多項式方程求根的魔術植物栽培算法

王則柯

1974 年 6 月, 第一次不動點 (fixed points) 算法及應用國際會議在美國召開。歐洲、日本和美國的幾十位數學家參加了這次會議。美國普林斯頓大學的庫恩 (Harold W. Kuhn) 教授宣讀了一篇用不動點算法解代數方程的論文[1], 引起大家很大的興趣。

如所周知, 偉大的數學家高斯在 1799 年首先證明了代數基本定理: 一個 n 次複係數代數方程有且僅有 n 個根。可是, 當時他的證明還不是構造性的, 也就是說, 只肯定根的存在, 但沒有同時告訴求解的方法。近二百年來, 特別是電子計算機問世以來, 人們已經發展了不少數值求根方法。這些方法大致上屬於同一類型: 以迭代爲特點。有些方法還依賴於根的分布理論。然而, 庫恩的方法卻是別開生面的。

一個方形的培養皿, 它的邊緣上長著 n 個新芽 (圖 1)。還有一個立體的大籬笆, 越往上越密。把籬笆放在培養皿上面, 一個數學過程馬上就要開始了。隨便你給出一個 n 次複係數多項式 $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, 把 f 的信息傳給大籬笆, 於是培養皿上的 n 個新芽如同 n 條生長著的籐一樣, 很快地向上攀延, 每條籐恰恰指向多項式 $f(z)$ 的一根, 多項式 $f(z)$ 的 n 個根就全部找到了 (圖 2)。

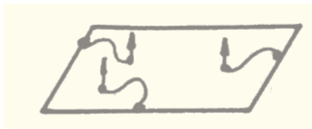

圖1 三個芽的庫恩培養皿

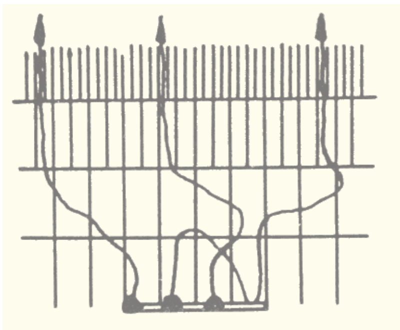

圖2 庫恩的大籬笆和他的魔術植物

這是數學還是園藝學? 莫非是編神話? 不, 這是庫恩那篇嚴謹的數學論文的眞實的幾何形象。讓我們仔細看看, 庫恩的培養皿和大籬笆是怎樣建造的; 多項式 $f(z)$ 的信息是怎樣傳給大籬笆的; 在這種信息的刺激下, n

條籐又是怎樣攀延上去的。

大家知道, 多項式 $f(z)$ 是複數域 C 上的一個複值函數, 它的根就是複數平面 C 上使得 $f(z_0)=0$ 的那些點 z_0。幾何上, $w=f(z)$ 是複平面 C 到另一複平面 C' 之間的一個變換, 它的根就是複平面 C 上被 f 變換到複平面 C' 的原點的那些點。

庫恩把一系列複平面 $C_{-1}, C_0, C_1, C_2, \ldots$ 像摩天大樓面一樣排好, 在上面劃線, 把它們全部分割成三角形 (圖3)。從 C_0 開始, 每向上一層, 線的密度就增加一倍, 並且除 C_{-1} 略有不同之外, 其餘各層的剖分規律完全相同。庫恩就是要用這些越來越細的三角形網格, 使多項式的根就範。

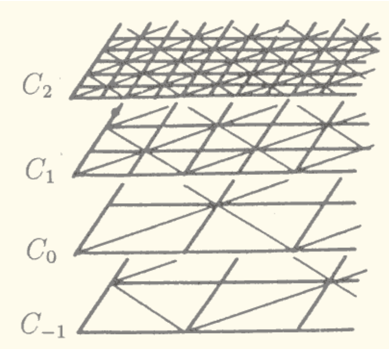

圖3

相鄰兩層之間, 按照一定的規則, 連起許多直的斜的"鋼筋", 把兩層之間的空間全部劃分成一個一個四面體。圖4展示了 C_{-1} 和 C_0 之間一個立方體的剖分情況, 立方體被分割成 5 個四面體。把這 5 個四面體分離開看看, 就成了圖 5 。C_0 以上任兩層 C_k 和 C_{k+1} 之間的一個立方體的剖分情況, 則如圖 6 所示。這些剖分規則, 是高度規律性的。

