有一篇專門文章對汪萊及其數學成就作較全面的介紹, 本文將對此做一嘗試。

一. 汪萊的生平事跡

汪萊 (1768-1813) 字孝嬰, 號衡齋, 安徽歙縣人, 出生的地方爲汪氏的靜山堂。他的父親叫汪昌, 雖然家道不富, 但卻喜歡讀書, 博覽群籍, 能詩善文, 著《靜山堂詩集》及《靜山堂文集》, 一生過著清貧的生活[1]。

汪萊自幼聰慧過人, 在父親指導下進行學習, 七歲能作詩。年15歲補博士弟子。在他19歲時遇到飢荒, 只好"竭力養親, 恆負米數十里外, 嘗典衣爲犬齒, 秘不令家人知"[2]。20歲時他曾考書院, 第二年父親去世, 他便離家去蘇州, 讀書於葑門外。"慕其鄉江文學永、戴庶常震、金殿撰榜、程徵君易疇學, 力通經史百家及推步曆算之術。"[3] 江永 (1681-1762)、戴震 (1723-1777)、金榜 (1735-1801)、程易疇等都是當時知名學者, 江、戴還都精通數學, 雖然有的如江、戴已去世, 可是他們的影響還廣泛存在。汪萊在蘇州學習了包括天文數學等自然科學在內的各種知識。25歲時, 他回到了家鄉。

汪萊經過學習有了一定基礎, 回鄉以後在艱苦的條件下開始科研工作。這年他自製一方儀、簡平儀、勺多漏等儀器, 並用"以觀天", 從事天文學研究[4]。同時著有《覆戴通幾》、《參兩算經》等文。

在以後的七八年中, 汪萊基本上在家鄉歙縣, 有時到揚州等地學習、訪友, 其間於1798年 (31歲) 曾去南京應鄉試, 未中。這卻是他一生中學術上的活躍時期, 大多數科學成果在此期獲得。他和焦循 (1763-1820)、李銳 (1769-1817)、江藩 (1761-1830)、巴樹谷等學者交往甚多, 互相討論數學問題, 特別是和焦循、李銳的關係更爲密切, 時人將他們稱之爲"談天三友"。這種互相討論, 使他們對數學的研究起著很大的推動作用。

當時人們討論的主要課題大體屬於中國傳統數學內容。中國古代的數學著作, 在明代大部分被淹沒, 就連宋元時代秦九韶的《數學

九章》, 李冶的《測圓海鏡》、《益古演段》等等都已無人知曉。就在這時, 這些古書陸續被挖掘出來, 引起了數學家們的關注。汪萊也不例外, 他和焦循、李銳等人參與了對這些古書的討論和研究。

他在37-40 歲的三、四年間大部分在揚州渡過。經他朋友夏燮 (1760-1829) 的保舉, 於1807年參加考試, 以優行第一貢成同赴北京國子監學習, 第二年考取八旗官學教習, 成爲國家的教授。可是他並沒有長期從事教學工作, 因爲正在這時御史徐國楠奏請淸廷 "續修《天文》、《時憲》二志, 經大學士首舉 (汪) 萊與徐准宜、許澐入館纂修。" 這樣, 汪萊就從八旗官學到了國史館, 進行《天文》和《時憲》二志纂修工作。經過兩年左古的努力, 到1809年完成。"議敍, 以本班教職用", 不過未回到八旗官學任職, 而是被派到石埭縣 (在今安徽壽陽縣南) 訓導[5]。

1810 年赴石埭縣任教諭, 1813 年赴省裡應鄉試, 未中, 得疾而歸。在歸途中, 汪萊還帶病去看望老朋友焦循 (未見)、夏鑾。夏鑾之子夏炘描述了汪萊當時的情景: 先生於"癸酉 (1813) 夏過先君子 (夏鑾) 青山草堂, 顏色憔悴, 悄然不樂, 先君子強之著書, 則曰:「今世考據家陳陳相因, 不過抄襲前言耳, 非能發古人所未發也。」"[6] 回到石埭幾個月後於年底在任上去世, 終年46歲 (實爲 45周歲)。臨終時, "兩孤在抱", 孩子很小。

