戴氏系列數

王榮彬

一

戴煦初名邦棣，字鄂士，一字鶴墅，號仲乙，浙江錢塘人。生於嘉慶十年五月十四日 (1805 年 6 月 11 日)，卒於咸豐十年三月初一日 (1860 年 3 月 22 日)。

戴煦青少年時，家境富有。但他絕意科舉，好疇人之學。其於算學，用力甚勤，"夜則滅燭先就寢，伏枕構思，俟厥父熟寐復起，火屬草稿至雞鳴，尤點竄塗改，不去手也。" [1]

戴煦與當時一些重要數學家，如謝家禾、項名達，徐有壬、李善蘭、夏鸞翔等都有來往，尤其與謝氏及項氏交往最密。謝沒後，戴煦爲他整理遺著；項氏的未竟書稿《象數一原》亦由戴煦校補完成，並補撰第七卷《橢圓求周術圖解》。他們之間的學術交流在數學史上被傳爲佳話。英人艾約瑟 (Joseph Edkins, 1823～1905) 非常欽佩戴煦的工作。1854 年，艾曾托李善蘭介紹登門求見，戴氏以中外殊俗異禮托故，推辭不見。同年，艾把戴煦的著作譯成英文送給英國數學會。[2]

1860 年 3 月，太平軍攻陷杭州，戴煦聞兄戴熙投池自溺，亦投井身亡。

戴煦一生留下了豐富的著作。數學方面有《重差圖說》一卷，《句股和較集成》一卷，《四元玉鑑細草》若干卷，《割圓捷法》一卷，以上四種雖未刊行，但據戴好友曹籀稱，這些書都有完整的手稿，他曾"就其家藏者，一一考證之。" [3] 華蘅芳還見過《四元玉鑑細草》的新化邵伯宗所藏鈔本。[4] 已刊的數學著作有《對數簡法》二卷，《續對數簡法》一卷，《外切密率》四卷，《假數測圓》二卷，總名《求表捷術》。

戴煦興趣廣泛，著述除數學外還有機械設計，詩畫樂律等方面。著有《戴氏泉譜》六卷，《庄子內篇順文》，《陶淵明集集注》，《鶴墅詩文草》，另有《船機圖說》一書未完稿，其甥王朝榮補成。煦五十歲以後攻音樂，著《音分古義》二卷。據載戴還有堪輿術之作《元空秘旨》一卷，[5] 及《汲齋剩稿》[6] 等著作。

二

戴煦在數學方面的工作集中在對數及三角函數級數展開兩個方向上。其於對數建樹甚多，被譽爲十九世紀中國數學史上該領域之第一人。三角函數冪級數展開雖經著名學者明安圖、董祐誠、項名達等努力，仍僅能求弦矢而不能求切割二線，項名達則以弧分

不通切割為憾。[7] 法人杜德美 (Petrus Jartoux, 1668-1720) 1701 年把求 "弦矢捷法" 等三個級數展開式傳入中國後, 引起清代學者的廣泛興趣, 一時研究三角函數展開成為風尚, 但正(餘)切、正(餘)割之展開長期不得解決, 李善蘭《弧矢啓秘》中雖有正切及正割展開式, 但未得其係數之源。1851 年, 戴煦與李善蘭相識, 李以《對數探源》,《弧矢啓秘》見示, 戴出其未竟書稿, 兩人互相切磋, 李氏非常欣賞《外切密率》, 再三敦促戴氏將其定稿出版, [8] 可見戴氏工作在當時的影響。

我們知道, 正(餘)弦, 正(餘)矢等的級數展開式之係數較簡單, 可以"累次加乘而得"。切、割線的展開式係數則十分複雜, 在現代數學中分別引進所謂伯努利數 (B_n) 及歐拉數 (E_n)。戴煦的研究突破了難點, 獲得與 B_n 及 E_n 等價的係數。他在缺乏現代符號記法的情形下, 巧妙地解決了這些係數的表述問題, 在淸代數學史上獨樹一幟。