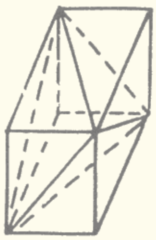

圖4

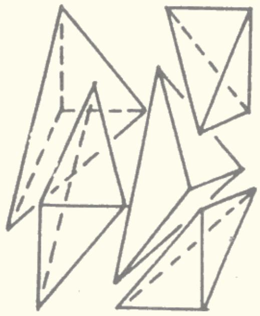

圖5

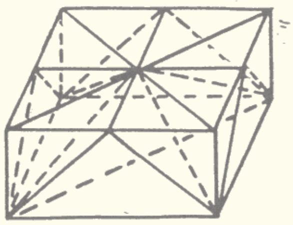

圖6

剖分以後, 留下這些"鋼筋骨架", 就是庫恩的越往上越密的大籬笆。(這時我們知道, 圖 2 的籬笆沒有畫出密密麻麻的對角斜線。)

現在, 在 C_{-1} 上取一個邊長 2m 格的方塊 Q_{m}, 它的邊緣 (記作 ∂Q_{m}) 上有 8m 個頂點。(頂點即網格三角形的頂點。)

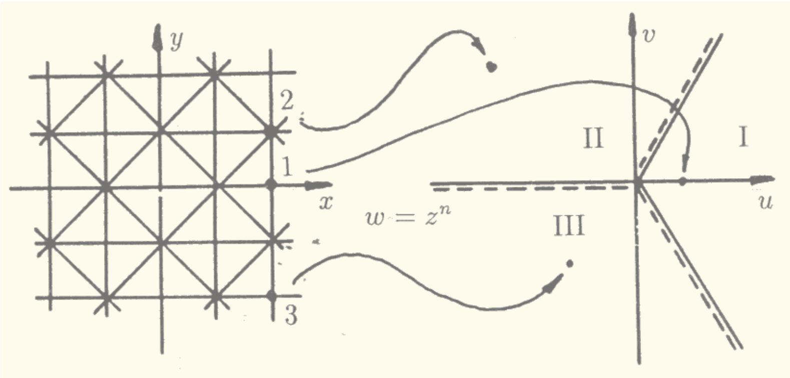

圖7 $m=2(n=3)$ 時的培養皿 $Q_{\rm m}$ 及標號

大家知道, 對於每一個複數 z, 它的 n 次冪 z^n 還是一個複數。用三條射線把複平面 C' 分成相等的三個扇形部分 I、II、III (圖7)。如果一個頂點所代表的複數 z 的 n 次冪 $w=z^n$ 落在 I 裡, 就給這個頂點標號 1; 落在 II 裡, 就標號 2; 落在 III 裡, 就標號 3。這樣, 就可以把 C_{-1} 上 $Q_{\rm m}$ 內的頂點全部按照冪函數 $w=z^n$ 標好號。

冪函數 $w=z^n$ 把 C 平面上繞原點一圈的正方形周界, 變成 C' 平面上繞原點 n 圈的一條曲線。所以, 當 m 較大 $(m\geq 3n/2\pi)$ 時, $\partial Q_{\rm m}$ 上的頂點, 按照逆時針方向, 只能循序漸進地標號, 即相鄰頂點標號只能有 $1\to 1$, $1\to 2$, $2\to 2$, $2\to 3$, $3\to 3$, $3\to 1$ 六種情況, 並且 $1\to 2$ 的棱恰有 n 條, 相應於 C' 平面上的曲線由 I 進入 II n 次 (圖 8)。庫恩在這 n 個 $1\to 2$ 棱的中點各栽一個芽, 就成了他的培養皿。

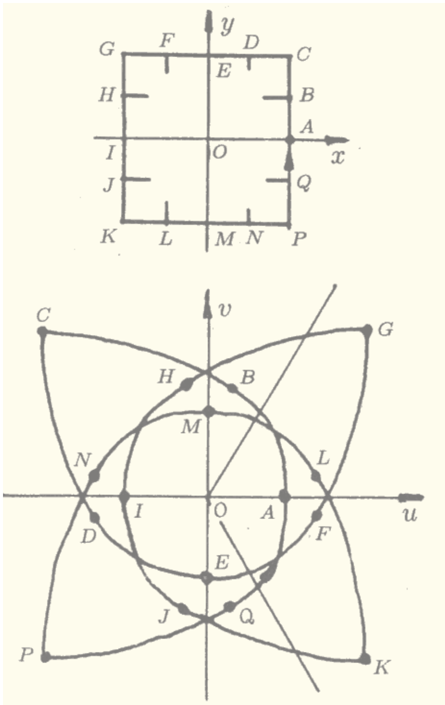

圖8

那麼所給的多項式 $f(z)$ 的信息又怎樣傳給大籬笆呢? 只要對 C_0 及 C_0 以上每一層面上每個頂點 z 算一下 $f(z)$, 和上面一樣, 如 $f(z)$ 落在 I, z 就標號 1; 如 $f(z)$ 落在 II, z 有標號 2; 如 $f(z)$ 落在 III, z 就標號