汪萊一生中, 雖數次應試, 連鄉試也未得中, 悠悠熬了個一縣之敎諭, 但卻孜孜不倦地從事科學研究。"因其精算之名, 久爲官鄉所知", 早在他去北京之前就被邀請參加黃河口的治理工作, 擔任"新海口地勢高下" 的測算任務。他"天性敏絕, 機能攻堅, 不敢苟於著述。凡所言, 皆人所未言, 與夫人所不能言。"他的著述包括數學、天文學、力學、文學、古樂律等非常豐富的內容。在世時出版有《衡齋算學》七册, 去世後, 朋友們搜集他的遺稿, 並把已出版的七册書中之"漫漶者, 合而梓之", 於1854年有《衡齋算學遺書合刻》。其中《衡齋遺書》部分包括《覆載通幾》(附《四邊形算法》)、《參兩算經》、《樂律逢源》、《考定磬氏倨句令鼓旁線中懸而懸居線右解》、《校正九章算術及戴氏訂訛》、《今有錄》各一卷和《衡齋文集》三卷。1892年, 其孫汪廷棟又請人"悉心勘定", 重新刊刻。這是汪萊著作的兩種版本。

汪萊的兒子光恆 (又字小衡) 也對數學有研究, 著《小衡算說》七卷, 有光緒十一年 (1885) 家刊本傳世。其六世孫汪宜楷, 現爲歙縣第一中學語文敎師, 筆者曾於1986年前去拜訪過。

汪萊在數學方面的工作是多方面的, 在與當時西方隔絕的情況下, 經過自己的刻苦鑽研, 取得了一批相當好的成果。下面有選擇地進行一些介紹。

二. 對於p 進制的研究

在世界數學史上, 進位制是一個重大問題, 不同國家或地區曾採用過不同的進位制, 如埃及、中國、印度等古國都用十進制, 巴比倫和希臘用六十進制, 中世紀阿拉伯世界兼用上述兩種, 拉丁美洲北部的古瑪雅人則用二十進制, 萊布尼茲提出了二進制等等。當然

在某種主要進位制外，有時根據實際需要採用其他輔助進位制，如中國有十六兩爲一斤，樂律上有9進制等，古代也有不同進位制之間的換算。但所有這些都處於個例狀態，沒有上升到較高、較一般的水平上。在中國歷史上對進位制的較高水平的研究，首推汪萊。

汪萊有“參兩算經”一文[7]，分爲“原始”、“立綱”、“匯奇”、“列偶”、“會歸”和“參兩數說”等六項。早年，錢寶琮先生雖提及此文，但未進行深入探討和應有的評價[8]，近年李兆華先生則詳細研究了這個問題[9]。這篇文章主要是講 p 進制的問題，設 p 爲一自然數，且 $2 \leq p \leq 9$，汪萊討論了 $2, 3, \cdots, 9$ 進位。他認爲，“審其法與數之宜而已，數非乘則除，乘因而重之，無難也；除乃化而裁之”，就是整數的乘法得整數，可是除法就不一定這樣，往往得到的是“不可終窮”的小數(這當然只能無限循環小數)。要想避免整數除法出現小數的情形，必須想出一個解決辦法，即要採用不同的進位制。爲此，汪萊提出了一條原則：“逢身進位”，這是“立綱”的核心。所謂“逢身進位”就是由除數確定進位制，如7爲除數採用7進制，4爲除數採用4進制等。在這種考慮中，大都與數目 2 和 3 有關，汪萊說：“曰參曰兩，乃數之原，立數於參；二乘一一，立數於兩，一乘不煩。是以生諸數之法而不受裁於法。”因而把文章定名爲“參兩算經”。所謂“立數”就是進位制，立數幾就是幾進制。