《外切密率》四卷 (1852) 專論切、割線與弧背互求問題, 全書共11節, 戴正切、正割等11個級數展開式。每節包括 "術"、"解"、"細審" 三個部分。[9]其中有8個級數的係數具有特殊意義。我們記之為$D_i(n)$ $(i = 1, 2, \cdots, 8;\ n = 1, 2, 3, \cdots)$, 總名 "戴氏系列數"。戴煦分別以 "術" 給出其係數的構造; "解" 說明立術的原理; "細審" 給出具體推導過程。現以卷一"本弧求切線" 為例說明戴氏推導 $D_1(n)$ 的方法。

術曰: 先求各率分子為遞次乘法。以二為數根, 即為第一乘法。置前數根加二得四為數根, 置前乘法, 四、五遞乘之, 一、二遞除之得二十為初減數, 數根減初減得十六為第二乘法。置前數根, 加二得六為數根, 置前初減, 六、七遞乘之, 三、四遞除之得七十為初減數, 置前乘法, 六、七遞乘之, 一、二遞除之得三百三十六為次減數, 數根減初減得六十四, 再減次減得二百七十二為第三乘法。$\cdots$

所謂"各率分子" 即展開式各項係數的分子。戴氏的"遞次乘法", 即我們所言的戴氏數。上術用遞歸的形式由第一種戴氏的第一乘法 $D_1(2) = D_1\binom{2}{2} = 2$(註1) 逐步推出 $D_1(3) = 16$, $D_1(4) = 272$。$\cdots$

戴氏的做法是, $D_1(2) = 2$, 其中"2" 被稱作數根(註2); $D_1(3) = D_1\binom{3}{2} - 4$, "4" 是數根, $D_1\binom{3}{2}$ 即初減數; $D_1(4) = D_1\binom{4}{3} - D_1\binom{4}{2} + 6$, "6" 為數根, $D_1\binom{4}{2}$ 為初減數, $D_1\binom{4}{3}$ 即次減數。其中各減數 $D_1\binom{m}{n}$ 的求法是:

凡數根均起各偶數, 其求各減則用偶奇二數乘而逐次乘法遞加。(原注: 如第二乘法用四、五乘, 第三乘法六、七乘。)

再用奇偶二數除而挨次減數遞降。(原注: 如第三乘法初減用三、四除, 次減一、二除。)

(註1) 比照 $\tan\alpha$ 的展開式, 我們取 $D_1\binom{1}{1} = 1$。當記號 $D_1\binom{m}{n}$ 中 $m = n$ 時, 簡略為 $D_1(n)$, 下同。

(註2) “數根” 的意義參見下文。

即

$$
\begin{aligned}
D_1\binom{3}{2} &= \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}D_1\binom{2}{2};\\
D_1\binom{4}{2} &= \frac{6\cdot 7}{3\cdot 4}D_1\binom{3}{2};\\
D_1\binom{4}{3} &= \frac{6\cdot 7}{1\cdot 2}D_1\binom{3}{3};\\
\cdots\cdots & \quad \cdots\cdots\\
D_1\binom{m}{n} &= \frac{(2m-2)(2m-1)}{(2m-2n-1)(2m-2n)}\\
&\quad \cdot D_1\binom{m-1}{n}.^{(\text{註}3)}
\end{aligned}
$$

同時, 由於

乘法降一位, 則多一減。如是遞求, 得各率分子, 即遞次乘法。

即有

$$
D_1(n) \;=\; D_1\binom{m}{n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}D_1\binom{m}{n-k}
$$
$$(n=m)。$$

綜上, 第一種戴氏數 (即 $\tan\alpha$ 展開式係數之分子) 可表述爲

定理1:

(i) $D_1\binom{m}{0}=1;$

(ii) $D_1\binom{m}{n}\equiv 0 \quad (n<0 \text{ 或 } n>m)^{(\text{註}4)}$,
$D_1\binom{m}{n} = \frac{(2m-1)(2m-2)}{(2m-2n)(2m-2n-1)}D_1\binom{m-1}{n}$
$(n<m)$;

(iii)$D_1(n)=D_1\binom{m}{n}=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}D_1\binom{m}{n-k}$
$(n=m)$。

術文接下來利用以上所得之 “各率分子” 給出正切線展開式:

$$
\tan\alpha = \alpha + \frac{2}{3!}\alpha^3 + \frac{16}{5!}\alpha^5 + \frac{272}{7!}\alpha^7 + \cdots
$$
$$
+\frac{D_1(n)}{(2n+1)!}\alpha^{2n+1} + \cdots
$$