3, 這樣一來, 籬笆上的所有頂點都可以有一個標號 1 或 2 或 3 。這些簡單的 1,2,3, 數字, 就構成 f 的全部信息。我們注意, 培養皿 (在 C_{-1} 上) 是按照 $w=z^n$ 標號的, 而大籬笆 (C_0 以上) 是按照 $w=f(z)$ 標號的, 它們的信息是不同的。

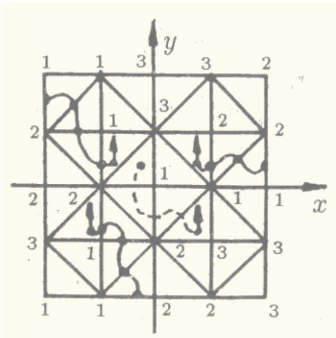

圖9 破土前籐的生長情況

現在, 這 n 個芽怎樣生長呢? 看圖9, 庫恩規定, 從 $1\to 2$ 稜中點開始, 向 Q_{m} 裡鑽, 實行“遇到有 1,2 兩個標號的稜就穿過去”的規則, 尋找具有 1,2,3 三個標號的完全標號三角形。如果不遇到完全標號三角形, 籐就要穿過去, 而 Q_{m} 內三角形數目有限, 所以每條籐一定會到達一個完全標號三角形 (圖10, 圖9)。到達完全標號三角形時, 籐就抬頭出土, 開始向上攀延 (圖11)。

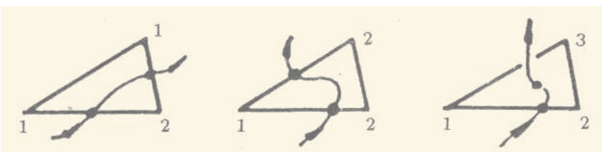

圖10 籐在 Q_{m} 內的生長

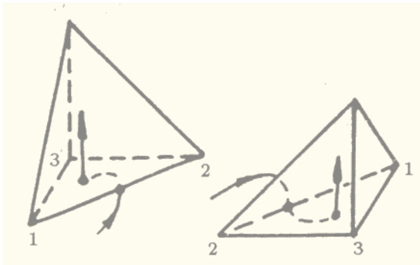

圖11 破土抬頭

向上攀延的規則是: 遇到四面體的完全標號三角形的側面, 就穿過去, 進入另一個四面體。這樣, 一條籐通過一個完全標號三角形進入一個四面體, 那麼不論第四個頂點如何標號, 它總可通過另一完全標號三角形穿出去 (圖12)。所以, 籐的生長是無止境的。

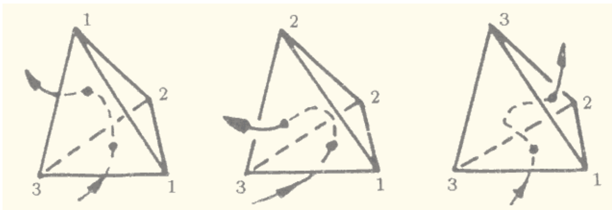

圖12 不論第 4 頂點如何標號, 總可穿過

已經出土的籐, 會不會又鑽入泥土 (回到 C_{-1}) 呢? 可能的。庫恩規定, 重新入土後, 仍按“遇 $1\to 2$ 稜穿過去”的規則生長, 又總可找到另一完全標號三角形, 再次抬頭出土。圖 9 中虛線的一段, 就是重新入土而又重新出土的一段。

不難證明, 除了有限的曲折往返外, n 條籐都要不斷向上伸延, 不交叉, 不分叉, 每條籐指向 $f(z)$ 的一個根。

方法確實妙, 但每條籐指向多項式的一個根還要說明一下。我們回過頭來看看, 複平

面 $C_k(k \geq 0)$ 上, 完全標號三角形是什麼意思。根據標號規則, 它的三個頂點經過變換 f 之後分別落在 I、II、III 三部分, 所以, 變換後的三點包圍著原點 (圖13)。因此, 我們有理由期望這個完全標號三角形內有一點 $\overline{z}$, 被 f 變換到 C' 平面的原點: $f(\overline{z}) = 0$。事實上, 當 k 較大時, 完全標號三角形內有根的猜想, 在略加修改之後, 是成立的。