在“匯奇”和“列隅”兩部分中，汪萊給出了 p 進制的乘法表，如下：

九進制

$8 \times 2 = 17$	$7 \times 5 = 38$	$5 \times 3 = 16$
$8 \times 3 = 26$	$7 \times 6 = 46$	$5 \times 4 = 22$
$8 \times 4 = 35$	$7 \times 7 = 54$	$5 \times 5 = 27$
$8 \times 5 = 44$		
$8 \times 6 = 53$	$6 \times 2 = 13$	$4 \times 2 = 8$
$8 \times 7 = 62$	$6 \times 3 = 20$	$4 \times 3 = 13$
$8 \times 8 = 71$	$6 \times 4 = 26$	$4 \times 4 = 17$
	$6 \times 5 = 33$	
$7 \times 2 = 15$	$6 \times 6 = 40$	$3 \times 2 = 6$
$7 \times 3 = 23$		$3 \times 3 = 10$
$7 \times 4 = 31$	$5 \times 2 = 11$	
		$2 \times 2 = 4$

八進制

$7 \times 2 = 16$	$6 \times 2 = 14$	$5 \times 2 = 12$
$7 \times 3 = 25$	$6 \times 3 = 22$	$5 \times 3 = 17$
$7 \times 4 = 34$	$6 \times 4 = 30$	$5 \times 4 = 24$
$7 \times 5 = 43$	$6 \times 5 = 36$	$5 \times 5 = 31$
$7 \times 6 = 52$	$6 \times 6 = 44$	
$7 \times 7 = 61$		

$4 \times 2 = 10$	$3 \times 2 = 6$
$4 \times 3 = 14$	$3 \times 3 = 11$
$4 \times 4 = 20$	

七進制

$6 \times 2 = 15$	$5 \times 2 = 13$	$4 \times 2 = 11$
$6 \times 3 = 24$	$5 \times 3 = 21$	$4 \times 3 = 15$
$6 \times 4 = 33$	$5 \times 4 = 26$	$4 \times 4 = 22$
$6 \times 5 = 42$	$5 \times 5 = 34$	
$6 \times 6 = 51$		$3 \times 2 = 6$
		$3 \times 3 = 12$

六進制

$$5\times 2=14 \quad 4\times 2=12 \quad 3\times 2=10$$
$$5\times 3=23 \quad 4\times 3=20 \quad 3\times 3=13$$
$$5\times 4=32 \quad 4\times 4=24$$
$$5\times 5=41$$

五進制

$$4\times 2=13 \quad 4\times 4=31 \quad 3\times 2=11$$
$$4\times 3=22 \quad 3\times 3=14$$

四進制

$$3\times 2=12 \quad 3\times 3=21 \quad 2\times 2=10$$

三進制

$$2\times 2=11$$

二進制

$$1\times 1=1$$

這裡要指出的是: 原文不是用阿拉伯數碼, 而是用中國的漢字, 如九進制用八乘的那一部分爲:“立數在九, 先定八, 八二一七, 八三二六, 八四三五, 八五四四, 八六五三, 八七六二, 八八七一”, 七乘、六乘等等類推, 我們爲了簡便改用現代形式。另外, 原文中有些相同結果。如“二三以後, 統用前數”, 並未填入表中。

汪萊在討論 p 進制乘法的同時討論了除法問題。兩整數相除, 使其商保證是整數或有限小數, 必須使進位制與法 (除數) 相宜才行。在 p 進制, 他指出了相宜的法:

“立數於十, 二、四、五、八爲法除之, 皆有成數, 若他數爲法, 析之不終窮。己推之, 立數九, 惟三爲法宜。立數八, 法惟二四宜。立數六, 法惟二三四宜。立數四, 法惟二宜。立數七, 五、三, 法數合乃宜。立數二, 不煩算。” 這就是說, 汪萊建立了不相同的進制與相宜於它們的法, 除得結果如下:

九進制

$$\frac{1}{3}=0.3 \quad \frac{2}{3}=0.6 \quad \frac{3}{3}=1$$

八進制

$$\frac{1}{2}=0.4 \quad \frac{2}{2}=1 \quad \frac{1}{4}=0.2$$
$$\frac{2}{4}=0.4 \quad \frac{3}{4}=0.6 \quad \frac{4}{4}=1$$