α 取弧度, 所謂 “本弧”, 即 $\alpha\le\frac{\pi}{4}$。此外, 戴煦還附上如下的解釋:

解曰: 凡以餘弦爲小股, 正弦爲小句, 半徑爲大股, 則正切線爲其大句。故以一率半徑乘弧背求正弦各率分數, 以弧背求餘弦各率分數除之, 即得弧背求切線各率分數。

如圖 1, 由相似句股形對應邊成比例得 $\frac{\text{甲丁}}{\text{戊乙}} = \frac{\text{甲己}}{\text{戊己}}$ 即 $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (不妨取 $r=1$)。而正弦、餘弦的展開式已由清初明安圖氏獲得:

$$
\begin{aligned}
sin\alpha &= \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \frac{\alpha^9}{9!} - \cdots\\
cos\alpha &= 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \frac{\alpha^8}{8!} - \cdots
\end{aligned}
$$

(註3) $D_1\binom{m}{n}$ 表示第一種戴氏數的第 m 乘法的第 n 減數。

(註4) 此爲筆者加入, 它在戴氏數表中不言自明。加入此條, 仍使定理敍述符號化後更加嚴密。以下不再申明。

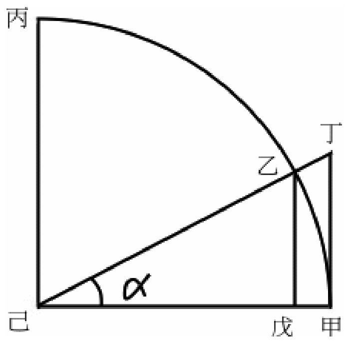

圖1.

如何做兩個無窮級數相除的除法呢? 戴煦取 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ 展開式的前五項做多項式除法, 把其計算過程排成“推演本弧求正切線總圖”(圖略)。他稱被除式爲“實式”, 除式與商的乘積叫“乘法式”, “乘法式”與 “實式”相減前必須通分, 通分後的乘法式叫做“同母式”。戴煦的推演圖及其所作解釋相當於下列計算過程:

$$
\begin{array}{rlll}
 & \alpha+\frac{2\alpha^3}{3!}+\frac{16\alpha^5}{5}+\frac{272\alpha^7}{7!}+\frac{7936\alpha^9}{9!}+\cdots & & \cdots\text{商式}\\ \cline{2-2}
1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+\frac{\alpha^8}{8!}-\cdots\Big) & \alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\frac{\alpha^7}{7!}+\frac{\alpha^9}{9!}-\cdots & & \cdots\text{初商實}\\
 & \alpha-\frac{\alpha^3}{2!}+\frac{\alpha^5}{4!}-\frac{\alpha^7}{6!}+\frac{\alpha^9}{8!}-\cdots & (*) & \cdots\text{初商乘法式}\\ \cline{2-2}
 & \frac{2\alpha^3}{3!}-\frac{4\alpha^5}{5!}+\frac{6\alpha^7}{7!}-\frac{8\alpha^9}{9!}+\cdots & & \cdots\text{次商實}\\
 & \frac{2\alpha^3}{3!}-\frac{2\alpha^5}{3!\cdot 2!}+\frac{2\alpha^7}{3!\cdot 4!}-\frac{2\alpha^9}{3!\cdot 6!}+\cdots & (**) & \cdots\text{次商乘法式}\\ \cline{2-2}
 & \frac{16\alpha^5}{5!}-\frac{64\alpha^7}{7!}+\frac{160\alpha^9}{9!}-\cdots & & \cdots\text{三商實}\\
 & \frac{16\alpha^5}{5!}-\frac{16\alpha^7}{5!\cdot 2!}+\frac{16\alpha^9}{5!\cdot 4!}-\cdots & (***) & \cdots\text{三商乘法式}\\ \cline{2-2}
 & \frac{272\alpha^7}{7!}-\frac{1856\alpha^9}{9!}+\cdots & & \cdots\text{四商實}\\
 & \frac{272\alpha^7}{7!}-\frac{272\alpha^9}{7!\cdot 2!}+\cdots & & \cdots\text{四商乘法式}\\ \cline{2-2}
 & \frac{7936\alpha^9}{9!}-\cdots & & \cdots\text{五商實}\\
 & \frac{7936\alpha^9}{9!}-\cdots & & \cdots\text{五商乘法式}\\ \cline{2-2}
 & 0 & &
\end{array}
$$