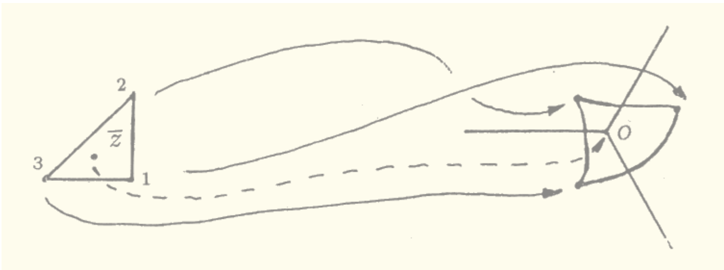

圖13 完全標號三角形內可望有一個根

既然籐在完全標號三角形內穿行, 完全標號三角形內有根, 所以籐與多項式的根的距離不超過三角形的尺度。但三角形就是大籬笆的網眼, 越向上網眼越小, 所以這些籐與多項式的根就不得不越來越靠近。取極限, 這 n 條籐就捕捉住多項式的全部 n 個根。

這種方法計算量會不會太大? 前面說過 f 的信息要傳給大籬笆。若對籬笆上每個頂點都算一下 $f(z)$, 這還了得? 不必耽心, 我們的籐是會自動搜索目標的, 只有籐經過的那些頂點, 才需要把 $f(z)$ 眞的算一下。這些籐在最下若干層時, 由於 C_{-1} 用 $w = z^n$ 標號, C_0 以上用 $w = f(z)$ 標號, 變動十分劇烈, 是一個從 z^n 向 $f(z)$ 調整的階段。但以後, 就幾乎筆直向上生長, 很快就達到很高的精度 (參看圖 2)。圖 14 是計算機追蹤某個多項式的一個根的計算點列從找到完全標號三角形起的一段。我們看到, 經過最初的曲折摸索之後, 計算點列很快就捕捉住多項式根的所在, 並迅速向上發展, 亦即向精度發展。C_4 以後, 計算精度就不是我們這個圖所能表示的了。我們所說的籐, 就在這座由四面體堆砌成的玲瓏寶塔中穿行。所謂籐的生長攀延, 就是計算點列的伸延。