六進制

$$\frac{1}{2}=0.3 \quad \frac{2}{2}=1 \quad \frac{1}{3}=0.2$$
$$\frac{2}{3}=0.4 \quad \frac{3}{3}=1 \quad \frac{1}{4}=0.15^{*)}$$
$$\frac{2}{4}=0.3^{*)} \quad \frac{3}{4}=0.45^{*)} \quad \frac{4}{4}=1$$

四進制

$$\frac{1}{2}=0.2 \quad \frac{2}{2}=1$$

汪萊在“參兩數說”部分中給出了計算相宜的法的過程, 而未討論其理論根據, 李兆華曾有探討[10]。這裡不再重述。

盡管“參兩算經”是一篇不足兩千字的短文, 但卻是中國歷史上首篇 p 進制專題論文, 在同時代世界上也不多見。

---

* 此三者原文有誤, 經計算改正。

三. 球面三角形解法

我國對球面三角形的研究, 是從 17 世紀西方數學傳入之後開始 的, 梅文鼎 (1633-1721) 首次進行了系統的研究, 我們已有全面探討[11]。梅文鼎研究了球面三角形解法, 並提出了“次形法”概念, 其基本思想是利用弧與角的對稱、互餘、互補情況, 把原來不易求解的三角形轉化爲易解的三角形。但是, 梅文鼎卻未討論解的存在性和解的個數問題。汪萊在梅氏的基礎上對此進行了研究並取得很好結果, 沈康身有過總結[12]。

在 《衡齋算學》 中的第一册“弧三角形”和第四册“弧三角形” 部分是汪萊對球面三角形解法的結晶。他用“知”與“不知”表示有解和無解, 並把有關這類定理統稱之爲“知不知條目”。第一册的“條目”, 原書分爲三個標題, 但實際上是兩種情況, 如下:

一、任意球面三角形, 又分爲

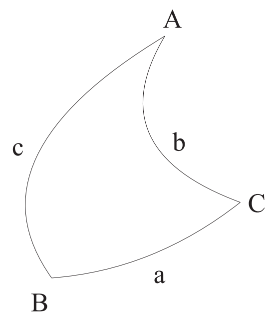
1.已知球面三角形兩邊及一邊所對角時的有解條件。列舉了12種情形。

2.已知球面三角形兩角及一角所對邊時的有解條件。列舉了12種情形。

二、球面直角三角形, 有9種情形。汪萊把球面直角三角形叫做“正弧三角”。他提出: “斜弧三角用垂弧分兩正弧三角形通法”, 前人所用爲“正算”, 是將斜弧三角形通過幾次作垂弧使其化爲幾個直角三角形再逐步求出所求的邊和角。汪萊以爲這樣做比較繁瑣, 於是提出了一種“省算”法, 其特點是只作一次垂弧, 即可完成。

《衡齋算學》第四册之前一半 “弧三角形” 是第一册的繼續, 討論球面三角形只有一個解的條件。他認爲使用球面三角形時容易弄錯, “弧三角之算, 窮形固難, 役形亦難, 稍不經意, 動乖其方, $\cdots$”, 因而制訂了條目40條, 實際是給出40條定理。

對解球面三角形的基本思想是: 在三角形中有三個邊 (以度計算) 和三個角, 若已知其中任意三個便可求出其餘三個 (當然也是有條件的), 共有6種情形。設 A、B、C 爲球面三角形的三角, a、b、c 爲它們所對的邊 (如下圖), π 表示平角 (半圓弧)。汪萊對6種情形的有解與否的條件進行了討論, 結果如下:



一、已知三邊 a, b, c, 有 4 條。

1. $a+b>\pi$, $c<2\pi-(a+b)$
2. $a+b\leq\pi$, $c<a+b$
3. $a=b$, c 爲“無定大限”
4. $a\neq b$, $c>|a-b|$。