戴氏原圖未列“除式”, α, α^3, α^5, α^7, α^9 依次稱爲二、四、六、八、十率, 列於第一行, 其他各行僅記係數, 且每次都給出 “同母式”, 其中 $(*)$ 式通分得 $\alpha-\frac{3\alpha^3}{3!}+\frac{5\alpha^5}{5!}-$

$\frac{7\alpha^7}{7!}+\frac{9\alpha^9}{9!}-\cdots$ 初商同母式, $(**)$ 式通分得 $\frac{2\alpha^3}{3!}-\frac{20\alpha^5}{5!}+\frac{70\alpha^7}{7!}-\frac{168\alpha^9}{9!}+\cdots$ 次商同母式, $(***)$ 式通分得 $\frac{16\alpha^5}{5!}-\frac{336\alpha^7}{7!}+\frac{2016\alpha^9}{9!}-\cdots$三商同母式。正是由於對同母式的關注, 方看出因通分使係數之分子發生變化的規律。接著, 戴氏又指出:

> 細審切線率分, 其分母與正弦率分同, 是其遞求各率之除法亦必與正弦同, 而起二除三除, 繼以四除五除而遞加矣。惟其各率分子則由逐次遞減而成, 當分別其遞減之所由來而後求分子之法可見。

按以上通分相減, 則商式係數之分母必與被除式係數的分母相同。究其分子, 則:

> 其初商實分子均爲單一, 其初商同母式分子爲三、五、七、九各奇數, 是逐率數根之所起, 均以各奇數減一矣 (註5)。而一、三相減得二即爲第一分子。其初減數 (原注: 即次商同母式分子) 則皆生於第一分子之二。六率初減爲一、二、三除, 三、四、五乘, 而三乘三除可相抵, 是一、二除, 四、五乘也。$\cdots$

就是說, 次商同母式分子爲初減數 (即$D_1\binom{m}{2}$)。其中 $\frac{4\cdot5}{1\cdot2}\cdot2=20=D_1\binom{3}{2}$, $\frac{6\cdot7}{3\cdot4}\cdot20=70=D_1\binom{4}{2}$, $\frac{8\cdot9}{5\cdot6}\cdot70=168=D_1\binom{5}{2}$。三商、四商同母式分子亦有相似的規律可循。最後, 戴氏略去多項式除法表中的分母及各率, 僅考慮各式的係數之分子, 得下圖。戴煦指出:

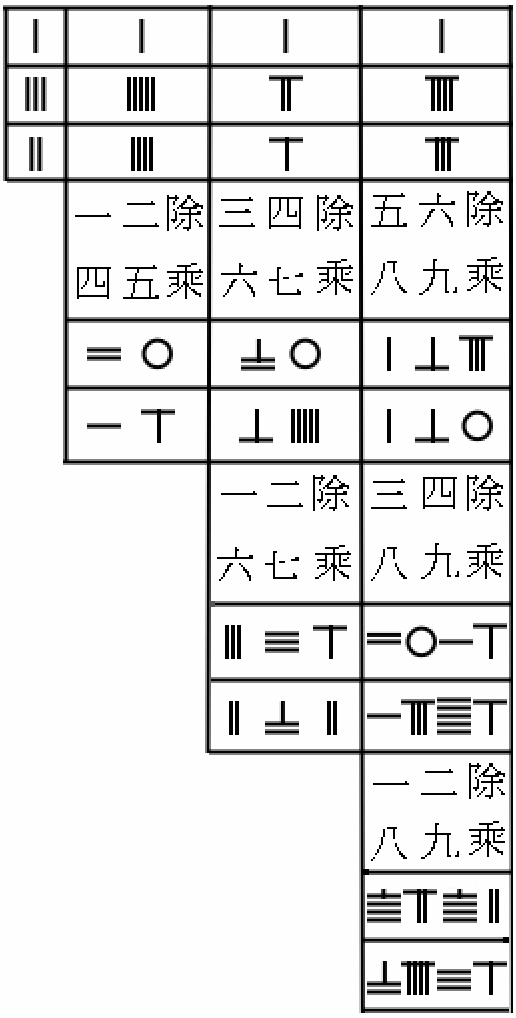

圖2.

