有趣的“猴子分蘋果”問題

殷堰工

1979 年春天, 諾貝爾獎獲得者、著名物理學家、美籍華人李政道博士在合肥訪問中國科大時, 給科大少年班的學生出了一個有趣的題目:

海灘上有一堆蘋果, 這是五個猴子的財產。它們要平均分配。第一個猴子來了, 它左等右等別的猴子都不來, 它便把蘋果分成五堆, 每堆一樣多, 還剩下一個。它把剩下的一個扔到海裡, 自己拿走了五堆中的一堆。第二個猴子來了, 它又把蘋果分成五堆, 又多了一個, 它又扔掉一個, 拿走一堆走了。以後每個猴子來了都是如此辦理。問原來至少有多少蘋果? 最後至少剩下多少蘋果?

對這個有趣的“猴子分蘋果”問題, 李博士指出: 用通常的方法列方程來解, 相當麻煩。接著, 他提供了物理學家狄拉克的一種巧妙解法 (見《數學通報》1980(4)) 其依據是線性方程組的通解理論。由於問題的趣味性以及所給出方法並非初等,《科學畫報》1979年(6)、(7);《中國青年》1979年 (7)、(8) 接連介紹了該題及其解法, 但均缺乏一點“數學味”。1980年, 井中教授在《數學通報》第四期上獨闢蹊徑, 用一種比較簡單而又初等的函數迭代方法解決了這個問題。筆者有興對此作了進一步的研討, 不僅得到了一種運用逆向思維予以解決的方法, 而且還把問題推廣到了一般的情形。

一種解法: 設第一個猴子到海灘時把蘋果分成五堆中的一堆蘋果個數爲$N_1, \cdots$, 第五個猴子來到海灘時, 把蘋果平均分成五堆中的一堆蘋果個數爲N_5, 則第五個猴子來到海灘上的蘋果個數爲$5N_5+1$, 依題意, $5N_5+1$必能被4整除, 於是, N_5+1也必能被4整除。同樣道理N_4+1, N_3+1, N_2+1也能被4整除。

而$5N_5+1$是第四個猴子把蘋果平均分成五堆中的四堆, 故$4N_4 = 5N_5+1$, 即$N_4 = N_5+\frac{1}{4}(N_5+1)$, 同理$N_3 = N_4+\frac{1}{4}(N_4+1)$, $N_2 = N_3+\frac{1}{4}(N_3+1)$, $N_1 = N_2+\frac{1}{4}(N_2+1)$。

注意到N_5+1能被4整除, 可設$N_5 = 4k-1$(k爲正整數), 於是, $N_4 = N_5+\frac{1}{4}(N_5+1) = 5k-1$。

因爲$N_4+1 = 5k$又是能被4整除的, 故k必是4的倍數。由此設$k = 4k_1$, (k_1是正整數) 此時$N_4 = 20k_1-1$, $N_3 = N_4+\frac{1}{4}(N_4+1) = 25k_1-1$, 以此類推, 有$N_1 = 625k_3-1$($k_3$是正整數) 取$N_1$之最小值, 祇

有$k_3=1$, 則$N_1=624$。因此, 海灘上原來至少有$624\times5+1=3121$(個) 蘋果。倒退回去可求出最後至少剩下蘋果1020個。

一種推廣: 海灘上有一堆蘋果, 這是n個猴子的財產($n\geq 2$), 它們要平均分配。第一個猴子來了, 把蘋果平均分成n堆, 多了一個蘋果, 它把多的一個扔到海裡, 取走一堆。第二個猴子把剩下的$(n-1)$堆蘋果再平均分成n堆, 又多了一個蘋果, 扔去這一個蘋果, 取走一堆。其它猴子類同。問海灘上原來至少有多少個蘋果? 最後至少還剩下多少個蘋果?