其中第 3 條在多數情況下無解。

二、已知三角 A、B、C, 共 4 條。

1. $A=B$, C 無限制
2. $A\neq B$, $C<\pi-|A-B|$
3. $A+B=\pi$, C 無限制
4. $A+B\neq\pi$, $C>\pi-(A+B)$

其中第 1,3 條在多數情況下解不唯一, 或根本就不存在解。

三、已知 A、B 和 c, 解不唯一。

四、已知 a、b 和 C, 解不唯一。

五、已知兩邊及其中一邊所對之角, 共有 14 種情況。分爲三大類, 即

1. $a<b$, A, 6 條。

2. $a<b$, B, 6 條。

3. a,b, 且 $a=A$ 或 $b=B$, 2 條。

六、已知兩角及其中之一所對之邊, 共有 14 種情況。分爲三大類, 即

1. A、B, 且 $A<\frac{\pi}{2}$, a, 6 條。

2. A、B, 且 $A>\frac{\pi}{2}$, a, 6 條。

3. A、B, 且 $A=\frac{\pi}{2}$, a, 2 條。

最後 28 條, 比較複雜, 有的有唯一解, 有的並不是。這裡不詳細列舉了。

從分類的角度來看, 汪萊所分的六種情況, 和現代分法完全相同。每種情況再分, 並不那麼簡單, 後兩種比較完備, 而前四種則有較多的遺漏。然而, 不論怎樣, 汪萊在 19 世紀末中國那樣的背景下, 能達到這種程度已極爲可貴了。

四. 對組合問題的研究

《衡齋算學》第四册的後半部分爲“遞兼數理”, 約完成於 1789 年前後。全文正文部分雖只有 364 個漢字, 但它是中國數學史上第一次以專題的形式探討組合的某些性質和計算公式, 包含著較爲豐富的內容。

汪萊在“遞兼數理”中首先給出了“遞兼數” 的定義:

“設如有物各種。自一物各立一數起, 至諸物合並共爲一數止, 其間遞以二物相兼爲一數, 交錯以辨得若干數; 三物相兼爲一數, 交錯以辨得若干數; 四物、五物以至多物莫不皆然, 此謂遞兼之數也。”

“兼”是兼並, 這裡是得到若干物件之意, 而“遞” 可按相繼理解。“遞兼數”即從幾個物中, 每次取 $1,2,\cdots,n$ 個的組合數 C_n^1, C_n^2, $\cdots$, C_n^n, 其中 $C_n^1=n$ 即所謂“一物各立一數”, $C_n^n=1$ 即所謂“諸物合並共爲一數”, C_n^2 爲“二物相兼爲一數, 交錯以辨得若干數”, C_n^3 爲“三物相兼爲一數, 交錯以辨得若干數”, 同樣 C_n^4、C_n^5 分別爲“四物”、“五物”相兼而得的數, 以至 C_n^p $(3\le p\le n-1)$ 爲“多物”相兼而得之數。

接著, 進一步討論了“欲求總數若干及每次各若干”的計算方法, 即求“遞兼總數”和“遞兼分數”法。

“遞兼總數”之求法: “以所設物數減一數爲倍根之次數。乃以一爲根, 倍之加一得三爲一次, 又倍之加一得七爲二次, 如是累倍累加一至如其次數而止。其末得之數即相兼之總數也。”即逐次組合的和:

$$
\begin{aligned}
&C_2^1+C_2^2=2\times1+1=3=2^2-1,\\
&C_3^1+C_3^2+C_3^3=2\times3+1=7=2^3-1,\\
&\vdots\\
&\vdots\\
&C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=\underbrace{2(2(\cdots2(2}_{\text{共}(n-1)\text{個}2}\times1+1)\\
&\qquad+1\cdots)+1)+1=2^n-1。
\end{aligned}
$$

這就是一次、二次乃至 n 次之遞兼總數。

“遞兼分數”是指組合 C_n^p, 其計算是通過三角垛進行的, 而且中間涉及到 “中數”的問題。“中數”即 $C_n^1,C_n^2,\cdots,C_n^n$ 的中間項, 故有