第一層爲初商實分子, 均爲單一。第二層爲三、五、七、九, 各率分子均起奇數。減一爲第三層爲減除, 即數根。其首位二爲四率分子, 即第一乘法。第四層爲初減數, 以第一乘法爲實, 一、二除, 四、五乘, 爲第一初減; 再加三、四除, 六、七乘爲第二初減; 再加五、六除, 八、九乘, 爲第三初減。通計

(註5) 數根爲初商同母式分子減初商實式分子之差, 即 $2=D_1\binom{2}{1}-D_1\binom{2}{0}$, $4=D_1\binom{3}{1}-D_1\binom{3}{0}$。一般地, 數根 $=D_1\binom{m}{1}-D_1\binom{m}{0}$。

其除法自一、二而遞加, 其乘法則自四、五而遞加。第五層為減除。其首位六率分子即第二乘法。

通過圖 2, 戴煦明確地表述了各率分子遞歸規律, 圖的對角線上各數即爲所求的各乘法。由以上前五項計算的結果, 戴煦歸納出:

> 雖圖止十率, 而遞加之例已可類推也。而第九層減餘即第四乘法。細按初減、二減、三減迭次乘除之例, 横豎視之皆秩然而不之紊。則自二率至十率既然, 而自十率至千百率亦莫不皆然。

事實上, 圖 2 的奇數行爲商實式分子, 偶數行爲同母式分子, 而商實行之數及同母行之數可分別得戴氏數。也是說戴氏獲得了 “各率乘法” 的兩種構造方法。我們把圖 2 的奇、偶行分別列成表 1 及表 2, 則表1 即爲定理 1 的對應數表。同樣, 可以給出表 2 的構造公式, 作爲定理1 的推論。

系 1:

(i) $d_1\binom{0}{0}=1$;

(ii) $d_1\binom{m}{n}\equiv 0$ ($n>m$ 或 $n<0$); $d_1\binom{m}{n}=d_1\binom{m}{n-1}-D_1\binom{m}{n-1}$

$(n\le m)$。

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1		1	3	5	7	9
2			2	20	70	168
3				16	336	2016
4					272	9792
5						7936

表1.

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1		1	1	1	1	1
2			2	4	6	8
3				16	64	160
4					272	1856
5						7936

表2.

三

以上, 我們詳述了戴煦構造弧背求切線術係數的方法, 並用現代符號記法將其整理爲定理1 及其推論。《外切密率》一書除其之外, 另有七種係數, 但構造原理大同小異, 今以定理 2 至定理 8 表出如下。

定理 2(第二種戴氏數):

(i) $D_2\binom{0}{0}=1$, $D_2\binom{1}{0}=2$,

$$D_2\binom{m}{0}=\frac{2m(m+1)^{\frac{1+(-1)^m}{2}}}{2m-2}D_2\binom{m-1}{0}$$

$(m>2)$;

(ii) $D_2\binom{m}{n} \equiv 0$ ($n<0$ 或 $n>m$),

$D_2\binom{m}{n} = \frac{2m(2m+1)(m+1)^{\frac{1+(-1)^m}{2}}}{(2m-2n)(2m-2n+1)} D_2\binom{m-1}{n}$

($n<m$);

(iii)$D_2(n) = D_2\binom{m}{n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} D_2\binom{m}{n-k}$

($n=m$)。

系 2:

(i) $d_2\binom{0}{0} = 1$

(ii) $d_2\binom{m}{n} \equiv 0$ ($n>m$ 或 $n<0$), $d_2\binom{m}{n} = d_2\binom{m}{n-1} - D_2\binom{m}{n-1}$

($n \leq m$)。

$D_2\binom{m}{n}$ 及 $d_2\binom{m}{n}$ 的值分別爲表 3 及表 4。

n \ m	0	1	2	3	4	5
0	1	2	12	18	120	150
1		2	20	42	360	550
2			8	56	1008	2640
3				32	1920	10560
4					1152	21120
5						12800

表3.

n \ m	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1		2	12	18	120	150
2			8	24	240	400
3				32	768	2240
4					1152	8320
5						12800

表4.