解: 設最後剩下x個蘋果, 原來有y個蘋果, 則最後一個猴子來之前還剩$(\frac{n}{n-1}x+1)$個蘋果; 倒數第二個猴子來之前有$[\frac{n}{n-1}(\frac{n}{n-1}x+1)+1]$個蘋果; $\cdots$; 第一個猴子來之前 (原有的) 蘋果數爲

$$\begin{aligned} y &= \underbrace{\frac{n}{n-1}\Big\{\frac{n}{n-1}\cdots\Big[\frac{n}{n-1}\Big(\frac{n}{n-1}}_{n\text{個}\frac{n}{n-1}}x \\ &\qquad \underbrace{+1\Big)+1\Big]+\cdots+1\Big\}+1}_{n\text{個}1} \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n x+\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \\ &\quad +\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-2}+\cdots+\left(\frac{n}{n-1}\right)+1 \\ &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n x+\frac{(\frac{n}{n-1})^{n-1}(\frac{n}{n-1})-1}{\frac{n}{n-1}-1} \\ &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n x+\frac{(\frac{n}{n-1})^{n}-1}{\frac{1}{n-1}} \\ &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n x \\ &\quad +\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^n-\frac{(n-1)^n}{(n-1)^n}\right]\cdot(n-1) \end{aligned}$$

於是, $(n-1)^n y=n^n x+[n^n-(n-1)^n](n-1)$

可化爲$(n-1)^n(y+n-1)=n^n(x+n-1)$

解此二元一次不定方程, 由於n與$n-1$互質, 所以

$$\begin{cases} x+n-1=(n-1)^n\cdot t \\ y+n-1=n^n\cdot t, & \text{其中}t\text{爲整數。} \end{cases}$$

但$x\geq0$, $y\geq0$, 因此得到通解

$$\begin{cases} x=(n-1)^n\cdot t-n+1 \\ y=n^n\cdot t-n+1, & \text{其中}t\text{爲正整數。} \end{cases}$$

當$t=1$時, 便知海灘上原來至少有n^n-n+1個蘋果, 最後至少剩下$(n-1)^n-n+1$個蘋果。

特別地, 當$n=5$時, 即李博士所提問題的答案分別是$5^5-(5-1)=3121$(個) 與$(5-1)^5-(5-1)=1020$(個)

問題應當說解決得很圓滿了。但是, 如果我們對此再深究的話, 則可得到其進一步的推廣, 即:

海灘上有一堆蘋果和m組猴子, 每組猴子數是第1組有n_1個, 第2組有n_2個, $\cdots$, 第m組有n_m個($n_k\geq 2$, $k=1,2,\cdots,m$)。每組猴子都認爲這堆蘋果是自己組內成員的財產。第1組的第1個猴子來了, 把這堆蘋果平均分成n_1堆, 多了一個蘋果, 它把多的一個扔到海裡, 取走一堆。第2個猴子來了, 把剩下的(n_1-1)堆蘋果再平均分成n_1堆, 又多了一個蘋果, 扔去這一個蘋果, 取走一堆。

第1組的其它猴子類同。第2組的第1個猴子來了，它把第1組所有猴子來去後剩下的蘋果平均分成n_2堆，多了一個蘋果，它把多的一個蘋果扔掉，取走一堆。第2組的每個猴子類同。$\cdots$第m組的第1個猴子來了，它把第$(m-1)$組所有猴子來去後剩下的蘋果平均分成n_m堆，多了一個蘋果，扔掉這一個蘋果，取走其中的一堆。第m組每個猴子類同。問：海灘上原來至少有多少個蘋果？最後至少剩下多少個蘋果？

解：設海灘上原來有 y 個蘋果。第 k 組第 n_k 個猴子來去後剩下x_k個蘋果($k=1,2,\cdots,m$)，則

第1組的第1個猴子拿走了蘋果$\frac{1}{n_1}(y-1)$個，剩下了蘋果$\frac{1}{n_1}[(n_1-1)y-(n_1-1)]$個；第2個猴子拿走了蘋果$\frac{1}{n_1^2}[(n_1-1)y-(n_1-1)-n_1]$個，剩下了蘋果爲$\frac{1}{n_1^2}\{(n_1-1)^2y-[(n_1-1)^2+(n_1-1)n_1]\}$個；$\cdots$第$n_1$個猴子拿走了蘋果$\frac{1}{n_1^{n_1}}\{(n_1-1)^{n_1-1}y-[n_1^{n_1}-(n_1-1)^{n_1}]\}$個，剩下了蘋果$\frac{1}{n_1^{n_1}}\{(n_1-1)^{n_1}y-[n_1^{n_1+1}-(n_1-1)^{n_1+1}-n_1^{n_1}]\}=x_1$個。