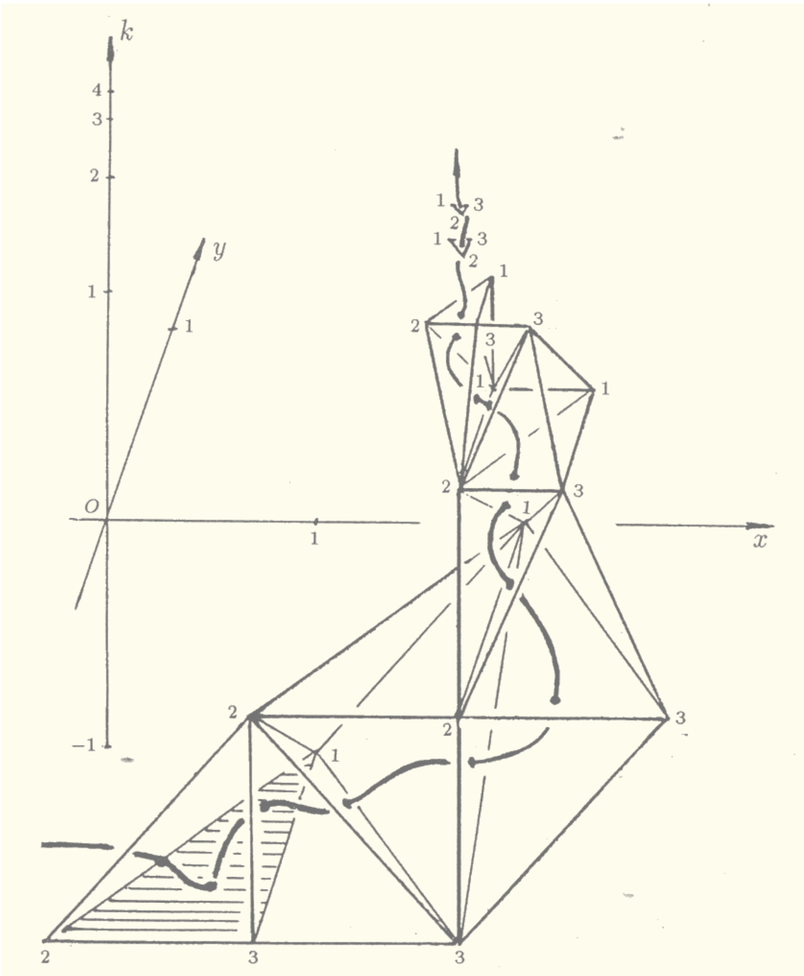

圖14 一個計算實例, 塔上標號引導計算。籐在塔內穿行。

我們還看到, 不管具體的 n 次多項式 $f(z)$ 是怎樣的, 只要 n 相同, Q_{m} 就都是由 $w=z^n$ 標號的, 也就是說, 出發點是規範化的。這在計算實施方面, 也是頗有意義的。

庫恩的方法, 構思新穎, 幾何形象十分鮮明。數學是抽象的, 但它一定是枯燥的嗎? 否。抽象中有具體, 枯燥的外表下有著生動豐富的內容。庫恩的例子就是又一個有力的證明。

現在我們回到文章的開頭。“不動點”是什麼意思呢?

我們知道, 一個函數就是數域之間的一個變換。如果 $g(x)=x$, 即 x 通過變換 g 仍變爲它自己, 沒有動, x 就叫做 g 的一個不動點。數學中許多問題都可作爲不動點問題來處理。例如, 求一個方程 $f(x)=0$ 的根, 就可以化成求 $g(x)=f(x)+x$ 的不動點, 這是因爲 $g(x)=x$ 等價於 $f(x)=0$。

不動點理論是拓撲學的一個分支。中國青年數學家姜伯駒、石根華在江澤涵教授的

指導下, 曾經對這一理論作出貢獻[2]。關於不動點的存在, 最早是 1912 年布勞維爾 (Brouwer) 證明了著名的定理: 球體到自身的連續映射至少有一個不動點。從那時起, 不動點定理不僅在純粹數學中是重要的, 而且成爲證明一大類

應用數學問題題解的存在性的有力工具。但是直到六十年代初, 還沒有一種有效的算法能具體求出不動點, 因而往往不能求出那些應用數學問題的解。

1967年, 美國耶魯大學的赫伯特·斯卡弗 (Herbert E. Scarf) 教授作出突破, 提出一種以有限點列的計算逼近不動點的算法。自此以後, 不動點算法作爲一種有效的計算方法迅速而廣泛地發展起來, 取得了一系列成果, 爲拓撲學思想應用於實際問題開拓了一個新方向, 爲一系列應用數學問題提供了新的解法。值得注意的是不動點算法是在求解的同時解決解的存在性問題的。即如庫恩的例子, 實際上同時就是代數基本定理的一個構造性的新證明。

不動點算法的要點, 一是“剖分”, 如同庫恩建造大籬笆要將平面分割成三角形、將空間分割爲四面體等所謂“單純形”, 剖分是計算的基礎。二是“輪迴” (Pivoting), 在庫恩的例子中, 這種輪迴是通過對單純形頂點的適當的標號法來實現的, 憑標號引導 “籐”的生長, 即引導計算點列的伸延。“剖分”和“輪迴”計算, 是組合拓撲的典型方法。組合拓撲是拓撲學中古典的部分。近三四十年來, 由於微分拓撲與微分方程等問題的深刻聯繫, 使得微分方法一時成爲拓撲學的主流, 而組合方法卻處於相對冷落之中。“山窮水盡疑無路, 柳暗花明又一村”, 斯卡弗的不動點算法出現以來, 組合方法就像結束了冬眠一樣, 又表現出巨大的生命力來。就拓撲學內部來說, 不動點算法的影響也很大。計算同調群的程序, 計算拓撲度的算法, 這些原來難以想像的進展, 已經出現在數學文獻之中, 深刻地改變著純粹數學的面孔。

理論與應用 , 古典與前沿, 抽象思維與具體算法, 正在激烈地相互作用著, 這裡, 我們特別可以看到計算機科學蓬勃發展, 廣泛滲透對整個數學學科的深刻影響。

参考文獻

[1] Kuhn H. W., *Fixed Points. Algorithms and Applications*, (ed. Karamardian S.), Academic Press (1977), 11-40。

[2] 江澤涵, 不動點類理論, 科學出版社, 1979。

[3] 王則柯, 單純不動點算法基礎, 中山大學出版社, 廣州, 1986。

—本文作者任教於廣州中山大學—