定理3(第三種戴氏數):

(i) $D_3\binom{0}{0} = 1$;

(ii) $D_3\binom{m}{n} \equiv 0$ ($n<0$ 或 $n>m$), $D_3\binom{m}{n} = \frac{2m(2m+1)}{(2m-2n)(2m-2n-1)} D_3\binom{m-1}{n}$

($n<m$);

(iii)$D_3(n) = D_3\binom{m}{n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^n D_3\binom{m}{n-k}$

($n=m$)。

系3:

(i) $d_3\binom{0}{0} = 1$;

(ii) $d_3\binom{m}{n} \equiv 0$ ($n>m$ 或 $n<0$), $d_3\binom{m}{n} = d_3\binom{m}{n-1} - D_3\binom{m}{n-1}$

($n \leq m$)。

$D_3\binom{m}{n}$ 及 $d_3\binom{m}{n}$ 的數表分別爲表5、表6。

n \ m	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1		1	6	15	28	45
2			5	75	350	1050
3				61	1708	12810
4					1385	62325
5						50521

表5.

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1		1	1	1	1	1
2			5	14	27	44
3				61	323	1006
4					1385	11804
5						50521

表6.

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1		1	10	21	180	257
2			7	49	882	2310
3				31	1860	10230
4					1143	20955
5						12775

表7.

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1		1	3	3	15	15
2			7	18	165	260
3				31	717	2050
4					1143	8680
5						12775

表8.

定理4(第四種戴氏數):

(i) $D_4\binom{0}{0} = 1$,

$D_4\binom{m}{0} = (m+1)^{\frac{1+(-1)^m}{2}} D_4\binom{m-1}{0}$;

(ii) $D_4\binom{m}{n} \equiv 0$ ($n<0$ 或 $n>m$),

$D_4\binom{m}{n} = \frac{2m(2m+1)(m+1)^{\frac{1+(-1)^m}{2}}}{2m-2n+1} D_4\binom{m-1}{n}$

$(n<m)$;

(iii) $D_4(n) = D_4\binom{m}{n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k D_3\binom{m}{n-k}$

$(n=m)$。

系4:

(i) $d_4\binom{0}{0} = 1$;

(ii) $d_4\binom{m}{n} \equiv 0$ ($n>m$ 或 $n<0$), $d_4\binom{m}{n} = d_4\binom{m}{n-1} - D_4\binom{m}{n-1}$

$(n \le m)$。

$D_4\binom{m}{n}$ 與 $d_4\binom{m}{n}$ 的數表分別爲表7及表8。

定理5(第五種戴氏數):

(i) $D_5\binom{0}{0} = 1$;

(ii) $D_5\binom{m}{n} \equiv 0$ ($n<0$ 或 $n>m$),

$D_5\binom{m}{n} = \frac{2m(2m+1)(2m-2n-1)(m+1)^{\frac{1+(-1)^m}{2}}}{2m-2n+1} \cdot D_5\binom{m-1}{n}$ $(n<m)$;

$D_5(n) = D_5\binom{m}{n} = D_5\binom{m}{0} - \sum_{k=1}^{n-1} D_5\binom{m}{k}$ $(n=m)$。

系5:

(i) $d_5\binom{0}{0} = 1$;

(ii) $d_5\binom{m}{n} \equiv 0$ ($n>m$ 或 $n<0$), $d_5\binom{m}{n} = d_5\binom{m}{n-1} - D_5\binom{m}{n-1}$

$(n \le m)$。

$D_5\binom{m}{n}$, $d_5\binom{m}{n}$ 的數表分別爲表9、表10。

n \ m	0	1	2	3	4	5
0	1	2	72	2160	604800	54433000
1		2	40	1008	259200	22176000
2			32	448	96768	7603200
3				704	84480	5575680
4					164352	602640
5						13050880

表9.

n \ m	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1		2	72	2160	344800	544332000
2			32	1152	345600	32256000
3				704	248832	24652800
4					164352	19077120
5						13050880

表10.