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

汪萊解釋說: “中數之前後, 其前相兼之數與其後不及兼之數等, 故得數等。” 但是各次組合之系列有奇數, 也有偶數, 因此判斷中間項的序號就要考慮到這一點, 他指出: “中數之位, 於原設物數減去最大一數, 取其餘數之中。餘數奇則有一中, 偶則有二中。”

從 $1,2,\cdots,(n-1)$, n 這 n 個數中去掉最大一數 n, 再由前 $(n-1)$ 項判別, 即

$$(n-1)\begin{cases}\text{奇數, 有一個中間項, 即第 } \frac{n}{2} \text{ 項,}\\ \text{偶數, 有二個中間項, 即第 } \frac{n-1}{2} \text{ 及}\\ \qquad\frac{n+1}{2} \text{ 項。}\end{cases}$$

根據這一性質, 汪萊得出結論說: “中數以後, 即同於前, 不煩複算。”就是說在計算“遞兼分數”時, 只計算前一半就行了。

三角垛是中國傳統數學的重要內容之一, 系由“開方作法本源”演變而來。汪萊叫它三角堆。由三角堆計算“遞兼分數”, 即

“以所設物數即爲各立一數之數。減一數爲三角堆之根, 乃以根數求得平三角堆爲二物相兼之數。又減一數求得立三角堆爲三物相兼之數。又減一數求得三乘三角堆爲四物相兼之數。如是根數遞減, 乘數遞加, 求得相兼諸數。··· 此遞兼之數也。”

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & p=0\\
 & & & & 1 & & 1 & & & & p=1\\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & p=2\\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & p=3\\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

上圖爲“開方作法本源”之現代形式, 汪萊所說的各種三角堆如圖中之斜行所示。他沒有畫出這個圖, 而是畫出各種堆的立體圖形, 包括“一物各立一數”、“二物相兼得數”、“三物相兼得數”、“四物相兼得數”和“五物相兼得數”。他給出了相當於 p乘三角堆(垛) 前 n 項的和爲

$$\begin{aligned}&\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{p}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)\\ =\ &\frac{1}{(p+1)!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)\end{aligned}$$

汪萊在求出各“遞兼分數” C_n^1, C_n^2, C_n^3, C_n^4 之後進行了歸納: “如是根數遞減, 乘數遞加, 求得相兼諸數”, 相當於

$$\begin{aligned}C_n^p &= \sum_{r=1}^{r-p+1}\frac{1}{(p-1)}r(r+1)(r+2)\cdots\\ &\qquad (r+p+2)\\ &= \frac{1}{p!}(n-p+1)(n-p+2)\cdots(n-1)n\end{aligned}$$

即

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

這就是“遞兼數理”的主要內容。雖然晚於西方的同類結果, 但是卻是汪萊獨立得到的。

五．對方程論之研究

汪萊對方程論的研究包括在 《衡齋算學》第二册、第五册和第七册中，特別是後兩册最爲重要。中國古代在代數方面的研究和成就非常顯著，可是從理論上進行研究極少。在宋元時期，數學家們已經接觸到高次方程不止有一個正根的問題，而沒有進一步深究[13]。據現在所知，汪萊是我國歷史上第一個對方程理論進行研究的人。

《衡齋算學》 第二册的標題是“勾股形”並有“帶縱立方形附”。主要是講已知勾股形的面積和勾弦和 (或股弦和)，求勾、股、弦各數。其中包括有二次三次方程的問題。

第五册“一乘方二乘方形”，討論二次方程和三次方程的實根問題，即“根方多少糅雜每根之數知不知條目”。汪萊把方程有一個正根時叫 “可知”，有多個正根時叫“不可知”。這册中共有二次方程和三次方程96個，經整理有16種有正根，除去最簡單的情形，無重複也無遺漏，與現代的分類一致。下面按“可知”、“可知或不可知”和“不可知”三種情形把方程列出[14]:

一、可知者

$$ax^2-bx-c=0 \qquad (8\text{條})$$
$$ax^2+bx-c=0 \qquad (8\text{條})$$
$$ax^3-cx-d=0 \qquad (4\text{條})$$
$$ax^3+cx-d=0 \qquad (4\text{條})$$
$$ax^3-bx^2-d=0 \qquad (4\text{條})$$
$$ax^3+bx^2-d=0 \qquad (4\text{條})$$
$$ax^3-bx^2-cx-d=0 \qquad (6\text{條})$$
$$ax^3+bx^2-cx-d=0 \qquad (8\text{條})$$
$$ax^3+bx^2+cx-d=0 \qquad (6\text{條})$$

二、可知或不可知者

$$ax^3-bx^2+cx-d=0 \qquad (8\text{條})$$

三、不可知者

$$ax^3-bx+c=0 \qquad (8\text{條})$$
$$ax^3-cx+d=0 \qquad (4\text{條})$$
$$ax^3-bx^2+d=0 \qquad (4\text{條})$$
$$ax^3-bx^2+cx+d=0 \qquad (6\text{條})$$
$$ax^3-bx^2-cx+d=0 \qquad (8\text{條})$$
$$ax^3+bx^2-cx+d=0 \qquad (6\text{條})$$

其中 a,b,c,d 均爲正數。

汪萊並沒有對這 16 種 96 個方程一一求解，而是通過變換把 16種歸結爲更基本的 10 種類型，它們具備首項系數爲 1，有正根和有固定解法等條件。他對13種三次方程中的7 種所採取的變換是: 對方程的各項皆乘以 a^2，則有

$$(ax)^3 \pm b(ax)^2 \pm ac(ax) \pm a^2d=0$$

若令 $y=ax$, $b=p$, $ac=q$, $a^2d=r$，代入則有

$$y^3 \pm py^2 \pm qy \pm r=0$$

然後解此方程，求出正根。

在這些方程中，原求第51方程更有重要性。這方程屬於“可知或不可知”類型，有一個正根或有三個正根。在有三個正根時，汪萊假定有三個分數相加，即

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} \;=\; \frac{\beta\gamma+\alpha\gamma'+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}$$

其中 α, β, γ 爲

$$y^3 - py^2 + qx - r = 0$$

的三個根, 則 p 爲“三母總數” $(\alpha+\beta+\gamma)$, q 爲“通分之共子”$(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)$, r 爲“三母維乘之共母” $(\alpha\beta\gamma)$。實際上, 這是違達定理在三次方程上的應用。

汪萊對第51方程又給出一個“補法”, 主要是在於變換的不同。“補法”不用 a^2 遍乘各項, 而是用 a 除各項, 則有

$$x^3 - \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x - \frac{d}{a} = 0$$

令 $p \neq \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$, $r = \frac{d}{a}$, 有

$$x^3 - px^2 = qx - r = 0 \qquad (1)$$

作減根變換, 設 $x = y + \frac{p}{2}$, 則上式變爲

$$y^3 + \frac{1}{2}py^2 + \left(q - \frac{1}{4}p^2\right)y - \left[r - \frac{p}{2}\left(q - \frac{1}{4}p^2\right)\right] = 0 \qquad (2)$$

在求解時, 主要看這方程的常數項和一次項係數的情況而定。

當 $r - \frac{p}{2}(q - \frac{1}{4}p^2) = 0$ 時, $y = 0$ 爲方程 (2) 一根, 於是 $x = y + \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$ 爲 (1) 之一正根。

當 $r - \frac{p}{2}(q - \frac{1}{4}p^2) > 0$, $q - \frac{1}{4}p^2 > 0$ 時, 以帶從長立方有帶從方法解 (2), 求 $y + \frac{p}{2}$, 得 (1) 的一個正根 $x_1 = y + \frac{p}{2}$。然後解 (1) 的降階方程

$$x^2 - (p - x_1)x + \frac{r}{x_1} = 0 \qquad (3)$$

當 $(\frac{p-x_1}{2})^2 \geq \frac{r}{x_1}$ 時, (3) 有二正根, 因而 (1) 有三個正根 x_1, x_2, x_3, 當然都是原方程的正根。