第2組的第1個猴子拿走了蘋果$\frac{1}{n_2}(x_1-1)$個，剩下了蘋果$\frac{1}{n_2}[(n_2-1)x_1-(n_2-1)]$個；第2個猴子拿走了蘋果$\frac{1}{n_2^2}[(n_2-1)x_1-(n_2-1)-n_2]$個，剩下了蘋果爲$\frac{1}{n_2^2}\{(n_2-1)^2x_1-[(n_2-1)^2+(n_2-1)n_2]\}$個；$\cdots$第$n_2$個猴子拿走了蘋果$\frac{1}{n_2^{n_2}}\{(n_2-1)^{n_2-1}x_1-[n_2^{n_2}-(n_2-1)^{n_2}]\}$個，剩下了蘋果$\frac{1}{n_2^{n_2}}\{(n_2-1)^{n_2}x_1-[n_2^{n_2+1}-(n_2-1)^{n_2+1}-n_2^{n_2}]\}=x_2$個。

同理可得第3組、第4組、$\cdots$、第$(m-1)$組的情況。顯然，第m組的情形是：

第1個猴子拿走了蘋果$\frac{1}{n_m}(x_{m-1}-1)$個，剩下了蘋果$\frac{1}{n_m}[(n_m-1)x_{m-1}-(n_m-1)]$個；第2個猴子拿走了蘋果$\frac{1}{n_m^2}[(n_m-1)x_{m-1}-(n_m-1)-n_m]$個，剩下了蘋果$\frac{1}{n_m^2}\{(n_m-1)^2x_{m-1}-[(n_m-1)^2+(n_m-1)n_m]\}$個；$\cdots$；第$n_m$個猴子拿走了蘋果$\frac{1}{n_m^{n_m}}\{(n_m-1)^{n_m-1}x_{m-1}-[n_m^{n_m}-(n_m-1)^{n_m}]\}$ 個，剩下了蘋果 $\frac{1}{n_m^{n_m}}\{(n_m-1)^{n_m}x_{m-1}-[n_m^{n_m+1}-(n_m-1)^{n_m+1}-n_m^{n_m}]\}=x_m$ 個。

現在，我們將$x_k(k=1,2,\cdots,m)$進行迭代，即把x_1代入x_2，x_2又代入x_3，$\cdots$，代入x_m並令$x=x_m$，$P=\prod_{k=1}^{m}(n_k-1)^{n_k}$，$Q=\prod_{k=1}^{m}n_k^{n_k}$，$R=(n_2-1)^{n_2}(n_3-1)^{n_3}\cdots(n_m-1)^{n_m}[n_1^{n_1+1}-(n_1-1)^{n_1+1}-n_1^{n_1}]+n_1^{n_1}(n_3-1)^{n_3}\cdots(n_m-1)^{n_m}[n_2^{n_2+1}-(n_2-1)^{n_2+1}-n_2^{n_2}]+\cdots+n_1^{n_1}n_2^{n_2}\cdots n_{m-1}^{n_{m-1}}[n_m^{n_m+1}-(n_m-1)^{n_m+1}-n_m^{n_m}]$，則容易得到方程：

$$Py-Qx=R \qquad (*)$$

因爲 P、Q 互質，所以方程 $(*)$ 的整數解是
$\begin{cases}x=x_0+Pt\\ y=y_0+Qt\end{cases}$，其中 t 是整數，(x_0,y_0) 是方

程 $(*)$ 的一組特解。

注意到$(*)$的係數符號，因此方程$(*)$有無窮多組解。

於是，當我們求得了方程 $(*)$ 的最小整數解 x_0'，y_0'後，那麼，原問題的解也就得到了，爲：海灘上原來至少有y_0'個蘋果，最後至少剩下x_0'個蘋果。

特別地, 當$m = 1$時, 我們就可得到前面的推廣問題了, 其對應的二元一次不定方程即爲

$$(n-1)^n y-n^n x = n^{n+1}-(n-1)^{n+1}-n^n$$

亦即$(n-1)^n y=n^n x+[n^n-(n-1)^n](n-1)$

此方程與前面所得到的方程完全一致。因此, 這是前述推廣之推廣。

—本文作者任教於蘇州教育學院數學系—