定理6(第六種戴氏數):

(i) $D_6\binom{0}{0} = 1$,
$D_6\binom{m}{0} = (m-1)^2 D_6\binom{m-1}{0}$;

(ii) $D_6\binom{m}{n} \equiv 0$ $(n < 0$ 或 $n > m)$,
$D_6\binom{m}{n} = \frac{2m(m-1)(2m-1)}{2n} D_6\binom{m-1}{n-1}$
$(n < m)$;

(iii) $D_6(n) = D_6\binom{m}{n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} D_6\binom{m}{n-k}$
$(n = m)$。

系6:

(i) $d_6\binom{0}{0} = 1$;

(ii) $d_6\binom{m}{n} \equiv 0$ $(n < 0$ 或 $n > m)$,
$d_6\binom{m}{n} = D_6\binom{m}{n-1} - d_6\binom{m}{n-1}$
$(n \le m)$。

$D_6\binom{m}{n}$ 與 $d_6\binom{m}{n}$ 的值分別爲表11及表12。

n \ m	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	4	36	576
1		1	6	30	336	6480
2			5	90	1260	30240
3				64	2520	75600
4					1560	113400
5						62136

表11.

n \ m	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1		1	1	4	36	576
2			5	26	300	5904
3				64	960	24336
4					1560	51264
5						62136

表12.

定理7(第七種戴氏數):

(i) $D_7\binom{0}{0} = 1$,
$D_7\binom{m}{0} = (2m-1)^2(m+1)^{\frac{1+(-1)^m}{2}} D_7\binom{m-1}{0}$;

(ii) $D_7\binom{m}{n} \equiv 0$ $(n < 0$ 或 $n > m)$,
$D_7\binom{m}{n} = \frac{2m(2m+1)(m+1)^{\frac{1+(-1)^m}{2}}}{(2m-2n)(2m-2n+1)} D_7\binom{m-1}{n}$

$(n < m)$;

(iii) $D_7(n) = D_7\binom{m}{n} = D_7\binom{m}{0} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} D_7\binom{m}{k}$ $(n = m)$。

系7:

(i) $d_7\binom{0}{0} = 1$;

(ii) $d_7\binom{m}{n} \equiv 0$ $(n > m$ 或 $n < 0)$, $d_7\binom{m}{n} = d_7\binom{m}{n-1} - D_7\binom{m}{n-1}$ $(n \leq m)$。

$D_7\binom{m}{n}$ 、$d_7\binom{m}{n}$ 的數值爲表13、表14。

n \ m	0	1	2	3	4	5
0	1	1	27	675	165375	13395375
1		1	10	189	40500	30318753
2			17	119	19298	126225
3				367	22020	1089990
4					83577	1532245
5						6479015

表13.

n \ m	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1		1	27	675	165375	13395375
2			17	485	124875	103635
3				367	105597	9101250
4					83577	8011260
5						6479015

表14.

定理8(第八種戴氏數):

(i) $D_8\binom{0}{0} = 1$, $D_8\binom{1}{0} = 1$;

(ii) $D_8\binom{m}{n} \equiv 0$ $(n < 0$ 或 $n > m)$, $D_8\binom{m}{n} = \frac{2m(2m-1)(2m-2n-3)}{2m-2n+1} D_8\binom{m-1}{n}$ $(n < m)$;

(iii) $D_8(n) = D_8\binom{m}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} D_8\binom{n}{k}$ $(n = m)$。

其値爲

n \ m	0	1	2	3	4	5
0	1	1	4	72	2830	201600
1		1	4	40	1344	86400
2			8	72	1344	72576
3				184	2830	86400
4					8448	201600
5						648576

表15.