我們上面的討論, 是在 $d < \frac{bc}{a}$ 時進行的。其他情況就不討論了。

《衡齋算學》第七册分爲“諸乘方數、根數、眞數糅雜設題式並訣”和 “開諸乘方數、根數、眞數糅雜訣” 兩大部分。後一部分又分爲“審有無”、“定進退”、“入諸商”和“求次數”四小節。在頭一大部分中, 汪萊以非常簡捷的方式舉例說明兩個一次方程相乘得一個二次方程, 三個一次方程相乘得一個三次方程, 兩個二次方程相乘得一個四次方程等, 由此可見, 高次方程之所以有可開與不可開, 其理畢見[15]。

在第二大部分中 “審有無”一節最爲重要。如果說第五册的 “可知”與 “不可知” 是討論方程只有一個正根或多於一個正根的問題, 那麼“審有無” 則是判別方程之有無正根的問題。汪萊對於首項係數和常數項正負不同, 中間又正負不相間者, 肯定都有一個正根的方程不在 “審有無”之列, 所討論的都是首項係數和常數項皆爲正而中間有負項方程。“審有無” 一節共列出25個高次方程, 其中有 4 個是屬於“有”的三項方程。經歸納後的方程是

$$x^n - px^m + q = 0$$

其中 $n > m > 0$, p、q 爲正數。同樣經歸納, 此方程有正根的充要條件是

$$q \leq \frac{n-m}{n}p\left(\frac{m}{n}p\right)^{\frac{m}{n-m}}$$

這是一條正確的判定定理, 但是汪萊是怎樣得到的沒有說明。

汪萊還研究過其他數學問題, 如割圓術就是其中之一, 他討論了有全弧通弦求五分之一弧通弦術和求三分之一弧通弦術等。這裡不詳細介紹了。

通過上述事實可以看出; 汪萊是一位很有才華的數學家, 他的思維能力和研究能力都非常強。從能力和水平來看, 汪萊不僅是他那個時代, 而且也是中國歷史上的一流學者。遺憾的是, 中國的國情限制了他的才能的充分發揮, 他絲毫不了解同時代西方先進數學, 連數學符號都不知道, 對所有問題的敍述全是文字的, 今天讀起他的著作還相當吃力。如果他要吸收了西方先進數學, 肯定能得到更高水平的數學成果。

參考文獻

1. 汪宜楷, “汪萊先生年譜”(初稿), 1986, 油印本。
2. 胡培翬, “石埭儒學訓導汪先生行略”, 轉自1。
3. 《淸史稿》 卷507“疇人二·汪萊”。
4. 汪萊, 《衡齋文集》 卷1。
5. 同3。
6. 夏炘, 《衡齋遺著·跋》。
7. 汪萊, 《衡齋遺著》 卷2。
8. 錢寶琮, “汪萊 《衡齋算學》 評述”, 《國立浙江大學科學報告》2卷1期 (1936), 第 1-24 頁; 《錢寶琮科學史論文選集》, 1983, 科學出版社, 第235-260 頁。
9. 李兆華, “汪萊 《遞兼數理》、《參兩算經》 略論”, 《中國數學史論文集》 (二), 1986, 山東教育出版社, 第65-83頁。
10. 同9。
11. 李迪、郭世榮, 《清代著名天文數學家梅文鼎》, 1988, 上海科學技術文獻出版社, 第172-188 頁。
12. 沈康身, “我國古代球體幾何知識的演進”, 《科技史文集》 第 8 輯 “數學史專輯”, 1982, 上海科學技術出版社, 第 128-143 頁。
13. 徐義保, “中算家對方程正根個數的認識”, 《數學史研究文集》 第二輯, 1991, 內蒙古大學出版社、九章出版社, 第 66-70 頁。
14. 李兆華, “汪萊方程論研究”, 《自然科學史研究》11卷 3 期 (1992), 第192-208 頁。
15. 同8。

—本文作者任教於內蒙古師範大學科學史研究所—