有了 $D_i(n)$, 切、割線與弧背互求的級數展開式可表述爲:

$$\tan\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_1(n)}{(2n-1)!}\alpha^{2n-1} \quad (\alpha \leq \frac{\pi}{4}) \ (1)$$

$$\tan\alpha = \left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_2(2n+1)\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^{4n+1}}{(2n+1)!!(4n+3)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_2(2n)\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^{4n-1}}{(2n+1)!!(4n+1)!} \quad (\alpha > \frac{\pi}{4}) \quad (2)$$

$$\sec\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_3(n)}{(2n)!}\alpha^{2n} \quad (\alpha \leq \frac{\pi}{4}) \quad (3)$$

$$\sec\alpha = \left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_4(2n+1)\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^{4n+1}}{(2n+1)!!(4n+3)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_4(2n)\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^{4n-1}}{(2n+1)!!(4n+1)!}$$

$$(\alpha > \frac{\pi}{4}) \quad (4)$$

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\alpha} = \tan\alpha+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_5(2n+1)}{(2n+1)!!(4n+3)!\tan^{4n+1}\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_5(2n)}{(2n+1)!!(4n+1)!\tan^{4n-1}\alpha}$$
$$(\tan\alpha \gg 1) \quad (5)$$

$$\alpha^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n+1}D_6(n)}{(2n)!}(\sec\alpha-1)^n$$
$$(\sec\alpha > 1) \quad (6)$$

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\alpha} = \sec\alpha+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_7(2n+1)}{(2n+1)!!(4n+3)!\sec^{4n+1}\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_7(2n)}{(2n+1)!!(4n+1)!\sec^{4n-1}\alpha}$$
$$(\sec\alpha \gg 1) \quad (7)$$

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{D_8(n-1)}{(2n)!}\left(\frac{\sec\alpha-1}{\sec\alpha+1}\right)^n \quad (8)$$

戴煦立餘弧 (即 $\alpha > \frac{\pi}{4}$) 與切、割二線互求之術, 考慮了級數的收斂區間, 這一點爲李善蘭所推重, 對當時學界頗有啓發, 值得表彰。

戴氏系列數有很多重要性質。 例如 $D_1(n)$ 與伯努利數 B_n 之間有

$$D_1(n) = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}B_n \quad (9)$$

$D_3(n)$ 即著名的歐拉數, 有

$$D_3(n) = E_n \quad (10)$$

又如

$$\begin{cases} D_1(2n) = \frac{2^{4n}-1}{4n(4n+1)(2n+1)!!}D_2(2n) \\ D_1(2n+1)=\frac{2^{4n+2}-1}{(4n+2)(4n+3)(2n+1)!!}D_2(2n+1) \end{cases} \quad (11)$$

$$D_1(n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{(n-k)}\binom{2n-1}{2k-1}D_3(n) \quad (12)$$

$$D_3(n) =! \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{2n}{2k-1}D_1(n) + (-1)^n \quad (13)$$

$$D_2(n) = \frac{2^{2n-1}}{2^{2n-1}-1}D_4(n) \quad (14)$$

$$D_6(n) = (n-1)!\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(2n-2k-1)!! \cdot (k-1)!\binom{2n}{2k}$$
$$(D_6(0)=1) \quad (15)$$

戴氏系列數是一項十分出色的工作, 除 $D_3(n) = E_n$ 外, 其它各數在現代大型數學工具書中均不見記載, 具有特殊意義。且其方法獨特, 思路明晰, 在世界數學史上亦應有其一定的歷史意義。由 (9)-(14) 可知, 戴氏數與 B_n 及 E_n 關係密切, B_n 及 E_n 在現代組合學上有十分重要的應用, 這暗示了戴氏數的重要前景, [10] 值得進一步研究。但深究其中的奧秘已不是本文的任務, 留待他文發揮。

参考文獻

1. 曹籀: "戴鶴墅傳",《碑傳集補》卷三十二。
2. 諸可寶:《疇人傳 · 三編》卷七, 艾約瑟條。
3. 曹籀: "戴鶴墅傳",《碑傳集補》卷三十二。
4. 李儼: "近代中算著述記",《中算史論叢》第二集, 中國科學院出版, 1954, p. 283.
5. 諸可寶:《疇人傳 · 三編》卷四, 戴煦條。
6. 《清史列傳》卷七十三。
7. 夏鸞翔:《外切密率序》, 叢書集成初編本。
8. 戴煦:《外切密率序》, 叢書集成初編本。
9. 戴煦:《外切密率》, 叢書集成初編本。
10. 羅見今:"與歐拉數相匹配的特殊函數 — 戴煦數",《數學史研究文集》第一輯, 內蒙古大學出版社、九章出版社合出, 1990, 131-139。

—本文作者任教於西北大學數學系—